1849

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass

von

C. W. Borchardt.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Einundsiebzigster Band.

In vier Heften.

71

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

Berlin, 1870.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhaltsverzeichniss des einundsiebzigsten Bandes.

Zur Theorie der Erzeugung geometrischer Curven. Von Herrn *A. Olivier* in Schaffhausen. . . . . Seite 1

Ueber einen Satz von *Steiner*. Von Herrn *Eduard Weyr* in Prag. . . . — 16

Ueber einige Sätze von *Steiner* und ihren Zusammenhang mit der zwei und zweigliedrigen Verwandtschaft der Grundgebilde ersten Grades. Von Demselben. . . . . — 18

Note zu *Riemanns* Beweis des *Dirichlet*schen Princips. Von Herrn *H. Weber* in Heidelberg. . . . . — 29

Von der Zerlegung der Discriminante der cubischen Gleichung, welche die Hauptaxen einer Fläche zweiter Ordnung bestimmt, in eine Summe von Quadraten. Von Herrn *G. Bauer* in München. . . . . — 40

Von den Kreisschnitten der Flächen zweiter Ordnung. Von Demselben. . — 46

Zur Theorie der Bewegung der Elektricität in nicht linearen Leitern. Von Herrn *H. Lorberg* in Ruhrort. . . . . — 53

Die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale als Functionen eines Parameters aufgefasst. Von Herrn *L. Fuchs* in Greifswald. . . . . — 91

Ueber quadratische, trigonale und bitrigonale Reste. Von Herrn *Stern* in Göttingen. . . . . — 137

Ueber die Invarianten binärer Formen bei höheren Transformationen. Von Herrn *Gordan* zu Giessen. . . . . — 164

Ueber die Methode, die Ordnungszahl einer Curve zu finden, welche durch zwei projectivische Curvenbüschel erzeugt wird. Von Herrn *A. Olivier* in Schaffhausen. . . . . — 195

Beweis des Satzes, dass eine einwerthige mehr als $2n$fach periodische Function von n Veränderlichen unmöglich ist. Auszug aus einem Schreiben *Riemanns* an Herrn *Weierstrass*. . . . . — 197

Beitrag zur Bestimmung von $\vartheta(0, 0, \ldots 0)$ durch die Klassenmoduln algebraischer Functionen. Von Herrn *J. Thomae* in Halle. . . . . Seite 201

Beweis zweier Sätze der Functionentheorie. Von Herrn *F. E. Prym* in Würzburg. . . . . — 223

Ueber die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit. Von Herrn *G. Kirchhoff* in Heidelberg. . . . . — 237

Ueber die Kräfte, welche zwei unendlich dünne, starre Ringe in einer Flüssigkeit scheinbar auf einander ausüben können. Von Demselben. . . — 263

Entwickelung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von n Differentialen. Erste Mittheilung. Von Herrn *R. Lipschitz* in Bonn. . . — 274

Entwickelung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von n Differentialen. Zweite Mittheilung. Von Demselben. . . . . — 288

Zur Transformation der ternären quadratischen Formen. Von Herrn *Paul Bachmann* in Breslau. . . . . — 296

Ueber ein Randintegral. Von Herrn *F. E. Prym* in Würzburg. . . . . — 305

Ueber hypergeometrische Functionen n^{ter} Ordnung. Von Herrn *L. Pochhammer*. — 316

Ueber trigonometrische Reihen. Von Herrn *E. Heine* in Halle a. S. . . — 353

Zur Theorie der Charakteristiken. Von Herrn *Schubert*. . . . . — 366

Ueber den *Feuerbach*schen Satz für das ebene Dreieck. Von Herrn *J. Lappe* in Neu-Dietendorf bei Gotha. . . . . — 387

Berichtigung zu Band 70, S. 116.

Die Gleichungen Zeile 13 und 14 v. o. müssen heissen:

$$\frac{d}{dt}\log\frac{du'}{dt} = \frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt} - 2\,\frac{C_3}{C_3u+C_4}\cdot\frac{du}{dt},$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\log\frac{du'}{dt} = \frac{d^2}{dt^2}\log\frac{du}{dt} + 2\,\frac{C_3^2}{(C_3u+C_4)^2}\cdot\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2\,\frac{C_3}{C_3u+C_4}\cdot\frac{d^2u}{dt^2}.$$

Zur Theorie der Erzeugung geometrischer Curven.

(Von Herrn *A. Olivier* in Schaffhausen.)

Ist in einer Ebene eine Curve K_1 der n^{ten} Ordnung gegeben, und nimmt man auf derselben einen beliebigen festen Punkt P zum Mittelpunkte eines Strahlenbüschels, so kann auf dieser Curve auf unzählig viele verschiedene Arten die Basis eines Curvenbüschels der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung festgelegt werden, welches zum Strahlenbüschel P projectivisch ist und mit ihm durch den Durchschnitt der entsprechenden Elemente die gegebene Curve K_1 der n^{ten} Ordnung erzeugt. Hierbei ist nun die Beantwortung der Frage von Interesse: „Welchem allgemeinen Gesetze die Basen der unzählig vielen zum Strahlenbüschel P projectivischen Curvenbüschel der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung unterworfen sind?“ —

Ganz entsprechend kann auf einer Curve der n^{ten} Ordnung die Basis eines Kegelschnittbüschels willkürlich angenommen und nach dem Gesetz gefragt werden, dem die Basen der unzählig vielen projectivischen Curvenbüschel der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung unterworfen sind.

Die Beantwortung dieser beiden Fragen bildet den eigentlichen Gegenstand dieser Abhandlung; zugleich werden aber aus den folgenden Untersuchungen einige merkwürdige allgemeine Eigenschaften der Curven hervorgehen.

I.

a) Die gegebene Curve K_1 der n^{ten} Ordnung sei durch die $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte

$$b_1^1 b_2^1 \ldots b_p^1; \quad a_1 a_2 \ldots a_{2n-1}; \quad P$$

bestimmt, wobei p den Werth

$$p = \tfrac{1}{2}n(n-1)$$

besitzt. Ich nehme nun den willkürlichen Punkt P auf K_1 zum Mittelpunkte eines Strahlenbüschels, und bezeichne mit $(T_1 T_2)_1$ irgend eines von den unzählig vielen Curvenbüscheln der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, welches mit dem Strahlenbüschel P projectivisch ist und mit ihm durch den Durchschnitt entsprechender Elemente die Curve K_1 erzeugt. Um dieses eine Curvenbüschel $(T_1 T_2)_1$ genauer

festzustellen, dürfen von den $\frac{1}{2}n(n+3)$ gegebenen Punkten der Curve K_1

$$p = \tfrac{1}{2}n(n-1)$$

willkürlich als Basispunkte dieses Curvenbüschels ausgewählt werden; ich nehme hierzu die Punkte

$$b_1^1 b_2^1 \ldots b_p^1$$

und nenne sie die *Grundpunkte* des Curvenbüschels $(T_1 T_2)_1$.

Die übrigen

$$(n-1)^2 - p = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) = s$$

Basispunkte des Curvenbüschels $(T_1 T_2)_1$ sind alsdann als unbekannte Punkte der Curve K_1 aufzufassen und müssen durch die Bedingung ermittelt werden: dass das Curvenbüschel $(T_1 T_2)_1$ zum Strahlenbüschel projectivisch sein soll.

Ich bezeichne diese

$$s = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

unbekannten Basispunkte des Curvenbüschels $(T_1 T_2)_1$ mit

$$y_1^1 y_2^1 \ldots y_{n-2}^1 \,\|\, y_{n-1}^1 \ldots y_s^1$$

und nenne sie zusammen den *Basisrest* des Büschels. Der Doppelstrich trennt hierbei die eigentlich unbekannten Basispunkte des Curvenbüschels von den sogenannten nothwendigen Punkten desselben, welche mit jenen von selbst bestimmt sind.

Um nun die unbekannten Basispunkte

$$y_1^1 y_2^1 \ldots y_{n-2}^1 \,\|\, y_{n-1}^1 \ldots y_s^1$$

des Curvenbüschels $(T_1 T_2)_1$ zu finden, ist das anharmonische Verhältniss des Curvenbüschels

$$(b_1^1 b_2^1 \ldots b_p^1 y_1^1 y_2^1 \ldots y_{n-2}^1 \,\|\, y_{n-1}^1 \ldots y_s^1)\,[a_1 a_2 \ldots a_{2n-1}]$$

gleich zu machen dem anharmonischen Verhältnisse des Strahlenbüschels

$$P\,[a_1 a_2 \ldots a_{2n-1}];$$

dadurch werden die beiden Gebilde projectivisch:

$$P\,[a_1 a_2 \ldots a_{2n-1}] \,\overline{\wedge}\, (b_1^1 b_2^1 \ldots b_p^1 y_1^1 y_2^1 \ldots y_{n-2}^1 \,\|\, y_{n-1}^1 \ldots y_s^1)\,[a_1 a_2 \ldots a_{2n-1}]$$

und erzeugen durch den Durchschnitt ihrer entsprechenden Elemente die gegebene Curve K_1.

b) Durch den gegebenen Punkt P auf K_1 lege ich nun eine beliebige Hülfscurve K_2, ebenfalls von der n^{ten} Ordnung; dieselbe trifft K_1 ausser im Punkte P noch in den (n^2-1) Punkten

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n^2-1}.$$

Auf dieser Curve K_2 nehme ich ferner die

$$p = \tfrac{1}{2}n(n-1)$$

beliebigen Punkte

$$b_1^2\, b_2^2 \ldots b_p^2$$

als Grundpunkte eines Curvenbüschels $(T_1T_2)_2$ der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung an, welches wieder mit demselben Strahlenbüschel P projectivisch ist und mit ihm in ähnlicher Weise durch den Durchschnitt entsprechender Elemente die Curve K_2 erzeugt, wie vorhin das Curvenbüschel $(T_1T_2)_1$ mit P die Curve K_1.

Aus der gleichzeitigen Projectivität der beiden Curvenbüschel $(T_1T_2)_1$ und $(T_1T_2)_2$ mit demselben Strahlenbüschel P folgt nun nothwendig auch die Projectivität der beiden Curvenbüschel $(T_1T_2)_1$ und $(T_1T_2)_2$ unter sich; welche daher durch den Durchschnitt ihrer entsprechenden Elemente eine gewisse Curve Σ der $(2n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung erzeugen werden.

Diese Curve Σ geht durch die (n^2-1) Schnittpunkte

$$\varepsilon_1\, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n^2-1}$$

von K_1 und K_2 (ausser P); ferner durch die Grundpunkte

$$b_1^1 b_2^1 \ldots b_p^1; \quad b_1^2 b_2^2 \ldots b_p^2$$

der beiden Curvenbüschel $(T_1T_2)_1$ und $(T_1T_2)_2$. Die Zahl dieser Punkte beträgt zusammen

$$n^2-1+2p = 2n^2-n+1 = \tfrac{1}{2}(\overline{2n-2})(\overline{2n-2}+3),$$

also gerade so viel, als zur Bestimmung der Curve Σ der $(2n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung erforderlich sind. Nun wird aber die Curve Σ der $(2n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche durch die Punkte

$$\varepsilon_1\, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n^2-1}; \quad b_1^1\, b_2^1 \ldots b_p^1; \quad b_1^2\, b_2^2 \ldots b_p^2$$

vollkommen bestimmt ist, nicht nur durch die Grundpunkte

$$\begin{matrix} b_1^1 & b_2^1 & \ldots & b_p^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & \ldots & b_p^2 \end{matrix}$$

der beiden Curvenbüschel $(T_1T_2)_1$ und $(T_1T_2)_2$, sondern durch alle Basispunkte derselben gehen, also insbesondere auch durch die Basisreste

$$\begin{matrix} y_1^1\, y_2^1 \cdots y_{n-2}^1 & \| & y_{n-1}^1 \cdots y_s^1 \\ y_1^2\, y_2^2 \cdots y_{n-2}^2 & \| & y_{n-2}^2 \cdots y_s^2, \end{matrix}$$

von denen der erste auf K_1 und der zweite auf K_2 liegt. Da es nun aber für ein Curvenbüschel $(T_1T_2)_1$ der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung bei gegebenen Grundpunkten nicht nur einen einzigen Basisrest zu geben braucht, d. h. da das

Problem der Curvenerzeugung durch ein Strahlenbüschel und projectivisches Curvenbüschel der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung nicht blos eine, sondern vielleicht mehrere Auflösungen besitzt, so darf ich behaupten: *Die Curve Σ wird durch alle Basisreste derjenigen Curvenbüschel der $(n-1)^{ten}$ Ordnung gehen müssen, welche bei gegebenen Grundpunkten mit einem Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt ebenfalls ein gegebener Punkt ist, projectivisch sind und die Curve K_1 erzeugen.*

Umgekehrt wird nun aber auch aus der Zahl der weiteren Schnittpunkte der Curve Σ mit K_1 auf die Anzahl Auflösungen des Fundamentalproblems:

Das anharmonische Verhältniss des Curvenbüschels

$$(b_1^1 b_2^1 \dots b_p^1 y_1^1 y_2^1 \dots y_{n-2}^1 \,||\, y_{n-1}^1 \dots y_s^1)[a_1 a_2 \dots a_{2n-1}]$$

gleich zu machen dem anharmonischen Verhältnisse des Strahlenbüschels

$$P[a_1 a_2 \dots a_{2n-1}]$$

geschlossen werden können.

Nun schneidet die Curve Σ der $(2n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung die Curve K_1 der n^{ten} Ordnung ausser in den Punkten

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n^2-1}; \quad b_1^1 b_2^1 \dots b_p^1$$

nur noch in

$$n(2n-2)-(n^2-1)-\tfrac{1}{2}n(n-1) = \tfrac{1}{2}(n^2-3n+2) = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) = s$$

Punkten, also genau in so vielen, als der Basisrest des Curvenbüschels $(T_1 T_2)_1$ Punkte enthält. *Deshalb kann es auch nur eine einzige Auflösung des Fundamentalproblems geben;* oder es gilt der Satz:

Nimmt man von den $\frac{1}{2}n(n+3)$ gegebenen Punkten einer Curve K_1 der n^{ten} Ordnung einen Punkt P als Mittelpunkt eines Strahlenbüschels u,

$$p = \tfrac{1}{2}n(n-1)$$

andere beliebige Punkte als Grundpunkte eines zu P projectivischen Curvenbüschels der $(n-1)^{ten}$ Ordnung, so besitzt die Aufgabe: das anharmonische Verhältniss des Curvenbüschels

$$(b_1^1 b_2^1 \dots b_p^1 y_1^1 y_2^1 \dots y_{n-2}^1 \,||\, y_{n-1}^1 \dots y_s^1)[a_1 a_2 \dots a_{2n-1}]$$

gleich zu machen dem anharmonischen Verhältnisse des Strahlenbüschels

$$P[a_1 a_2 \dots a_{2n-1}],$$

woraus die Erzeugung der gegebenen Curve hervorgeht, nur eine einzige Auflösung.

c) In der vorhergehenden Untersuchung bin ich zu dem Resultate gelangt, dass die Erzeugung einer Curve der n^{ten} Ordnung durch ein Strahlenbüschel und ein projectivisches Curvenbüschel der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung in dem Falle nur eine einzige Lösung zulässt, wenn der Mittelpunkt des Strahlenbüschels als ein bekannter Punkt aufgefasst wird. Zugleich ist aber jetzt auch das allgemeine Gesetz erkennbar geworden, dem die Basen der unzählig vielen Curvenbüschel der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung unterworfen sind, die mit einem Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt der feste Punkt P ist, projectivisch sind und mit ihm die Curve K_1 der n^{ten} Ordnung erzeugen.

Um nämlich irgend eine Basis eines solchen Curvenbüschels $(T_1 T_2)$ zu erhalten:

lege ich durch den gegebenen Punkt P auf K_1 eine beliebige zweite Curve K_2 der n^{ten} Ordnung und durch die (n^2-1) Schnittpunkte

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n^2-1}$$

(ausser P) von K_1 und K_2 eine beliebige Curve Σ der $(2n-2)^{ten}$ Ordnung. Diese Curve Σ trifft die Curve K_1 ausser in den (n^2-1) Schnittpunkten

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n^2-1}$$

von K_1 und K_2 noch in

$$n(2n-2)-(n^2-1) = (n-1)^2$$

weiteren Punkten, welche zu Basispunkten eines solchen Curvenbüschels $(T_1 T_2)$ der $(n-1)^{ten}$ Ordnung genommen werden dürfen.

Wenn aber ausser dem Mittelpunkte P auf K_1 noch

$$p = \tfrac{1}{2} n(n-1)$$

andere feste Punkte

$$b_1^1 b_2^1 \ldots b_p^1$$

gegeben sind, durch welche die Curve Σ gehen soll, so wird Σ die Curve K_1 in noch

$$s = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

weiteren Punkten

$$y_1^1 y_2^1 \ldots y_{n-2}^1 \,\|\, y_{n-1}^1 \ldots y_s^1$$

treffen, nämlich in dem Basisrest eines ganz bestimmten Curvenbüschels $(T_1 T_2)_1$ oder

$$(b_1^1 b_2^1 \ldots b_p^1 y_1^1 y_2^1 \ldots y_{n-2}^1 \,\|\, y_{n-1}^1 \ldots y_s^1)$$

der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, das mit dem Strahlenbüschel in P projectivisch ist und mit ihm die Curve K_1 erzeugt. Da nun die Punkte

$$y_1^1 y_2^1 \ldots y_{n-2}^1 \,\|\, y_{n-1}^1 \ldots y_s^1$$

immer wieder hervorgehen müssen, unabhängig von der speziellen Wahl der Hülfscurven K_2 und Σ, wenn nur Σ durch die festen Punkte

$$b_1^1 b_2^1 \ldots b_p^1$$

gelegt wird, so entspringt daraus der folgende Satz:

Legt man durch einen Punkt P auf einer Curve K_1 der n^{ten} Ordnung beliebige Curven

$$K_2, \quad K_3, \quad \ldots,$$

ebenfalls von der n^{ten} Ordnung, und durch die (n^2-1) Schnittpunkte von jeder dieser Curven mit K_1 (ausser P) beliebige weitere Curven

$$\Sigma_1, \quad \Sigma_2, \quad \Sigma_3, \quad \ldots,$$

der $(2n-2)^{ten}$ Ordnung, die sich in denselben

$$p = \tfrac{1}{2}n(n-1)$$

Punkten

$$b_1^1 b_2^1 \ldots b_p^1$$

auf K_1 treffen sollen, so treffen sich alle diese Curven

$$\Sigma_1, \quad \Sigma_2, \quad \Sigma_3, \quad \ldots$$

in noch weiteren

$$s = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

Punkten

$$y_1^1 y_2^1 \ldots y_{n-2}^1 \,\|\, y_{n-1}^1 \ldots y_s^1$$

auf der Curve K_1; diese Punkte bilden nämlich den Basisrest eines Curvenbüschels $(T_1 T_2)_1$ oder

$$(b_1 b_2 \ldots b_p y_1 y_2 \ldots y_{n-2} \,\|\, y_{n-1} \ldots y_s)$$

der $(n-1)^{ten}$ Ordnung, das projectivisch ist mit einem Strahlenbüschel in P und mit demselben die Curve K_1 erzeugt.

d) Die Resultate der bisherigen Untersuchung, insbesondere der letzte Satz, führen noch zu vielen weiteren Folgerungen, von denen ich hier nur noch die folgenden hervorheben will.

Es seien K_1, K_2, K_3 drei durch einen Punkt P gehende Curven der n^{ten} Ordnung, die sich paarweise noch in (n^2-1) weiteren Punkten treffen werden, nämlich K_2 und K_3 in den Punkten

$$\varepsilon_1^1 \varepsilon_2^1 \ldots \varepsilon_{n^2-1}^1,$$

K_1 und K_3 in den Punkten

$$\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \ldots \varepsilon_{n^2-1}^2$$

und endlich K_1 und K_2 in den Punkten

$$\varepsilon_1^3 \varepsilon_2^3 \ldots \varepsilon_{n^2-1}^3.$$

Auf K_1 nehme ich nun noch die

$$p = \tfrac{1}{2}n(n-1)$$

willkürlichen Punkte

$$b_1^1\, b_2^1 \ldots b_p^1,$$

entsprechend auf K_2 die Punkte

$$b_1^2\, b_2^2 \ldots b_p^2$$

und endlich auf K_3 die Punkte

$$b_1^3\, b_2^3 \ldots b_p^3.$$

Alsdann bestimmen die Punkte

$$\varepsilon_1^1 \varepsilon_2^1 \ldots \varepsilon_{n^2-1}^1;\quad b_1^2 b_2^2 \ldots b_p^2;\quad b_1^3 b_2^3 \ldots b_p^3$$

eine Curve Σ_1 der $(2n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung; desgleichen bestimmen die Punkte

$$\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \ldots \varepsilon_{n^2-1}^2;\quad b_1^1 b_2^1 \ldots b_p^1;\quad b_1^3 b_2^3 \ldots b_p^3$$

eine Curve Σ_2 und die Punkte

$$\varepsilon_1^3 \varepsilon_2^3 \ldots \varepsilon_{n^2-1}^3;\quad b_1^1 b_2^1 \ldots b_p^1;\quad b_1^2 b_2^2 \ldots b_p^2$$

eine Curve Σ_3, beide ebenfalls von der $(2n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung.

Nach dem vorhergehenden Satze in *c*) schneiden sich nun Σ_2 und Σ_3 in noch

$$s = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

weiteren Punkten

$$y_1^1\, y_2^1 \ldots y_s^1$$

auf K_1; ebenso Σ_1 und Σ_3 noch in den Punkten

$$y_1^2\, y_2^2 \ldots y_s^2$$

auf K_2 und endlich Σ_1 und Σ_2 noch in den Punkten

$$y_1^3\, y_2^3 \ldots y_s^3$$

auf K_3. Nun betrachte ich einmal das durch die beiden Curven K_2 und K_3 festgestellte Curvenbüschel $(K_2 K_3)$ der n^{ten} und das durch die beiden Curvenbüschel Σ_2 und Σ_3 festgestellte Curvenbüschel $(\Sigma_2 \Sigma_3)$ der $(2n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung. Eine kleine Ueberlegung lehrt alsdann, dass diese beiden Curvenbüschel $(K_2 K_3)$ und $(\Sigma_2 \Sigma_3)$ als Zeugungsbüschel des durch die beiden anderen Curven K_1 und Σ_1 dargestellten zusammengesetzten Ortes $(K_1 + \Sigma_1)$ der $(3n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung auftreten; d. h. die beiden Curvenbüschel $(K_2 K_3)$ und $(\Sigma_2 \Sigma_3)$ sind projectivisch, und ihr Erzeugniss ist der zusammengesetzte Ort $(K_1 + \Sigma_1)$.

In der That, die Basis des Curvenbüschels $(K_2 K_3)$ besteht aus den Punkten

$$P\, \varepsilon_1^1\, \varepsilon_2^1 \ldots \varepsilon_{n^2-1}^1$$

und die Basis des Curvenbüschels $(\Sigma_2 \Sigma_3)$ einerseits aus den Punkten

$$b_1^1\, b_2^1 \ldots b_p^1\, y_1^1\, y_2^1 \ldots y_s^1$$

und andererseits noch aus

$$(2n-2)^2 - \tfrac{1}{2}n(n-1) - \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) = 3(n-1)^2 = r$$

in der Ebene liegenden Punkten

$$\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_r .$$

Nun fallen von dem Curvenbüschel $(K_2 K_3)$ der Punkt P auf K_1 und die übrigen Punkte

$$\varepsilon_1^1 \varepsilon_2^1 \ldots \varepsilon_{n^2-1}^1$$

auf Σ_1; ebenso fallen vom Curvenbüschel $(\Sigma_2 \Sigma_3)$ die Punkte

$$b_1^1 b_2^1 \ldots b_p^1 y_1^1 y_2^1 \ldots y_s^1$$

auf K_1; endlich schneiden sich aber auch noch die entsprechenden Curven K_2 und Σ_2, K_3 und Σ_3 auf dem zusammengesetzten Ort $(K_1 + \Sigma_1)$. Dieses zusammen ist aber hinreichend, um die Richtigkeit der obigen Behauptung zu erweisen, und ich kann also in der That die beiden Curvenbüschel $(K_2 K_3)$ und $(\Sigma_2 \Sigma_3)$ als projectivisch und den zusammengesetzten Ort $(K_1 + \Sigma_1)$ als ihr Erzeugniss auffassen.

Die nothwendige Folge davon ist nun, dass die übrigen

$$r = 3(n-1)^2$$

Basispunkte

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r$$

des Curvenbüschels $(\Sigma_2 \Sigma_3)$ auch noch auf den erzeugten Ort $(K_1 + \Sigma_1)$, oder wie es hier nicht anders sein kann, auf Σ_1 fallen müssen. Mit anderen Worten: die drei Curven

$$\Sigma_1, \quad \Sigma_2, \quad \Sigma_3$$

gehen durch dieselben

$$r = 3(n-1)^2$$

Punkte

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r$$

der Ebene.

Aus dieser Darstellung entspringt folgende merkwürdige allgemeine Eigenschaft der geometrischen Curven:

Schneiden sich in einer Ebene drei Curven

$$K_1, \quad K_2, \quad K_3$$

der n^{ten} Ordnung in demselben Punkte P, und ausserdem K_2 und K_3 noch in den Punkten

$$\varepsilon_1^1 \varepsilon_2^1 \ldots \varepsilon_{n^2-1}^1,$$

K_1 und K_3 in den Punkten

$$\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \ldots \varepsilon_{n^2-1}^2,$$

endlich K_1 und K_2 in den Punkten

$$\varepsilon_1^3\,\varepsilon_2^3 \ldots \varepsilon_{n^2-1}^3,$$

und nimmt man auf K_1 die beliebigen

$$p = \tfrac{1}{2}n(n-1)$$

Punkte

$$b_1^1\,b_2^1 \ldots b_p^1,$$

auf K_2 die beliebigen p Punkte

$$b_1^2\,b_2^2 \ldots b_p^2$$

und endlich auf K_3 die beliebigen p Punkte

$$b_1^3\,b_2^3 \ldots b_p^3,$$

so treffen sich die drei Curven

$$\Sigma_1, \quad \Sigma_2, \quad \Sigma_3$$

der $(2n-2)^{ten}$ Ordnung, welche bezüglich durch die Punktsysteme

$$\begin{array}{lll} \varepsilon_1^1\varepsilon_2^1 \ldots \varepsilon_{n^2-1}^1; & b_1^2 b_2^2 \ldots b_p^2; & b_1^3 b_2^3 \ldots b_p^3 \\ \varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 \ldots \varepsilon_{n^2-1}^2; & b_1^1 b_2^1 \ldots b_p^1; & b_1^3 b_2^3 \ldots b_p^3 \\ \varepsilon_1^3\varepsilon_2^3 \ldots \varepsilon_{n^2-1}^3; & b_1^1 b_2^1 \ldots b_p^1; & b_1^2 b_2^2 \ldots b_p^2 \end{array}$$

bestimmt werden, paarweise noch in

$$s = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

weiteren Punkten, die beziehungsweise auf die Curven K_1, K_2, K_3 zu liegen kommen. Es treffen sich nämlich Σ_2 und Σ_3 in den Punkten

$$y_1^1\,y_2^1 \ldots y_s^1$$

auf K_1; Σ_1 und Σ_3 in den Punkten

$$y_1^2\,y_2^2 \ldots y_s^2$$

auf K_2, und endlich Σ_1 und Σ_2 in den Punkten

$$y_1^3\,y_2^3 \ldots y_s^3$$

auf K_3. Zugleich gehen aber auch noch alle drei Curven

$$\Sigma_1, \quad \Sigma_2, \quad \Sigma_3$$

durch dieselben

$$r = 3(n-1)^2$$

Punkte

$$\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_r$$

der Ebene.

Daraus folgt z. B. für $n = 2$:

Schneiden sich drei Kegelschnitte

$$K_1, \quad K_2, \quad K_3$$

ausser im Punkte P paarweise noch in den Punkten

$$\begin{matrix} \varepsilon_1^1 & \varepsilon_2^1 & \varepsilon_3^1 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 \\ \varepsilon_1^3 & \varepsilon_2^3 & \varepsilon_3^3, \end{matrix}$$

und nimmt man auf K_1 einen Punkt b_1^1, auf K_2 einen Punkt b_1^2, endlich auf K_3 einen Punkt b_1^3 beliebig an, so gehen die drei Kegelschnitte

$$\Sigma_1, \quad \Sigma_2, \quad \Sigma_3,$$

welche bezüglich durch die Punktsysteme

$$\begin{matrix} \varepsilon_1^1 & \varepsilon_2^1 & \varepsilon_3^1; & b_1^2; & b_1^3 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2; & b_1^1; & b_1^3 \\ \varepsilon_1^3 & \varepsilon_2^3 & \varepsilon_3^3; & b_1^1; & b_1^2 \end{matrix}$$

bestimmt werden, durch dieselben drei Punkte

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3$$

der Ebene.

Aehnliche Sätze folgen aus dem allgemeinen Theorem für die Curven der dritten, vierten Ordnung u. s. w.

II.

e) Eine entsprechende Untersuchung wie in I. lässt sich durchführen, indem man auf einer gegebenen Curve K_1 der n^{ten} Ordnung vier beliebige Punkte

$$P_1, \quad P_2, \quad P_3, \quad P_4$$

als Basis eines Kegelschnittbüschels $(S_1 S_2)$ annimmt. Alsdann giebt es unzählig viele Curvenbüschel $(T_1 T_2)$ der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche mit jenem Kegelschnittbüschel projectivisch sind und mit ihm durch den Durchschnitt der entsprechenden Elemente die gegebene Curve K_1 erzeugen. Da nun die Methode, nach welcher die Untersuchung zu führen ist, vollkommen mit der in I. übereinstimmt, so werde ich mich in der Folge auf die Angabe der Resultate beschränken.

Die Curve K_1 sei wieder durch die $\frac{1}{2} n(n+3)$ Punkte

$$b_1 b_2 \ldots b_p; \quad a_1 a_2 \ldots a_{4n-7}; \quad P_1 P_2 P_3 P_4$$

gegeben, wobei jetzt

$$p = \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)$$

ist. Das Problem der Curvenerzeugung durch ein Kegelschnittbüschel und projectivisches Curvenbüschel der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung kommt alsdann auf die Aufgabe zurück:

Das anharmonische Verhältniss des Curvenbüschels

$$(b_1^1 b_2^1 \ldots b_p^1 y_1^1 y_2^1 \ldots y_{2n-5}^1 \parallel y_{2n-4}^1 \ldots y_s^1)\,[a_1 a_2 \ldots a_{4n-7}]$$

gleich zu machen dem anharmonischen Verhältnisse des Kegelschnittbüschels

$$(P_1 P_2 P_3 P_4)\,[a_1 a_2 \ldots a_{4n-7}].$$

Durch Anwendung einer Hülfscurve K_2 der n^{ten} Ordnung, gelegt durch die vier Punkte

$$P_1 P_2 P_3 P_4,$$

und einer zweiten Hülfscurve Σ der $(2n-4)^{\text{ten}}$ Ordnung, gelegt durch die weiteren Schnittpunkte

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n^2-4}$$

von K_1 und K_2 und durch die Grundpunkte

$$b_1^1 b_2^1 \ldots b_p^1; \quad b_1^2 b_2^2 \ldots b_p^2$$

auf diesen Curven, ergiebt sich dann der Satz:

Nimmt man von den $\frac{1}{2}n(n+3)$ gegebenen Punkten einer Curve der n^{ten} Ordnung die vier Punkte

$$P_1 P_2 P_3 P_4$$

zu Basispunkten eines Kegelschnittbüschels $(S_1 S_2)$ und

$$p = \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)$$

andere beliebige Punkte als Grundpunkte eines zum Kegelschnittbüschel projectivischen Curvenbüschels $(T_1 T_2)$ der $(n-2)^{ten}$ Ordnung, so besitzt die Aufgabe: Das anharmonische Verhältniss des Curvenbüschels

$$(b_1^1 b_2^1 \ldots b_p^1 y_1^1 y_2^1 \ldots y_{2n-5}^1 \,\|\, y_{2n-4}^1 \ldots y_\varkappa^1)\,[a_1 a_2 \ldots a_{4n-7}]$$

gleich zu machen dem anharmonischen Verhältnisse des Kegelschnittbüschels

$$(P_1 P_2 P_3 P_4)\,[a_1 a_2 \ldots a_{4n-7}],$$

nur eine einzige Lösung.

Ferner ist das Gesetz, dem die Basen der unzählig vielen Curvenbüschel $(T_1 T_2)$ der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung unterworfen sind, die mit dem festen Kegelschnittbüschel $(S_1 S_2)$ projectivisch sind und mit ihm die Curve K_1 erzeugen, in dem folgenden Satz enthalten:

Legt man durch die vier Basispunkte

$$P_1 P_2 P_3 P_4$$

eines Kegelschnittbüschels $(S_1 S_2)$, welche auf einer Curve K_1 der n^{ten} Ordnung liegen, eine beliebige Curve K_2 der n^{ten} Ordnung und durch die weiteren Schnittpunkte

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n^2-4}$$

dieser beiden Curven K_1 und K_2 eine Curve Σ der $(2n-4)^{ten}$ Ordnung, so trifft diese Curve Σ die Curve K_1 noch in

$$n(2n-4)-(n^2-4) = (n-2)^2$$

anderen Punkten, welche zu Basispunkten eines solchen Curvenbüschels $(T_1 T_2)$ *der* $(n-2)^{ten}$ *Ordnung genommen werden dürfen, das zum Kegelschnittbüschel* $(S_1 S_2)$ *projectivisch ist und mit ihm die Curve* K_1 *erzeugt.*

Endlich ergiebt sich noch aus der vollkommenen Willkürlichkeit der Hülfscurve K_2 und der darauf gewählten Grundpunkte der weitere Satz:

Legt man durch die vier festen Punkte

$$P_1\ P_2\ P_3\ P_4$$

auf einer Curve K_1 *der* n^{ten} *Ordnung beliebige Curven*

$$K_2,\quad K_3,\quad K_4,\quad \ldots,$$

ebenfalls von der n^{ten} *Ordnung, und durch die* (n^2-4) *Schnittpunkte von jeder dieser Curven mit* K_1 *(ausser* P_1, P_2, P_3, P_4*) beliebige weitere Curven*

$$\Sigma_1,\quad \Sigma_2,\quad \Sigma_3,\quad \ldots$$

der $(2n-4)^{ten}$ *Ordnung, die sich in denselben*

$$p = \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)$$

Punkten

$$b_1^1\, b_2^1 \ldots b_p^1$$

auf K_1 *treffen sollen, so treffen sich alle diese Curven*

$$\Sigma_1,\quad \Sigma_2,\quad \Sigma_3,\quad \ldots$$

in noch weiteren

$$s = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

Punkten

$$y_1^1\, y_2^1 \ldots y_{2n-5}^1 \parallel y_{2n-4}^1 \ldots y_s^1$$

auf der Curve K_1*, die nämlich den Basisrest eines ganz bestimmten Curvenbüschels* $(T_1 T_2)_1$ *oder*

$$(b_1^1 b_2^1 \ldots b_p^1\, y_1^1 y_2^1 \ldots y_{2n-5}^1 \parallel y_{2n-4}^1 \ldots y_s^1)$$

der $(n-2)^{ten}$ *Ordnung darstellen, das projectivisch ist mit dem Kegelschnittbüschel* $(S_1 S_2)$ *oder*

$$(P_1 P_2 P_3 P_4)$$

und mit ihm die Curve K_1 *durch den Durchschnitt der entsprechenden Elemente erzeugt.*

f) Von den vielen Folgerungen, die aus diesen Sätzen, insbesondere aus dem letzten Satz, gezogen werden können, will ich auch hier nur derjenigen gedenken, die sich auf drei durch dieselben vier Punkte der Ebene gehende Curven

$$K_1,\quad K_2,\quad K_3,\quad \ldots$$

der n^{ten} Ordnung beziehen.

Von den drei Curven K_1, K_2, K_3 treffen sich K_2 und K_3 in noch (n^2-4) weiteren Punkten

$$\varepsilon_1^1\ \varepsilon_2^1 \ldots \varepsilon_{n^2-4}^1,$$

ebenso K_1 und K_3 in den Punkten

$$\varepsilon_1^2\ \varepsilon_2^2 \ldots \varepsilon_{n^2-4}^2$$

und endlich K_1 und K_2 in den Punkten

$$\varepsilon_1^3\ \varepsilon_2^3 \ldots \varepsilon_{n^2-4}^3.$$

Auf jeder dieser drei Curven

$$K_1, \quad K_2, \quad K_3$$

nehme ich alsdann noch

$$p = \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)$$

willkürliche Punkte an, welche bezüglich

$$b_1^1\ b_2^1 \ldots b_p^1$$
$$b_1^2\ b_2^2 \ldots b_p^2$$
$$b_1^3\ b_2^3 \ldots b_p^3$$

heissen sollen, so dass durch die drei Punktsysteme

$$\varepsilon_1^1\ \varepsilon_2^1 \ldots \varepsilon_{n^2-4}^1;\quad b_1^2\ b_2^2 \ldots b_p^2;\quad b_1^3\ b_2^3 \ldots b_p^3$$
$$\varepsilon_1^2\ \varepsilon_2^2 \ldots \varepsilon_{n^2-4}^2;\quad b_1^1\ b_2^1 \ldots b_p^1;\quad b_1^3\ b_2^3 \ldots b_p^3$$
$$\varepsilon_1^3\ \varepsilon_2^3 \ldots \varepsilon_{n^2-4}^3;\quad b_1^1\ b_2^1 \ldots b_p^1;\quad b_1^2\ b_2^2 \ldots b_p^2$$

die drei Curven

$$\Sigma_1, \quad \Sigma_2, \quad \Sigma_3$$

der $(2n-4)^{\text{ten}}$ Ordnung bestimmt werden. Diese drei Curven schneiden sich paarweise (Σ_2 und Σ_3; Σ_1 und Σ_3; Σ_1 und Σ_2) in den

$$s = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

Punkten

$$y_1^1\ y_2^1 \ldots y_s^1$$
$$y_1^2\ y_2^2 \ldots y_s^2$$
$$y_1^3\ y_2^3 \ldots y_s^3,$$

die bezüglich auf die drei Curven

$$K_1, \quad K_2, \quad K_3$$

fallen. Ausserdem gehen diese drei Curven

$$\Sigma_1, \quad \Sigma_2, \quad \Sigma_3$$

auch noch durch dieselben

$$r = 3(n-2)^2$$

Punkte

$$\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_p$$

der Ebene.

Dies giebt zusammengefasst folgendes Theorem:

Schneiden sich in einer Ebene drei Curven

$$K_1, \quad K_2, \quad K_3$$

der n^{ten} Ordnung in denselben vier Punkten

$$P_1, \quad P_2, \quad P_3, \quad P_4,$$

so treffen sich K_2 und K_3 noch in den Punkten

$$\varepsilon_1^1 \, \varepsilon_2^1 \ldots \varepsilon_{n^2-4}^1,$$

K_1 und K_3 noch in den Punkten

$$\varepsilon_1^2 \, \varepsilon_2^2 \ldots \varepsilon_{n^2-4}^2,$$

endlich K_1 und K_2 in den Punkten

$$\varepsilon_1^3 \, \varepsilon_2^3 \ldots \varepsilon_{n^2-4}^3.$$

Nimmt man nun auf K_1 die beliebigen

$$p = \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)$$

Punkte

$$b_1^1 \, b_2^1 \ldots b_p^1,$$

auf K_2 die Punkte

$$b_1^2 \, b_2^2 \ldots b_p^2$$

und auf K_3 die Punkte

$$b_1^3 \, b_2^3 \ldots b_p^3,$$

so treffen sich die drei Curven

$$\Sigma_1, \quad \Sigma_2, \quad \Sigma_3$$

der $(2n-4)^{ten}$ Ordnung, welche bezüglich durch die Punktsysteme

$$\begin{array}{lll} \varepsilon_1^1 \, \varepsilon_2^1 \ldots \varepsilon_{n^2-4}^1; & b_1^2 \, b_2^2 \ldots b_p^2; & b_1^3 \, b_2^3 \ldots b_p^3 \\ \varepsilon_1^2 \, \varepsilon_2^2 \ldots \varepsilon_{n^2-4}^2; & b_1^1 \, b_2^1 \ldots b_p^1; & b_1^3 \, b_2^3 \ldots b_p^3 \\ \varepsilon_1^3 \, \varepsilon_2^3 \ldots \varepsilon_{n^2-4}^3; & b_1^1 \, b_2^1 \ldots b_p^1; & b_1^2 \, b_2^2 \ldots b_p^2 \end{array}$$

bestimmt werden, in denselben

$$r = 3(n-2)^2$$

Punkten

$$\alpha_1 \; \alpha_2 \ldots \alpha_r$$

der Ebene. Ausserdem schneiden sich auch die drei Curven

$$\Sigma_1, \quad \Sigma_2, \quad \Sigma_3$$

paarweise noch in

$$s = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

weiteren Punkten, die bezüglich auf die drei Curven

$$K_1, \quad K_2, \quad K_3$$

zu liegen kommen. Es schneiden sich nämlich Σ_2 und Σ_3 in den Punkten

$$y_1^1 \; y_2^1 \ldots y_s^1$$

auf K_1; Σ_1 *und* Σ_3 *in den Punkten*

$$y_1^2 \; y_2^2 \; \ldots \; y_s^2$$

auf K_2 *und endlich* Σ_1 *und* Σ_2 *in den Punkten*

$$y_1^3 \; y_2^3 \; \ldots \; y_s^3$$

auf K_3.

Daraus folgt z. B. für $n = 3$:

Schneiden sich drei Curven K_1, K_2, K_3 *der dritten Ordnung in denselben vier Punkten*

$$P_1 \; P_2 \; P_3 \; P_4,$$

so schneiden sie sich paarweise noch in fünf Punkten

$$\begin{matrix} \varepsilon_1^1 & \varepsilon_2^1 & \varepsilon_3^1 & \varepsilon_4^1 & \varepsilon_5^1 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 & \varepsilon_4^2 & \varepsilon_5^2 \\ \varepsilon_1^3 & \varepsilon_2^3 & \varepsilon_3^3 & \varepsilon_4^3 & \varepsilon_5^3. \end{matrix}$$

Die dadurch bestimmten drei Kegelschnitte

$$\Sigma_1 \quad \Sigma_2 \quad \Sigma_3$$

schneiden sich alsdann in denselben drei Punkten

$$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$$

der Ebene, während ihre vierten Schnittpunkte bezüglich auf die drei Curven

$$K_1 \quad K_2 \quad K_3$$

der dritten Ordnung zu liegen kommen *).

Aehnliche Sätze für $n = 4, 5$ etc. sind in dem allgemeinen Theorem enthalten.

Es ist in dieser Abhandlung mehrfach von einem eigenthümlichen Princip Gebrauch gemacht worden, um bei den hier vorgekommenen speciellen Erzeugungen der Curven durch projectivische Gebilde die Zahl der Auflösungen zu bestimmen, welche dem jedesmaligen Problem zukommen. Dieses Princip ist aber noch einer Erweiterung fähig und kann alsdann ganz allgemein zur Bestimmung der Anzahl Auflösungen für jedes beliebige Problem der Curvenerzeugung verwendet werden. Ich hoffe bei einer späteren Gelegenheit auf diesen Gegenstand zurückkommen zu können.

---

*) In der Abhandlung: „*Ueber einige allgemeine Eigenschaften der geometrischen Curven*“ im 70. Bande dieses Journals erscheint dieser Satz (Seite 160) als ein specieller Fall einer anderen allgemeinen Eigenschaft der Curven.

Schaffhausen, im März 1869.

Ueber einen Satz von *Steiner*.

(Von Herrn *Eduard Weyr* in Prag.)

Im 32sten Bande, pag. 182 dieses Journals stellt *Steiner* folgenden Satz auf: „Eine Curve dritter Ordnung enthält im Allgemeinen 27 solche Punkte P, in deren jedem sie von einem Kegelschnitt sechspunktig berührt werden kann. Von diesen 27 Punkten sind 9 reell und 18 imaginär". Derselbe wurde von Herrn *Hesse* im 36sten Bande, pag. 173 analytisch erwiesen, was im Folgenden auf synthetische Weise geschehen soll.

Sei C^3 eine allgemeine Curve dritter Ordnung, die somit von der sechsten Klasse ist; auf derselben denke man sich vier feste Punkte 1, 2, 3, 4 und durch diese willkürliche Kegelschnitte gelegt. Jeder dieser Kegelschnitte schneidet C^3 noch in einem Punktepaar a, b; a_1, b_1 etc. Fasst man den ersten Kegelschnitt nebst der Geraden $\overline{a_1 b_1}$ (die immer reell sein muss, da, falls a_1 und b_1 imaginär werden, sie conjugirt imaginäre Punkte sind) als eine Curve dritter Ordnung auf, so hat dieselbe mit C^3 die bisher genannten acht Punkte gemein; dasselbe gilt bezüglich des von dem zweiten Kegelschnitt und der Linie $\overline{ab}$ gebildeten Ortes dritter Ordnung. Demzufolge haben die drei genannten cubischen Curven auch noch einen neunten Punkt gemeinschaftlich, d. h. die Linien $\overline{ab}$, $\overline{a_1 b_1}$ etc. gehen durch einen festen Punkt f*) von C^3, sie bilden eine Art von Punktinvolution auf derselben. Lässt man die vier Punkte 1, 2, 3, 4 in einen Punkt 1 von C^3 zusammenfallen, so geht das erwähnte Kegelschnittbüschel in die Gesammtheit jener Kegelschnitte über, welche in 1 mit C^3 eine vierpunktige Berührung eingehen, und der ausgesprochene Satz bleibt noch immer richtig. Was nun den Punkt f betrifft, so gelangt man zu demselben durch folgende Betrachtung. Fasst man die Punkte 1, 2, 3, 4 als vier unendlich nahe Punkte der Curve C^3 auf, so repräsentirt das System der beiden Geraden $\overline{12}$, $\overline{34}$ einen Kegelschnitt, welcher mit C^3 in 1 eine vierpunktige Berührung hat; schneidet $\overline{12}$ C^3 überdies in a, und hat $\overline{34}$ mit C^3

*) Siehe wegen dieses Satzes die Mittheilung des Herrn *Chasles* in den *Comptes rendus* der Pariser Akademie, Sitzung vom 30. Mai 1853, wo derselbe seine Erzeugung der Curven dritter Ordnung aufstellt.

noch den Punkt b gemein, so muss die Linie $\overline{ab}$ unsere Curve dritter Ordnung in dem Punkte f treffen. Berücksichtigt man, dass $\overline{12}$ und $\overline{34}$ mit der Tangente der C^3 im Punkte 1 identisch sind, dass daher a und b mit dem Tangentialpunkte von 1 (d. h. mit dem dritten Punkt, welchen die Tangente in 1 mit C^3 gemein hat) zusammenfallen, und somit $\overline{ab}$ die Tangente in diesem Tangentialpunkte ist, so folgt, dass f nichts anderes als der Tangentialpunkt des Tangentialpunktes von 1 ist. Nennt man denselben den zweiten Tangentialpunkt von 1, so hat man folgenden Satz: Legt man alle Kegelschnitte, welche mit C^3 in einem Punkte 1 eine vierpunktige Berührung eingehen, so schneiden dieselben C^3 in Punktepaaren $a, b;\ a_1, b_1$ etc., deren Verbindungslinien durch den zweiten Tangentialpunkt f von 1 gehen. Fordert man jenen Kegelschnitt, der in 1 mit C^3 einen fünfpunktigen Contact hat, so muss ein Punkt des zugehörigen Punktepaares nach 1 fallen, d. h. der Kegelschnitt muss durch den dritten Schnittpunkt von $\overline{1f}$ und C^3 gehen. Demgemäss ergiebt sich Folgendes: Berührt ein Kegelschnitt eine Curve dritter Ordnung fünfpunktig, so erhält man seinen weiteren Schnittpunkt mit der Curve, wenn man den dritten Schnittpunkt der Verbindungslinie des Berührungspunktes und seines zweiten Tangentialpunktes mit der Curve aufsucht. Soll nun unser Kegelschnitt mit C^3 in 1 eine sechspunktige Berührung haben, so muss auch dieser Schnittpunkt nach 1 fallen, d. h. die Linie $\overline{1f}$ muss mit der Tangente der Curve C^3 in 1 identisch sein, und somit f mit dem Tangentialpunkt von 1 zusammenfallen. Soll somit in einem Punkte 1 von C^3 an dieselbe ein sechspunktig tangirender Kegelschnitt gelegt werden können, so muss der erste Tangentialpunkt von 1 mit dem zweiten identisch sein, d. h. der Tangentialpunkt von 1 muss ein Inflexionspunkt sein. Demgemäss sind die Berührungspunkte der von jedem der neun Inflexionspunkte unserer Curve C^3 an sie gelegten Tangenten solche Punkte 1, oder mit anderen Worten, es sind die Schnittpunkte der harmonischen Polaren *) der Inflexionspunkte mit C^3. Dadurch aber ist der citirte Satz erwiesen, weil sich die gegenseitige Lage der so erhaltenen 27 Punkte nun genau so untersuchen lässt, wie dies Herr *Hesse* gethan hat.

*) Unter der harmonischen Polare eines Inflexionspunktes J verstehen wir den Ort seiner harmonischen Mittel bezüglich der Schnittpunktepaare aller durch J gelegten Geraden mit der Curve C^3.

Prag, 2. Mai 1869.

Ueber einige Sätze von *Steiner* und ihren Zusammenhang mit der zwei und zweigliedrigen Verwandtschaft der Grundgebilde ersten Grades.

(Von Herrn *Eduard Weyr* in Prag.)

Im 32sten Bande, pag. 182 dieses Journals stellt *Steiner* folgende Sätze auf: „Werden in einer Curve dritter Ordnung zwei beliebige Punkte P und Q als fest angenommen, wird ferner in derselben ein willkürlicher Punkt A angenommen und die Gerade PA gezogen, welche der Curve zum dritten Male in einem Punkte B begegnet, wird sodann weiter die Gerade QB gezogen, welche die Curve zum dritten Male in einem Punkte C schneidet, wird ferner die Gerade PC gezogen, welche die Curve in einem neuen Punkte D trifft, und werden so weiter die Geraden QDE, PEF, QFG, ... gezogen, welche nach der Reihe in der Curve die neuen Punkte E, F, G, ... bestimmen, so entsteht ein der Curve eingeschriebenes Polygon $ABCDEFG$..., dessen Seiten der Reihe nach abwechselnd durch die festen Fundamentalpunkte P und Q gehen, und welches entweder 1° sich *nicht schliesst*, wie lange auch die Construction fortgesetzt werden mag, oder 2° sich *schliesst* und dann eine gerade Zahl $2n$ von Seiten hat. Im letzteren Falle findet folgender Satz statt: „„*Wenn das Polygon sich schliesst, so schliesst es sich immer und hat stets die nämliche Seitenzahl* $2n$, *man mag die erste Ecke A desselben in der Curve annehmen, wo man will.*““

Hat eine Curve vierter Ordnung zwei Doppelpunkte P und Q, so lassen sich ihr gleicherweise Polygone $ABCDEF$... einschreiben, deren Seiten abwechselnd durch jene festen Punkte P und Q gehen, und es findet dasselbe Gesetz statt:

„„*Dass, wenn das Polygon sich schliesst, es sich dann immer schliesst und dabei die nämliche gerade Seitenzahl* $2n$ *hat, man mag die erste Ecke A derselben in der Curve annehmen, wo man will.*““

Obgleich das erste dieser beiden Schliessungsprobleme bereits in seinem Zusammenhange mit der Theorie der elliptischen Functionen von Herrn *Clebsch**)

*) Bd. 63, pag. 94 dieses Journals.

dargestellt worden ist, so bleibt es doch von Interesse, die obigen *Steiner*schen Sätze nebst den von ihm hinzugefügten Bemerkungen unabhängig von der Betrachtung transcendenter Functionen zu beweisen und ihren Zusammenhang mit den Beziehungen gewisser geometrischer Elementargebilde zu ergründen.

Wir nennen zwei Grundgebilde ersten Grades zwei und zweigliedrig verwandt, wenn jedem Elemente des einen zwei Elemente des anderen gesetzmässig zugeordnet sind. Da die Grundgebilde erster Stufe die Punktreihe der Strahlen- und Ebenenbüschel sind, so verstehen wir unter dem Worte „Element" resp. einen Punkt, einen Strahl oder eine Ebene. Jedes Element eines dieser drei Gebilde kann auf verschiedene Arten durch eine einzige Variable eindeutig bestimmt werden; am einfachsten geschieht dies wohl dadurch, dass man in dem betreffenden Grundgebilde zwei feste Elemente annimmt und jedes Element auf dieselben durch sein Theilverhältniss bezieht. Hat man es mit einer Punktreihe zu thun, so versteht man hierbei unter dem Theilverhältnisse eines Punktes den Quotienten aus den Abständen desselben von den zwei Fundamentalpunkten, während man bei einem Büschel das Verhältniss der Sinus der Winkel eines Elementes gegen die zwei festen Elemente sein Theilverhältniss nennt; hierbei sind sowohl die Strecken, als auch die Winkelgrössen mit ihrem richtigen Zeichen einzuführen. Haben wir nun zwei einförmige Grundgebilde S und Σ, und bestimmen wir ihre Elemente durch die Theilverhältnisse x resp. ξ, so werden dieselben unserer Definition gemäss dann zwei und zweigliedrig verwandt heissen, wenn zwischen den Theilverhältnissen entsprechender Elemente eine Relation von der Form

$$x^2(A\xi^2+B\xi+C)+x(A'\xi^2+B'\xi+C')+(A''\xi^2+B''\xi+C'') = 0$$

besteht und umgekehrt. Es ist daraus klar, dass einem reellen Elemente auch zwei imaginäre Elemente entsprechen können, wesshalb die Zulassung von imaginären Gebilden hier von selbst geboten ist.

Um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, wollen wir uns unter S und Σ zwei Strahlenbüschel in derselben Ebene vorstellen und ihre Scheitel durch eben diese Buchstaben bezeichnen. Fallen nun die einem Strahle e von S in Σ entsprechenden Strahlen ε_1 und ε_2 in einen ε_{12} zusammen, so mag dieser ein *Doppelstrahl* von Σ heissen. Solche Strahlen bestimmen sich offenbar dadurch, dass man die bezüglich x gebildete Discriminante der letzten Gleichung gleich Null setzt, d. h. durch

$$(A'\xi^2+B'\xi+C')^2-4(A\xi^2+B\xi+C)(A''\xi^2+B''\xi+C'') = 0.$$

Demzufolge giebt es in jedem der beiden zwei und zweigliedrig verwandten

Elementargebilde *vier* Doppelelemente. Man bemerke, dass e und ε_{12} gleichzeitig reell oder imaginär sein müssen.

Die zwei und zweigliedrige Verwandtschaft kann, wie dies bei allen Verwandtschaften der Fall ist, durch Angabe von entsprechenden Elementen fixirt werden. Bedenkt man, dass die vorletzte Gleichung acht unabhängige Coefficienten enthält, so folgt sofort, dass zwei Elementargebilde auf einander zwei und zweigliedrig bezogen sind, wenn man acht Paare entsprechender Elemente angiebt; hierbei gilt ein Element e mit einem entsprechenden Doppelelement ε_{12} für zwei Paare.

Denkt man sich zwei zwei und zweigliedrige Elementargebilde auf demselben Träger, also in unserem Falle die Punkte S und Σ identisch, so kann man sowohl x als auch ξ bezüglich der nämlichen zwei Fundamentalstrahlen messen, und für $x = \xi$ erhalten wir dann aus der ersten Gleichung die entsprechend gemeinschaftlichen Strahlen. Weil dieselbe vom vierten Grade wird, so erkennen wir, dass die beiden Strahlenbüschel im Allgemeinen vier Strahlen entsprechend gemein haben. Schneidet man nun zwei so verwandte Büschel S und Σ, deren Scheitel jedoch nicht identisch sein sollen, durch eine beliebige Transversale T, so entstehen auf derselben zwei zwei und zweigliedrige Punktsysteme, indem entsprechende Punkte derselben aus S und Σ durch entsprechende Strahlen projicirt werden; weil nun diese Punktsysteme vier Punkte entsprechend gemein haben werden, so folgt, dass auf jeder Geraden vier Schnittpunkte entsprechender Strahlen der beiden Büschel liegen. *Demzufolge erfüllen die Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier zwei und zweigliedrigen Strahlenbüschel eine Curve vierter Ordnung.* Natürlich hüllen die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier solcher Punktreihen eine Curve vierter Classe ein, und das Erzeugniss zweier zwei und zweigliedrigen Ebenenbüschel ist eine Regelfläche vierter Ordnung. — Legt man die Transversale T speciell durch den Scheitel S, so schneidet sich in S auf derselben der Strahl $\overline{S\Sigma}$ mit den beiden ihm in S zugeordneten Strahlen, so dass sich nur noch zweimal entsprechende Strahlen auf T treffen werden. *Aus diesem Grunde sind S und Σ Doppelpunkte der Curve vierter Ordnung;* nebenbei bemerkt sind die Curventangenten in diesen Punkten jene zwei Strahlen, die dem gemeinschaftlichen Strahle $\overline{S\Sigma}$ zugeordnet sind. Aehnliches findet bei zwei Punktreihen und Ebenenbüscheln statt.

Entspricht sich der gemeinschaftliche Strahl $\overline{S\Sigma}$ selbst, so wird derselbe einen Theil des Erzeugnisses der beiden Büschel ausmachen müssen, d. h.

dieses Erzeugniss zerfällt dann in $\overline{S\Sigma}$ und eine durch S und Σ hindurchgehende Curve C_3 dritter Ordnung; dass C_3 durch S und Σ gehen muss, ergiebt sich einfach aus der Bemerkung, dass diese Punkte Doppelpunkte des von $\overline{S\Sigma}$ und C_3 gebildeten Ortes vierter Ordnung sein müssen. Da die zwei und zweigliedrige Verwandtschaft erst durch die Angabe von acht Paaren entsprechender Elemente festgestellt ist, so kann man $\overline{S\Sigma}$ sich selbst und sieben willkürlichen Strahlen von S sieben ebensolche Strahlen von Σ resp. als entsprechend zuordnen, so zwar, dass man ausser S und Σ noch sieben weitere Punkte von C_3 von vorn herein annehmen kann. Demzufolge kann man C_3 mit jeder beliebigen Curve dritter Ordnung identificiren, und es ergiebt sich somit Folgendes: Betrachtet man zwei Punkte S und Σ einer Curve dritter Ordnung als Scheitel zweier Büschel, und heisst man jene Strahlen entsprechend, die sich auf der Curve schneiden, so sind die zwei Büschel zwei und zweigliedrig verwandt. Dieses gilt auch dann noch, wenn an die Stelle von C_3 eine Curve vierter Ordnung C_4 mit zwei Doppelpunkten S und Σ gesetzt wird. Denn nimmt man auf solcher Curve acht Punkte A, B, C ... an, so geben sie mit S und Σ verbunden zu je acht Strahlen a, b, c ...; α, β, γ... Anlass. Ordnet man die Strahlen a und α, b und β etc. einander zu, so sind die beiden Büschel S und Σ auf einander zwei und zweigliedrig bezogen und erzeugen somit eine Curve vierter Ordnung, die S und Σ zu Doppelpunkten, unsere acht Punkte A, B, C ... aber zu einfachen Punkten hat. Berücksichtigt man aber, dass eine Curve vierter Ordnung durch zwei Doppelpunkte und $\frac{1}{2}(4+3)-2.3=8$ weitere Punkte vollkommen bestimmt ist, so folgt die Identität der ursprünglichen mit der durch die Büschel erzeugten Curve, wodurch unsere Aussage erwiesen ist. Wir erkennen daraus auch, dass das Vorhandensein von vier Doppelstrahlen in jedem zweigliedrigen Büschel nichts anderes aussagt, als dass von einem Punkte einer Curve dritter Ordnung oder von einem Doppelpunkte einer Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten an die Curve im Allgemeinen vier Tangenten gehen.

Ist e ein reeller Strahl von S, dem in Σ ein (natürlich ebenfalls reeller) Strahl ε_{12} doppelt entspricht, und man dreht die Büschel um ihre Scheitel so lange, bis e und ε_{12} auf $\overline{S\Sigma}$ fallen, so gehört diese doppelt gezählte Gerade zu dem Erzeugnisse der beiden Büschel, d. h. *entsprechende Strahlen derselben werden sich auf einem Kegelschnitte K schneiden müssen.* Dieser Kegelschnitt wird nicht durch S und Σ gehen, weil ja diese Punkte dann dreifache Punkte des erzeugten Ortes vierter Ordnung wären, was nicht eintreten kann.

2. Wir sprechen folgenden Satz aus, auf welchen sich die *Steiner*schen Sätze zurückführen lassen werden:

> *„Sind zwei einförmige Grundgebilde S und Σ zwei und zweigliedrig auf einander bezogen, und kann man in jedem derselben eine Gruppe von n Elementen a, b, c ... resp. α, β, γ ... so angeben, dass sich die einem beliebigen Elemente der einen Gruppe zugeordneten zwei Elemente in der anderen Gruppe befinden, so existiren unendlich viele solcher beigeordneten Gruppen, nämlich jedes Element ist in einer solchen Gruppe enthalten. Gruppen dieser Art von mehr oder weniger als n Elementen giebt es nicht.*

Dieser Satz soll zunächst für den Fall erwiesen werden, dass es in einem der beiden Büschel ein *reelles* Doppelelement ε_{12} gebe, welches natürlich einem reellen Elemente e des anderen Büschels S zugeordnet sein wird. Drehen wir in diesem Falle die Büschel so lange, bis diese Strahlen mit $\overline{S\Sigma}$ zusammenfallen, so erzeugen dieselben dann einen gewissen Kegelschnitt K. Ist nun a ein Element einer Gruppe G von n Elementen, der in Σ eine Gruppe I' von ebensoviel Strahlen beigeordnet sein mag, und schneidet a den Kegelschnitt K in A und B, so gehört $\overline{B\Sigma} = \beta$ zu I'; schneidet β K überdies in C, so ist $\overline{CS} = b$ in G enthalten, weil ja a und b dem Strahle β zwei und zweigliedrig entsprechen sollen: zieht man weiter $\overline{CS}$, bis K in D geschnitten wird, so gehört $\overline{D\Sigma} = \gamma$ in die Gruppe I' etc. Es ist einleuchtend, dass man durch ein solches Linienziehen immer Strahlen von S resp. von Σ erhalten muss, welche zu den Gruppen G und I' gehören. Nun liefert aber jeder zweite Punkt B, D ... einen Strahl von Σ, und da I' der Voraussetzung gemäss aus n Strahlen bestehen soll, so wird es n solcher zweiten Punkte B, D ..., also auch n andere Punkte A, C ... auf K geben, daher im Ganzen $2n$. Berücksichtigt man, dass der a ausser β entsprechende Strahl $\overline{A\Sigma}$ ebenfalls in der Gruppe I' enthalten sein soll, so sieht man ein, dass die Reihe der Punkte A, B, C, D ... endlich auf den Anfangspunkt zurückkommen und somit auf K ein $2n$-Eck entstehen muss.

Es ist nun klar, dass der ganze Beweis des ausgesprochenen Satzes einfach darin bestehen wird, zu zeigen, dass sich das analog construirte Polygon auch dann schliesst, wenn man A d. h. den Anfangsstrahl a willkürlich auf K annimmt und zeigt, dass es sich erst nach dem Auftreten von $2n$ Ecken $ABCD$... schliesst. Denn schliesst sich das so construirte Polygon für jeden beliebigen

Anfangspunkt, so repräsentiren seine Seiten n Strahlen von S, resp. n Strahlen von Σ, und da die jedem Strahle (Seite) entsprechenden Strahlen offenbar die zwei ihm anliegenden Seiten des $2n$-Ecks sind, so sieht man, dass die jedem Strahle der einen Gruppe zugeordneten zwei Strahlen sich in der anderen befinden müssten. Nach dieser Bemerkung ist der Beweis des ausgesprochenen Satzes in der That sehr einfach und kann auf einen von *Poncelet* und später auch von *Göpel* im 36sten Bande, pag. 347 dieses Journals bewiesenen Satz zurückgeführt werden; derselbe lautet: „Bewegen sich alle Seiten eines geradzahligen einem Kegelschnitte eingeschriebenen Polygons, ausser der letzten, um feste in einer Geraden liegende Punkte, so dreht sich auch die letzte Seite und überhaupt jede Verbindungslinie einer geradstelligen und einer ungeradstelligen Ecke um irgend einen festen Punkt jener Geraden". Betrachten wir nun die von uns construirten $2n$-Ecke, so drehen sich die $2n-1$ ihrer Seiten um Punkte (S und Σ) einer Geraden $\overline{S\Sigma}$; daher dreht sich auch die letzte Seite um einen in $\overline{S\Sigma}$ liegenden Punkt, welcher eben ihr Schnittpunkt mit $\overline{S\Sigma}$ ist. Da die letzte Seite des zuerst betrachteten $2n$-Ecks den gemachten Voraussetzungen gemäss durch Σ selbst ging, so ist Σ selbst der feste Punkt, um welchen sich die Endseite drehen muss, oder mit anderen Worten, das betrachtete $2n$-Eck wird sich immer schliessen, wo auch sein Anfangspunkt auf dem Kegelschnitte K liegen mag, und dasselbe wird sich erst nach dem Auftreten von $2n$ Seiten schliessen, was ja alles dem citirten Satze gemäss erhellet.

Um nun unseren Satz auch für den Fall zu beweisen, wo es kein reelles Doppelelement ε_{12} giebt, sei e ein imaginärer Strahl vom Theilverhältnisse $a+ib$ von S, und ε_{12} ein ihm in Σ doppelt entsprechender Strahl, der das Theilverhältniss $\alpha+i\beta$ haben mag. Die Fundamentalstrahlen, bezüglich deren man die Theilverhältnisse misst, sollen r, s resp. ϱ, σ heissen. Wir können nun S auf ein Büschel S' von demselben Scheitel projectivisch beziehen, indem wir jedem Strahle von S, dem das Theilverhältniss t zukommt, jenen Strahl in S' entsprechen lassen, dessen Theilverhältniss $t(a-ib)$ ist; hierbei entsprechen sich r und s selbst. Ebenso können wir Σ auf ein concentrisches Büschel Σ' durch die Gleichung $\tau' = \tau(\alpha - i\beta)$ beziehen, wo τ das Theilverhältniss eines zu Σ gerechneten und τ' das des ihm zugeordneten Strahles ist. Allein die Büschel S' und Σ' sind wieder auf einander zwei und zweigliedrig bezogen; denn jedem Strahle m' von S' entspricht ein Strahl m projectivisch, diesem in Σ zwei Elemente μ_1 und μ_2, letzteren aber vermöge

der zweiten projectivischen Verwandtschaft in Σ' zwei Strahlen μ_1' und μ_2'. Diese Strahlen nun kann man als die m' zwei und zweigliedrig zugeordneten auffassen.

Für $t = a + ib$ wird $t' = a^2 + b^2$, also reell, d. h. e' ist reell. Ebenso folgt für $\tau = \alpha + i\beta$, $\tau' = \alpha^2 + \beta^2$, oder ε_{12}' ist ebenfalls reell. Allgemeiner entspricht jedem der unendlich vielen durch $t = c(\alpha + i\beta)$ repräsentirten Strahlen in S' ein reeller Strahl, und Aehnliches gilt für Σ. Berücksichtigt man, dass ε_{12}' ein e' zugeordneter Doppelstrahl ist, so sieht man, dass man es wieder mit dem früheren Falle zu thun hat, für den unser Satz erwiesen wurde. Sind G' und I'' zwei beigeordnete Gruppen von je n Elementen von S' und Σ', so werden ihnen in S und Σ je eine Gruppe G resp. I' zu n Elementen entsprechen, die einander jedoch auch zwei und zweigliedrig zugeordnet sein werden, d. h. G und I' werden ebenfalls beigeordnete Gruppen bilden. Nun involviren dem erwiesenen Satze gemäss zwei Gruppen G' und I'' unendlich viele solcher Gruppen; somit gilt dies auch für S und Σ, wodurch unser Satz ganz allgemein erhärtet ist.

3. Denken wir uns wiederum zwei zwei und zweigliedrige Büschel mit verschiedenen Scheiteln P und Q, so erzeugen dieselben eine Curve vierter Ordnung, die in P und Q Doppelpunkte besitzt; haben jedoch die Büschel den Strahl $\overline{PQ}$ entsprechend gemein, so erzeugen sie eine durch P und Q gehende Curve dritter Ordnung. Um beide Fälle auf einmal behandeln zu können, bezeichnen wir das Erzeugniss zweier zwei und zweigliedrigen Büschel ganz allgemein durch C.

Ist nun A ein Curvenpunkt, und construirt man in der von *Steiner* angegebenen Weise weitere Curvenpunkte B, C, D ... und nimmt an, dass sich das Polygon $ABCD$ ..., dessen Seiten AB, BC, CD ... abwechselnd durch P und Q gehen, schliesst, so sieht man sofort ein, dass die letzte Seite desselben AQ sein muss; berücksichtigt man ferner, dass die 2te, 4te, 6te ... Seite des Polygons immer durch Q geht, so sieht man leicht, dass das entstehende Polygon nur ein $2n$-Eck sein kann. Fasst man eine z. B. durch P gehende Seite desselben ins Auge, so sind augenscheinlich die ihr anliegenden, durch Q gehenden Polygonseiten (Strahlen) jene zwei Elemente, welche ihr zwei und zweigliedrig zugeordnet sind. Wir sehen demnach, dass wir es mit zwei beigeordneten Elementengruppen G und I' zu thun haben, welche aus je n Strahlen bestehen; jeder durch P gehenden Polygonseite (die man also als einen Strahl dieses Büschels aufzufassen hat) entsprechen die beiden anliegenden durch P gehenden Polygonseiten und umgekehrt.

Allein auch das Gegentheil kann behauptet werden, nämlich: Existiren zwei beigeordnete Gruppen G und I' zu je n Elementen in den zwei und zweigliedrigen Büscheln P und Q, so repräsentiren ihre Strahlen die Seiten eines der Curve C eingeschriebenen $2n$-Ecks. Diese Behauptung wird unmittelbar klar, wenn man, von einem beliebigen Strahle einer Gruppe ausgehend, zu ihm die beiden entsprechenden in der anderen Gruppe sucht, zu einem dieser wieder den in der ersten Gruppe zugeordneten ins Auge fasst u. s. w., wie dies im vorigen Artikel mit Zuhülfenahme des Kegelschnittes K geschah. Nun wurde aber gezeigt, dass, sobald *ein* Paar beigeordneter Gruppen zu je n Elementen existirt, es unendlich viele *solcher* Gruppen giebt, und dass jeder Strahl in eine solche Gruppe gehört. Demgemäss kann man auch sagen, dass, sobald es *ein* Polygon zu $2n$ Seiten der beschriebenen Art giebt, ihrer unendlich viele existiren, und dass jeder Curvenpunkt als Eckpunkt *eines* solchen Polygons von constanter Seitenzahl $2n$ angesehen werden kann, wodurch die zwei von *Steiner* aufgestellten Sätze erwiesen sind.

Untersuchen wir nun die speciellen von *Steiner* betrachteten Fälle für eine Curve dritter Ordnung C_3.

Sollen P und Q solche Curvenpunkte sein, dass für dieselben $2n=4$ ist, so muss dies auch dann noch gelten, wenn wir den Anfangspunkt A des zu betrachtenden Vierecks nach dem dritten Schnittpunkte von $\overline{PQ}$ mit C_3 verlegen. Dann ist, wenn alle Symbole die ihnen von *Steiner* in den citirten Sätzen beigelegte Bedeutung behalten, $B=Q$ und $C=T$, sobald T der Schnittpunkt (Tangentialpunkt) der in Q gezogenen Tangente mit der Curve ist. Da die letzte Seite des Vierecks dem Früheren gemäss $\overline{AQ}$ vorstellt, so muss P die vierte Ecke sein, und daher $\overline{PT}$ die Curve zum dritten Male in P schneiden, oder es muss T der Tangentialpunkt von P sein. Sollen somit P und Q *Steiner*sche Vierecke zulassen, so müssen sich die in P und Q an C_3 gezogenen Tangenten in einem Punkte T von C_3 treffen; und umgekehrt, wenn diese Bedingung erfüllt ist, so kann man, wie soeben gezeigt wurde, ein Viereck (wenn auch mit zwei infinitesimalen Seiten) von besagter Art construiren und somit unendlich viele. In diesem Falle nun, wo $n=2$ ist, bestehen die beigeordneten Gruppen aus je zwei Elementen, und man hat es somit mit zwei projectivischen *) Strahleninvolutionen zu thun, deren Scheitel P und Q sind.

*) Hat man eine Strahleninvolution zweiten Grades AA_1, BB_1, CC_1 etc., und man schneidet sie durch einen durch ihren Scheitel gehenden Hülfskegelschnitt, so wird

Diese Bemerkung erstreckt sich auch auf den Fall einer Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten P und Q.

Soll $2n = 6$ sein, d. h. sollen P und Q Sechsecke der betrachteten Art zulassen, so muss dies auch dann zutreffen, wenn man A wiederum nach dem Schnittpunkte von $\overline{PQ}$ mit C_3 verlegt. Dann ist $B = Q$ und $C = Q_1$, wenn dies der Tangentialpunkt von Q ist. Heisst der Schnittpunkt von $\overline{PQ_1}$ mit C_3 etwa T, so ist $D = T$, und es muss wiederum die letzte Seite $\overline{QA}$ und somit die letzte Ecke unseres Sechsecks $F = P$ sein. Daher muss, wenn E die fünfte Ecke bedeutet, $\overline{EF}$ die Curve in P tangiren oder $E = P_1$ der Tangentialpunkt von P sein. Weil nun $\overline{EF}$ durch P geht, so muss $\overline{ED} = \overline{P_1D}$ durch Q hindurchgehen oder $\overline{P_1Q}$ muss D enthalten, d. h. $\overline{PQ_1}$ muss sich mit $\overline{P_1Q}$ in einem Punkte T auf C_3 schneiden, was mit der von *Steiner* aufgestellten Bedingung übereinstimmt. In ganz derselben Weise könnte man auf ein 8, 10, ... $2n$-Eck übergehen.

Steiner fügt seinen Sätzen folgende Bemerkung bei: „Die vorstehenden Sätze finden analogerweise statt, wenn die Seiten des Polygons Kegelschnitte sind (anstatt Gerade); nämlich wenn man in der gegebenen Curve drei beliebige feste Punkte X, Y, Z annimmt, durch dieselben und abwechselnd durch P und Q Kegelschnitte legt und mittelst solcher Kegelschnitte das der Curve eingeschriebene Polygon construirt."

Diese Bemerkung hat wohl ihre Richtigkeit für eine Curve dritter Ordnung, und sie soll für diese auch erwiesen werden; allein für Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten kann sie nicht geltend gemacht werden, da durch dieselbe der Text des zweiten im Anfang dieser Arbeit citirten Satzes von *Steiner* illusorisch gemacht wird. Hat man nämlich auf einer Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten P und Q drei feste Punkte X, Y, Z, und man legt durch einen Curvenpunkt A als Anfangspunkt des zu construirenden Polygons und durch die Punkte X, Y, Z und P einen Kegelschnitt, so wird derselbe die Curve ausser in A, X, Y, Z und P noch in *zwei* Punkten schneiden, wodurch eben die weiteren Forderungen des Textes aufgehoben werden. Höchstwahrscheinlich hatte *Steiner* bei der Abfassung der gemachten Bemerkung

---

auf ihm eine Punktinvolution aa_1, bb_1, cc_1 etc. bestimmt. Die Strahlen $aa_1 = \alpha$, $bb_1 = \beta$, $cc_1 = \gamma$ etc. gehen durch einen Punkt, ein Büschel bildend. Unter dem Doppelverhältnisse von vier Strahlenpaaren AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 verstehen wir $\{\alpha\beta\gamma\delta\}$. Zwei Strahleninvolutionen heissen projectivisch, wenn das Doppelverhältniss von je vier entsprechenden Strahlenpaaren das nämliche ist.

einen anderen, nicht angegebenen Satz hinsichtlich der Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten vor Augen, da diese Bemerkung, wie soeben bemerkt wurde, auf den im Texte angegebenen Satz nicht passt.

Um nun den ursprünglichen Satz für Curven dritter Ordnung in der angegebenen Weise zu erweitern, müssen wir von der von *Steiner* in seiner „Systematischen Entwickelung etc." pag. 251 aufgestellten Methode der schiefen Projection Gebrauch machen. Der Kürze wegen mag die hierher einschlägige Entwickelung des citirten Werkes vorausgesetzt werden. —

Man bilde die Ebene E unserer Curve dritter Ordnung C_3 auf eine andere Ebene E' durch schiefe Projection in der Weise ab, dass die nicht in einer Geraden liegenden Punkte X, Y, Z die Hauptpunkte von E werden. Dann wird der Curve C_3 eine Curve C_3' dritter Ordnung entsprechen (wenn man nämlich von den drei Hauptlinien von E' als geometrischen Oertern aufgefasst abstrahirt), welche durch die drei Hauptpunkte von E' gehen muss; die P und Q zugeordneten Punkte P' resp. Q' werden natürlich auf C_3' liegen. Jedem durch X, Y, Z gehenden Kegelschnitte wird (wiederum von den Hauptlinien von E' abgesehen) eine Gerade entsprechen; wird so ein Kegelschnitt durch P oder Q gelegt, so wird diese Gerade durch P' resp. Q' gehen. Denkt man sich nun Polygone, deren Ecken sich auf C_3 befinden, und deren Seiten Stücke von Kegelschnitten sind, die durch X, Y, Z und abwechselnd durch P und Q gehen, so werden denselben in E' Polygone zugeordnet sein, deren Ecken sich auf C_3' befinden müssen, und deren Seiten aus geraden Linien bestehen werden, welche abwechselnd durch P' und Q' hindurchlaufen werden. Daraus erhellet aber sofort die Richtigkeit der von *Steiner* gemachten Bemerkung.

4. Es möge zum Schlusse als eine weitere Folgerung des gegebenen Beweises ein den *Steiner*schen Sätzen analoger Satz für die Schnittcurve zweier Regelflächen zweiter Ordnung aufgestellt werden. Zu dem Ende fassen wir zwei solche Regelflächen F und Φ als Träger von je *einer* Regelschaar S resp. Σ auf; dann geht durch jeden Punkt von F ein Strahl von S und durch jeden Punkt von Φ ein Strahl der Regelschaar Σ. Man kann hierbei die Strahlen der Regelschaaren genau in derselben Weise bestimmen, wie es mit den Elementen der einförmigen Grundgebilde geschah. Denkt man sich nämlich eine nicht zu S gehörige Erzeugende E von F, so trifft dieselbe jeden Strahl von S, d. h. die Regelschaar S bildet sich gewissermaassen perspectivisch auf E ab, indem jedem Strahle von S ein Punkt von E und um-

gekehrt entspricht. Nimmt man in S zwei feste Fundamentalstrahlen an, so kann man jeden Strahl dieser Schaar durch sein Theilverhältniss x bezüglich derselben bestimmen, sofern man unter dem Theilverhältniss der Strahlen das Theilverhältniss der zu ihnen auf E perspectivisch liegenden Punkte versteht; ganz in derselben Weise kann man einen Strahl von Σ durch eine einzige Variable ξ bestimmen. Wir dehnen nun den Begriff der zwei und zweigliedrigen Verwandtschaft auf Regelschaaren zweiten Grades aus, indem wir zwei solche Gebilde S und Σ dann auf einander zwei und zweigliedrig bezogen nennen, wenn jedem Strahle des einen zwei Strahlen des anderen gesetzmässig zugeordnet sind, so dass dann zwischen x und ξ wiederum eine in beiden Variablen quadratische Beziehung stattfinden muss. Zwei Regelschaaren S und Σ können nun auf einander in folgender Weise zwei und zweigliedrig bezogen werden.

Die Träger F und Φ derselben haben im Allgemeinen eine Raumcurve C_4 vierter Ordnung gemein; jeder Strahl von S, also auch von Σ trifft C_4 in zwei Punkten, welche er nämlich mit dem Träger der anderen Regelschaar gemein hat. Nennt man jene Strahlen von S und Σ „entsprechend“, welche sich auf C_4 schneiden, so sind, wie man sofort übersieht, S und Σ zwei und zweigliedrig verwandt. Demgemäss findet der in Art. 2 ausgesprochene Satz auch hier seine Anwendung und liefert, wenn man ihn geometrisch interpretirt, einen Satz über Regelschaaren zweiter Ordnung, welchen man in folgender Form aussprechen kann.

Haben zwei Regelschaaren zweiter Ordnung S und Σ eine Raumcurve vierter Ordnung C_4 gemein, und man zieht durch einen Punkt A derselben den zu S gehörigen Strahl, bis er C_4 zum zweiten Male in B schneidet, ferner durch B den Σ angehörigen Strahl, bis er C_4 noch einmal in C trifft, weiter durch C den in S liegenden Strahl, der mit C_4 überdies einen Punkt D gemein haben mag u. s. w., so erhält man ein windschiefes Polygon $ABCD\ldots$; dieses Polygon schliesst sich entweder nicht, wie weit man auch dieses Verfahren fortsetzen mag, oder es schliesst sich und hat dann eine gerade Seitenzahl $2n$. *In diesem Falle schliesst es sich immer und hat jedesmal die nämliche Seitenzahl* $2n$, *wo man den Anfangspunkt* A *auf* C_4 *auch annehmen mag.*

Prag, im Mai 1869.

Note zu *Riemanns* Beweis des *Dirichlet*schen Princips.

(Von Herrn *H. Weber* in Heidelberg.)

Das *Dirichlet*sche Princip, dessen Anwendung durch *Riemann* in der Theorie der *Abel*schen Functionen zu so grossen Resultaten geführt hat, und von dessen weiterer Entwicklung man sich noch manche Erfolge versprechen darf, ist hinsichtlich seiner Allgemeinheit und Strenge neuerdings mehrfach angefochten worden. Die Zweifel richten sich hauptsächlich gegen die Befugniss der Anwendung der Variationsrechnung auf eine Function von a priori völlig unbekannten Eigenschaften. Der Weg, den ich hier zur Aufklärung dieser Zweifel einschlagen werde, ist dem ähnlich, den ich bei einer andern Gelegenheit in einem verwandten Fall gegangen bin *). Man kann jedoch bei dieser einfacheren Frage noch strenger zu Werke gehen, indem man die besonders missliche partielle Integration gänzlich umgeht, indem man gleichzeitig zu einem, wenn auch praktisch nicht durchführbaren, doch wie sich streng nachweisen lässt, convergenten Rechnungsverfahren für die gesuchte Function gelangt. Es ist indessen nicht meine Meinung, den Beweis des *Dirichlet*schen Princips auf wesentlich neue Grundlagen zu bauen, sondern nur den von *Riemann* mehr angedeuteten als durchgeführten Beweis in einigen angreifbaren Punkten zu ergänzen.

Ich wende mich zunächst zum Beweis eines einfachen Falles:

Es sei ein die xy-Ebene allenthalben einfach bedeckendes Flächenstück S gegeben, dessen Begrenzung gebildet ist von Curven, die überall, abgesehen von einzelnen Punkten (Ecken), eine bestimmte Normale und eine bestimmte endliche Krümmung haben. Es ist nachzuweisen, dass eine, und nur eine Function U existirt, die im Innern dieses Flächenstücks mit ihren sämmtlichen Differentialquotienten endlich und stetig ist und der Differentialgleichung genügt:

$$(1.) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

*) S. meine Abhandlung „über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$“. Mathematische Annalen von *Clebsch* und *Neumann* Bd. 1.

und die am Rande des Flächenstücks beliebig gegebene Werthe annimmt, von welchen Randwerthen noch vorausgesetzt sein soll, dass sie sich längs des ganzen Randes stetig ändern und nirgends unendlich sind.

Um diesen Satz zu erweisen, nehme man in der Fläche S eine beliebige Function u an, welche am Rande von S die vorgeschriebenen Werthe hat, und von der nur vorausgesetzt wird, dass sie selbst im Innern von S nirgends unstetig oder unendlich wird, und dass das über die Fläche S erstreckte Integral:

$$(2.) \qquad \Omega(u) = \iint \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\,dy$$

einen bestimmten endlichen Werth erhalte. Aendert man die Function u ohne die ihr auferlegten Bedingungen zu verändern, so wird das Integral $\Omega(u)$ seinen Werth gleichfalls ändern. Jedenfalls aber wird sich eine endliche, positive, von 0 verschiedene *) Constante k angeben lassen, unter welche das Integral $\Omega(u)$ nicht herabsinken kann.

Es sei nun v_1 eine Function von übrigens denselben Eigenschaften wie u, welche aber am Rande des Flächenstücks S überall den Werth 0 hat.

Bedeutet h_1 eine Constante, und setzt man:

$$u_1 = u + h_1 v_1,$$

so ergiebt sich:

$$(3.) \qquad \Omega(u_1) = \Omega(u) + h_1^2 \Omega(v_1) + 2h_1 \iint \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dx\,dy.$$

Für eine gegebene Form der Function v_1 suche man nun denjenigen Werth der Constanten h_1, für welchen das Integral $\Omega(u_1)$ den kleinsten Werth erhält. Dieser Werth von h_1 ist:

$$h_1 = -\frac{\iint \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dx\,dy}{\Omega(v_1)},$$

und die Substitution dieses Werthes in (3.) ergiebt:

$$(4.) \qquad \Omega(u_1) = \Omega(u) - \frac{\left\{ \iint \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dx\,dy \right\}^2}{\Omega(v_1)}.$$

*) Das Integral $\Omega(u)$ kann nicht bis 0 herabsinken, wenn die vorgeschriebenen Randwerthe von u nicht selbst längs des ganzen Randes dieselben sind, da sonst u sich einer Constanten nähern müsste, was nicht anders möglich ist, als dadurch, dass u sich einer in einer Linie unstetigen Function unendlich annähert. Dies aber bedingt, wie *Riemann* bewiesen hat, ein unendliches Wachsen des Integrales $\Omega(u)$.

Ist nun die Function v_1 so gewählt, dass das Integral:

$$\iint \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v_1}{\partial y} \right\} dx\, dy$$

seinem absoluten Werthe nach grösser ist als eine endliche Zahl ϱ_1, so folgt aus (4.), dass $\Omega(u_1)$ gegen $\Omega(u)$ um eine endliche Grösse abgenommen hat.

Es sei nun v_2 eine Function von denselben Eigenschaften wie v_1; h_2 eine neue Constante. Ferner:

$$u_2 = u_1 + h_2 v_2 .$$

Man bestimmt nun wieder h_2 so, dass $\Omega(u_2)$ für die gegebene Form von v_2 möglichst klein werde, nämlich:

$$h_2 = -\frac{\iint \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) dx\, dy}{\Omega(v_2)},$$

wodurch sich wieder ergiebt:

$$\Omega(u_2) = \Omega(u_1) - \frac{\left\{ \iint \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) dx\, dy \right\}^2}{\Omega(v_2)}.$$

Daraus geht hervor, dass, falls v_2 so gewählt ist, dass

$$\iint \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial v_2}{\partial y} \right\} dx\, dy$$

dem absoluten Werthe nach grösser als eine endliche Constante ϱ_2 ist, $\Omega(u_2)$ gegen $\Omega(u_1)$ um eine endliche Grösse abgenommen hat.

Fährt man auf diese Weise fort, Functionen u_3, u_4, ... u_n zu bestimmen, so erkennt man leicht, dass man nach einer endlichen Anzahl von Operationen dieser Art zu einer Function u_n gelangen muss, welche die Eigenschaft hat, dass das Integral:

$$\iint \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u_n}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\, dy$$

dem absoluten Werthe nach unter einer zwar endlichen, aber beliebig kleinen Constanten ε_n liegt, für alle denkbaren Formen der stetigen, am Rande verschwindenden Function v, für welche das Integral $\Omega(v)$ einen endlichen Werth behält. Denn nach unserer Bestimmungsweise der Constanten h_1, h_2, ... ist:

$$\Omega(u_m) < \Omega(u) - \frac{\varrho_1^2}{\Omega(v_1)} - \frac{\varrho_2^2}{\Omega(v_2)} - \cdots - \frac{\varrho_m^2}{\Omega(v_m)}.$$

Wenn nun nicht eine endliche Zahl μ existirte, von welcher ab die grösstmöglichen Werthe von $\varrho_{\mu+1}$, $\varrho_{\mu+2}$ ... alle unter einer beliebig klein zu

wählenden Grenze ε_n lägen, so würde $\Omega(u_m)$ dadurch, dass man m gehörig gross wählte, jedenfalls unter jede beliebige Grenze herab gedrückt werden können, was unmöglich ist.

Die Function u_n ist also durch eine endliche Reihe ausgedrückt:

$$(5.) \qquad u_n = u + h_1 v_1 + h_2 v_2 + \cdots + h_n v_n,$$

ist demnach ebenso wie die Functionen u, v_1, v_2, ... v_n im Innern von S überall stetig, nimmt am Rande von S die vorgeschriebenen Werthe an und genügt der Bedingung:

$$(6.) \qquad \iint \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u_n}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) < \varepsilon_n$$

für alle Functionen v, die am Rande von S verschwinden, im Innern stetig sind und dem Integral $\Omega(v)$ einen endlichen Werth ertheilen.

Versteht man nun unter m eine andere Zahl, beliebig grösser als n, so wird auch:

$$(7.) \qquad \iint \left(\frac{\partial u_m}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u_m}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\, dy < \varepsilon_m,$$

worin ε_m jedenfalls nicht grösser als ε_n ist. Zieht man nun (6.) von (7.) ab und setzt, was freisteht: $v = u_m - u_n$, so folgt, dass das Integral

$$\iint \left\{ \left(\frac{\partial u_m}{\partial x} - \frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_m}{\partial y} - \frac{\partial u_n}{\partial y} \right)^2 \right\} dx\, dy$$

für ein beliebig grosses m und ein gehörig grosses n kleiner ist als jede beliebig kleine Zahl.

Da nun die Elemente dieses Integrals alle positiv sind, so folgt, dass der Gesammtflächeninhalt der Theile von S, in welchen die absoluten Werthe der Differenzen

$$\frac{\partial u_m}{\partial x} - \frac{\partial u_n}{\partial x}; \qquad \frac{\partial u_m}{\partial y} - \frac{\partial u_n}{\partial y}$$

grösser sind als gewisse beliebig klein zu wählende Constanten η_x, η_y, kleiner gemacht werden kann als eine, von η_x, η_y unabhängig, beliebig kleine Fläche, wenn man nur für ein beliebig grosses m die Zahl n gehörig gross annimmt. Daraus zieht man den Schluss, dass das Integral:

$$\iint \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x} - \frac{\partial u_n}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \left(\frac{\partial u_m}{\partial y} - \frac{\partial u_n}{\partial y} \right) \right\} dx\, dy$$

auch dann noch für beliebig grosse Werthe von m durch eine gehörig grosse Annahme über n kleiner gemacht werden kann als eine beliebig klein zu wählende Grösse, wenn w eine beliebige im Innern von S stetige Function

ist, für welche $\Omega(w)$ endlich ist, die aber am Rande nicht verschwindet, sondern beliebige Werthe erhält. Es wird also unter dieser Voraussetzung das Integral:

$$(8.) \qquad \iint \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u_n}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)dx\,dy$$

mit unendlich wachsendem n zwar nicht gegen Null, aber gegen eine andere feste Grenze convergiren, von der man noch schliessen kann, dass sie allein von den Randwerthen der Function w abhängig ist.

Um diesen Grenzwerth zu finden, kann man folgendermassen verfahren: Man ziehe im Innern von S eine zur Grenzcurve parallele Curve in dem constanten Normalabstand p_1, wodurch die Fläche S in zwei Theile getheilt wird, einen inneren S' und einen am Rande sich hinziehenden Streifen S''. Dem entsprechend zerfällt auch das Integral (8.) in zwei Theile. In dem über S' genommenen Theil nehme man nun v mit w übereinstimmend an, in S'' aber setze man, indem man mit p den veränderlichen Normalabstand bezeichnet, $v=\frac{p\overline{w}}{p_1}$, wenn $\overline{w}$ den Werth von w an der Begrenzung von S bezeichnet*). Die so bestimmte Function v genügt dann den Bedingungen der Ungleichung (6.), und man hat daher:

$$(9.) \qquad \iint_{S'}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u_n}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)dx\,dy+\iint_{S''}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u_n}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy<\varepsilon_n.$$

Das über S'' genommene Integral transformirt man nun, indem man als unabhängige Veränderliche die von einem beliebigen Anfangspunkt gezählte Bogenlänge s der Grenzcurve von S und den nach Innen positiv genommenen Normalabstand p eines veränderlichen Punktes von dieser Grenzcurve einführt. Bezeichnet dann k die Krümmung der Grenzcurve, positiv genommen, wenn sie nach Aussen convex ist, so erhält man für das über S'' genommene Integral**):

---

*) Enthält die Begrenzung von S Ecken, so muss auch die Begrenzung von S' entsprechende Ecken erhalten. Wie dann v in der Nähe dieser Ecken bestimmt wird, ist für den gegenwärtigen Zweck gleichgültig, so lange es nur am Rande von S' verschwindet und übrigens stetig ist, da der Einfluss der Ecken auf das Integral (6.) dadurch, dass man p_1 gehörig klein wählt, beliebig klein gemacht werden kann. Aus demselben Grund braucht auch bei der folgenden Transformation auf die Ecken keine Rücksicht genommen zu werden. Durch die Grenzcurven von S' nämlich werden die Ecken durch kleine Parallelogramme ausgeschieden. Die über diese Parallelogramme genommenen Integrale (6.) haben einen Werth, der zugleich mit p_1 unendlich klein wird, und haben also auf das Ergebniss keinen Einfluss.

**) Man vergl. über diese Transformation *Riemanns* Doctor-Dissertation §. 17.

$$\int ds \int_0^{p_1} dp(1-kp)\left\{\frac{\partial u_n}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial p}+\frac{1}{(1-kp)^2}\frac{\partial u_n}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial s}\right\},$$

oder indem man für v den obigen Ausdruck einsetzt:

$$\int \bar{w}\, ds \frac{1}{p_1}\int_0^{p_1} dp(1-kp)\frac{\partial u_n}{\partial p}+\int ds \frac{\partial \bar{w}}{\partial s}\frac{1}{p_1}\int_0^{p_1}\frac{p\,dp}{(1-kp)}\frac{\partial u_n}{\partial s},$$

worin sich die Integrationen nach s über die ganze Begrenzung der Fläche S erstrecken. Da nun unseren Voraussetzungen gemäss u_n, $\frac{\partial u_n}{\partial s}$, $\frac{\partial u_n}{\partial p}$ in der Nähe des ganzen Randes von S stetig sind, so übersieht man leicht, dass das zweite der obigen Integrale für unendlich kleine Werthe von p_1 gegen Null convergirt, während das erste das Randintegral:

$$\int \bar{w}\frac{\partial u_n}{\partial p}ds,$$

erstreckt über den ganzen Rand von S, zur Grenze hat.

Demnach ergiebt sich aus (9.)

$$(10.)\qquad \iint_S\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u_n}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)dxdy+\int \bar{w}\frac{\partial u_n}{\partial p}ds<\varepsilon_n,$$

worin jetzt $\bar{w}$ die Werthe der Function w am Rande von S bedeutet.

Da nun, wie oben bewiesen ist, das erste Integral von (10.) mit unendlich wachsendem n gegen eine feste Grenze convergirt, so muss auch das Randintegral gegen eine feste Grenze convergiren, und zwar für alle möglichen Formen der stetigen Randfunction $\bar{w}$. Genauer ausgedrückt lautet dieser Schluss: Die Länge der Linientheile des Randes von S, in denen der absolute Werth der Differenz:

$$\frac{\partial u_m}{\partial p}-\frac{\partial u_n}{\partial p}$$

eine gewisse, beliebig klein zu wählende Constante überschreitet, kann für ein beliebig grosses m und ein gehörig grosses n kleiner gemacht werden, als jede beliebig kleine Linie.

Es wird sich also die Function $\frac{\partial u_n}{\partial p}$ längs des ganzen Randes, abgesehen von einzelnen Punkten, mit unbegrenzt wachsendem n einer bestimmten endlichen Grenze nähern, und jedenfalls wird sich das Integral $\int \bar{w}\frac{\partial u_n}{\partial p}ds$ mit unendlich wachsendem n für alle möglichen stetigen Randfunctionen $\bar{w}$ einer bestimmten endlichen Grenze nähern.

Legt man nun um einen beliebigen Punkt $x_0 y_0$ der Fläche S einen Kreis mit dem Radius r_1 und nimmt die in (10.) vorkommende Function w

in diesem Kreis constant, gleich $\log r_1$, an, ausserhalb des Kreises aber

$$w = \log r; \qquad r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

so genügt w den Anforderungen der Ungleichung (10.) und genügt ausserdem noch der Bedingung:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

in der ganzen Fläche S. w selbst ist in der ganzen Fläche S, und seine Differentialquotienten sind ausser an der Kreisperipherie stetig.

In Folge dieser Annahme fällt derjenige Theil des ersten Integrals (10.) fort, welcher über die Fläche des besagten Kreises genommen ist, und der übrige Theil lässt sich in bekannter Weise transformiren. Wenn man nämlich in der bekannten Formel:

$$\iint\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dx\,dy = -\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds$$

setzt:

$$X = u_n\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad Y = u_n\frac{\partial w}{\partial y},$$

eine Annahme, die gestattet ist, da alsdann X, Y in der ganzen Fläche S mit Ausschluss des Kreises stetig bleiben, so geht das erste Integral der Formel (10.) über in ein einfaches Integral über die Begrenzung von S und über die Kreisperipherie, nämlich

$$-\int u_n\frac{\partial w}{\partial p}\,ds + r_1\int_0^{2\pi} u_n\frac{\partial w}{\partial r}\,d\varphi.$$

Da nun u_n im Randintegral durchweg die vorgeschriebenen Werthe $\bar{u}$ hat, in der Umgebung des Punktes x_0y_0 aber stetig ist, so ergiebt sich aus (10.), wenn man nun den Radius r_1 des Kreises unendlich klein werden lässt:

$$2\pi u_n(x_0y_0) - \int\bar{u}\frac{\partial\bar{w}}{\partial p}\,ds + \int\frac{\partial u_n}{\partial p}\,\bar{w}\,ds < \varepsilon_n$$

oder, für w seinen Werth gesetzt:

$$(11.) \qquad 2\pi u_n(x_0y_0) - \int\bar{u}\frac{\partial\log r}{\partial p}\,ds + \int\frac{\partial u_n}{\partial p}\log r\,ds < \varepsilon_n.$$

Aus diesem Resultat ergiebt sich nun der gesuchte Beweis. Zunächst erkennt man, dass für jeden Punkt im Innern von S die Function u_n mit unendlich wachsendem n sich einer bestimmten endlichen Grenze nähert. Es lässt sich aber auch diese Grenze darstellen. Denn nennen wir den Grenzwerth von

$\frac{\partial u_n}{\partial p}$, der, wie oben nachgewiesen ist, an der ganzen Begrenzung mit etwaiger Ausnahme einzelner Punkte existirt, $\overline{u'}$, so ergiebt sich aus (11.):

$$(12.) \qquad U(x_0 y_0) = \frac{1}{2\pi}\int\left(\overline{u}\frac{\partial \log r}{\partial p} - \overline{u'}\log r\right)ds.$$

Es zeigt dieser Ausdruck, dass die Grenzfunction U im ganzen Innern der Fläche S endlich und stetig ist, und dass dasselbe auch von ihren sämmtlichen partiellen Differentialquotienten gilt; denn nach bekannten Sätzen der Integralrechnung lassen sich in (12.) alle partiellen Differentiationen nach x_0 y_0 unter dem Integralzeichen ausführen. Endlich zeigt auch der Ausdruck (12.), dass im ganzen Innern von S die Differentialgleichung erfüllt ist:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_0^2} = 0.$$

Das Einzige, was nachzuweisen bleibt, ist nun, dass die so definirte Function U auch stetig in die am Rande vorgeschriebenen Werthe übergeht. Wäre dies nicht der Fall, so müsste sich u_n mit unendlich wachsendem n einer in einer Linie unstetigen Function unbegrenzt nähern, und zwar so, dass diese Unstetigkeitslinie gerade mit der Randcurve zusammenfällt. Dies aber kann nach *Riemann* nicht geschehen, wenn nicht $\Omega(u_n)$ mit wachsendem n über alle Grenzen wächst, so dass dies also durch die dem $\Omega(u_n)$ auferlegte beständige Abnahme ausgeschlossen ist *). Die oben ausgesprochene Behauptung ist somit in allen ihren Theilen nachgewiesen.

Die Forderung, dass die vorgeschriebene Randfunction in einzelnen Punkten gewisse sprungweise Aenderungen erleiden soll, musste bisher ausgeschlossen werden, weil für alle Functionen u, welche stetig in solche unstetigen Randwerthe übergehen, das Integral $\Omega(u)$ unendlich wird. Man führt aber diesen Fall leicht auf den früheren zurück wie folgt:

Es seien x_0, y_0; x_1, y_1; ... die Coordinaten der Unstetigkeitsstellen, die der Voraussetzung nach der Randcurve angehören.

Man setze:

$$\alpha+\beta i = A_0\log\left((x-x_0)+i(y-y_0)\right)+A_1\log\left((x-x_1)+i(y-y_1)\right)+\cdots.$$

---

*) Ein Beweisverfahren, welches näher auszuführen hier überflüssig erscheint, welches ganz analog ist dem erwähnten Beweis *Riemanns*, (Doctor-Dissertation §. 17) führt zu dem Schluss, dass die stetige Function u sich nicht einer in einzelnen Punkten des Randes unstetigen Function unbegrenzt annähern kann, ohne dass das Integral $\Omega(u)$ über alle Grenzen wächst. Damit ist der Zweifel ausgeschlossen, ob nicht die oben bestimmte Function U in einzelnen Punkten der Grenze von den vorgeschriebenen Randwerthen abweicht.

Sind die Constanten A_0, A_1 ... reell, so ist β im ganzen Gebiet endlich und abgesehen von den Punkten x_0, y_0; x_1, y_1; ... stetig. Geht man in der Richtung des Randes über einen dieser Punkte hinweg, so erleidet die Function β eine sprungweise Aenderung, welcher durch geeignete Bestimmung der Constanten A_0, A_1, ... ein beliebiger Werth ertheilt werden kann. Endlich genügt β der Gleichung:

$$\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\beta}{\partial y^2} = 0.$$

Sind nun die vorgeschriebenen Randwerthe der Function U wieder $\bar{u}$, so lässt sich β so bestimmen, dass $\bar{u}-\bar{\beta}$ am ganzen Rande stetig ist, und es kommt nur noch auf die Bestimmung von $U-\beta$ an, welches unter dem eben betrachteten Fall begriffen ist.

Den Fall, in welchem das in Rede stehende Flächenstück einen $\mu-1$fachen Verzweigungspunkt enthält, und seine Begrenzung durch eine einfache in sich zurücklaufende Linie gebildet ist, kann man auf den vorigen reduciren, indem man das Flächenstück abbildet mittelst der Substitution:

$$x+iy = (\xi+i\eta)^\mu,$$

wo der Einfachheit wegen angenommen ist, der Verzweigungspunkt sei der Anfangspunkt der Coordinaten. Man gelangt dann zu dem Schluss, dass in einem solchen Verzweigungspunkt die Function u zwar selbst, nicht mehr aber ihre Differentialquotienten stetig sind.

In dem allgemeineren Fall, in welchem die zu bestimmende Function gewisse gegebene Unstetigkeitsbedingungen zu erfüllen hat, wo die Fläche die xy-Ebene mehrfach bedeckt und irgend wie begrenzt oder auch ganz unbegrenzt ist, sind die Schwierigkeiten wesentlich dieselben wie in dem oben behandelten einfachen Fall. Es wird daher genügen, den Gang des Beweises kurz anzudeuten.

Es tritt hier an die Stelle des Integrals $\Omega(u)$ das Integral:

$$\iint\left\{\left(\frac{\partial(\alpha+u)}{\partial x}-\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial(\alpha+u)}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right\}dx\,dy,$$

wo die Functionen α, β in der Weise bestimmt sind, wie es bei *Riemann* (Doctor-Dissertation §. 16 ff.) auseinandergesetzt ist.

Man bestimmt nun genau nach derselben Regel wie oben eine Reihe von Functionen $u_1, u_2 \ldots u_n$, welche so weit fortgesetzt werden kann, bis der absolute Werth des Integrals:

$$\iint \left\{ \left(\frac{\partial(\alpha+u_n)}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial(\alpha+u_n)}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dx\,dy$$

kleiner als eine beliebig klein zu wählende Grösse ε_n ist für alle im Innern der Fläche stetigen, am Rande verschwindenden Functionen v, für welche $\Omega(v)$ endlich bleibt.

Schneidet man nun aus der ursprünglichen Fläche S ein beliebiges Stück K aus, in welchem die beiden Functionen α und β stetig sind, und betrachtet das über die Fläche K erstreckte Integral

$$\iint \left\{ \frac{\partial(\alpha+u_n)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha+u_n)}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dx\,dy,$$

so kann man auf dieselbe Weise wie oben schliessen, dass der Werth dieses Integrals mit unendlich wachsendem n sich einer bestimmten endlichen Grenze nähern muss, oder, was dasselbe ist, dass das Integral:

$$\iint_K \left\{ \frac{\partial(u_m-u_n)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial(u_m-u_n)}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dx\,dy$$

für beliebig grosse Werthe von m und gehörig grosse Werthe von n kleiner gemacht werden kann als eine beliebig kleine Grösse.

Es sei nun die Fläche K eine die xy-Ebene einfach bedeckende Kreisfläche. Man beweist leicht durch die *Fourier*sche Reihe, dass sich eine im Innern dieser Kreisfläche mit sämmtlichen Differentialquotienten stetige Function v bestimmen lässt, welche der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

genügt, deren Differentialquotient $\frac{\partial v}{\partial p}$ am ganzen Rande beliebig vorgeschriebene Werthe $\bar{\omega}$ hat, welche der einzigen Bedingung unterworfen sind, dass das über den Rand von K erstreckte Integral $\int \bar{\omega}\,ds$ verschwindet. Da sich nun die ganze Fläche S mit solchen Kreisen K allmählich erfüllen lässt, so schliesst man, durch ganz ähnliche Betrachtungen wie oben, dass die Differenz $u_m - u_n$ für alle Punkte von S bis in beliebige Nähe der Unstetigkeitspunkte der Functionen α, β und der Verzweigungspunkte der Fläche S kleiner gemacht werden kann als eine beliebig kleine Grösse, dass sich also u mit unendlich wachsendem n einer bestimmten Grenze nähert.

Von nun an wären die früheren Betrachtungen wörtlich zu wiederholen. Um die dort aufgestellten Formeln unmittelbar auf diesen allgemeineren Fall anwenden zu können, kam es nur darauf an, zu zeigen, dass das Integral:

$$\int u_n \frac{\partial \log r}{\partial p} ds,$$

welches in den Formeln (11.), (12.) vorkommt, mit unbegrenzt wachsendem n sich einer festen Grenze nähert, wenn man dasselbe über eine beliebige, im Innern von S geschlossene Curve erstreckt. Dies wird durch das Vorstehende erreicht. Dass auch in den Unstetigkeitspunkten von α, β diese Grenze stetig bleibt, ergiebt sich daraus, dass, der Voraussetzung gemäss, in der Nähe solcher Punkte

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0.$$

Man hat es also in der Umgebung solcher Punkte nur zu thun mit dem Integral:

$$\iint \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u_n}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\, dy,$$

welches für den Grenzwerth von u_n den Ausdruck liefert:

$$U = \frac{1}{2\pi} \int \left(\bar{u} \frac{\partial \log r}{\partial p} - \bar{u}' \log r \right) ds,$$

so dass U im Innern dieses ganzen Flächenstücks mit allen seinen Differentialquotienten stetig bleibt.

Heidelberg, im Juni 1869.

Von der Zerlegung der Discriminante der cubischen Gleichung, welche die Hauptaxen einer Fläche zweiter Ordnung bestimmen, in eine Summe von Quadraten.

(Von Herrn *G. Bauer* in München.)

Herr *Kummer* hatte zuerst die Idee, die Discriminante der cubischen Gleichung, von welcher die Hauptaxen der Fläche zweiter Ordnung abhängen, in eine Summe von Quadraten zu zerlegen, um hierdurch einen directen Beweis für die Realität der Wurzeln dieser Gleichung zu gewinnen. Er gelangte zu dieser Zerlegung, indem er von einem einfachen Fall ausgehend den schwierigen Weg der Versuche einschlug *).

Später erfand Herr *Borchardt* eine Methode, welche nicht nur die *Kummer*sche Zerlegung für die Gleichung dritten Grades giebt, sondern auch eine Ausdehnung gestattet auf die allgemeine Gleichung n^{ten} Grades, mit deren Hülfe man die seculären Störungen der Planeten findet **).

Neuerlich noch gab Herr *Hesse* eine andere Herleitung dieser Zerlegung, gestützt auf *Jacobi*sche Formeln der orthogonalen Substitution ***).

Es giebt aber für die Gleichung dritten Grades noch einen einfacheren Weg diese Zerlegung zu bewerkstelligen, der bisher nicht versucht wurde und hier gezeigt werden soll. Nach der erschöpfenden Arbeit von Herrn *Borchardt* kann die hier gegebene Zerlegung nur in sofern noch Beachtung beanspruchen, als sie mit den einfachsten Mitteln ausgeführt zugleich als die directeste erscheint, indem die Quadrate unmittelbar aus der Determinantenform der Discriminante sich entwickeln.

Sei die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung

$$ax^2+by^2+cz^2+2lyz+2mzx+2nxy+d = 0.$$

so hängt das Problem der Hauptaxen von der Gleichung

*) Dieses Journal Bd. XXVI.
**) Dieses Journal Bd. XXX. *Liouville,* Journal de Math. T. XII.
***) Vorles. über die anal. Geometrie des Raums, pag. 320.

$$(\mathrm{I.}) \qquad \begin{vmatrix} a-k & n & m \\ n & b-k & l \\ m & l & c-k \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$k^3-(a+b+c)\,k^2+(ab+bc+ca-l^2-m^2-n^2)\,k-(abc-al^2-bm^2-cn^2+2lmn)=0$$

ab. Setzen wir

$$(1.) \qquad \delta = \begin{vmatrix} a & n & m \\ n & b & l \\ m & l & c \end{vmatrix},$$

also

$$(2.) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\delta}{\partial a} = \delta_a = bc-l^2, & \frac{1}{2}\dfrac{\partial\delta}{\partial l} = \delta_l = nm-al, \\ \dfrac{\partial\delta}{\partial b} = \delta_b = ac-m^2, & \frac{1}{2}\dfrac{\partial\delta}{\partial m} = \delta_m = ln-bm, \\ \dfrac{\partial\delta}{\partial c} = \delta_c = ab-n^2, & \frac{1}{2}\dfrac{\partial\delta}{\partial n} = \delta_n = ml-cn \end{cases}$$

und

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial a\,\partial b} = \delta_{ab} = c, \quad \frac{\partial^2\delta}{\partial b\,\partial c} = \delta_{bc} = a, \quad \frac{\partial^2\delta}{\partial c\,\partial a} = \delta_{ca} = b,$$

so lässt sich die cubische Gleichung schreiben

$$(\mathrm{II.}) \qquad k^3-\Sigma\delta_{ab}\,.\,k^2+\Sigma\delta_a\,.\,k-\delta = 0.$$

Die Discriminante dieser Gleichung, welche gleich Null gesetzt die Bedingung ausdrückt, dass die Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat, ergiebt sich als Resultante aus den zwei Gleichungen

$$3k^2-2\Sigma\delta_{ab}\,.\,k+\Sigma\delta_a = 0, \quad -\Sigma\delta_{ab}\,.\,k^2+2\Sigma\delta_a\,.\,k-3\delta = 0.$$

Bedient man sich zur Bildung dieser Resultante des abgekürzten *Bezout*schen Verfahrens und nennt sie R, so wird

$$(\mathrm{III.}) \qquad R = \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix},$$

wo

$$\lambda_0 = 6\Sigma\delta_a-2(\Sigma\delta_{ab})^2, \quad \lambda_1 = -9\delta+\Sigma\delta_{ab}\,.\,\Sigma\delta_a, \quad \lambda_2 = 6\delta\,\Sigma\delta_{ab}-2(\Sigma\delta_a)^2.$$

Dieser Ausdruck R soll in eine Summe von Quadraten zerlegt werden. Da δ eine homogene Function dritten Grades der Grössen a, b, c, l, m, n ist, so hat man

$$3\delta = a\delta_a+b\delta_b+c\delta_c+2(l\delta_l+m\delta_m+n\delta_n) = \Sigma a\delta_a+2\Sigma l\delta_l.$$

Ferner ist nach einem bekannten Satze aus der Lehre der Determinanten

$$\delta \cdot \frac{\partial^2 \delta}{\partial a \partial c} = \frac{\partial \delta}{\partial a} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial c} - \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial \delta}{\partial m}\right)^2;$$

also

$$\delta . \delta_{ac} = \delta_a . \delta_c - \delta_m^2, \quad \delta . \delta_{cb} = \delta_c . \delta_b - \delta_l^2, \quad \delta . \delta_{ba} = \delta_b . \delta_a - \delta_n^2,$$
$$\delta . \Sigma \delta_{ab} = \Sigma(\delta_a . \delta_b) - \Sigma \delta_l^2.$$

Substituirt man diese Werthe von 3δ und $\delta . \Sigma \delta_{ab}$ in λ_1 und λ_2 und ersetzt in λ_0 die Summe $\delta_a + \delta_b + \delta_c$ durch ihren Werth $ab + bc + ca - (l^2 + m^2 + n^2)$, so nimmt R die Form an

$$R = \begin{vmatrix} A - 6\Sigma l^2 & B - 6\Sigma l \delta_l \\ B - 6\Sigma l \delta_l & C - 6\Sigma \delta_l^2 \end{vmatrix},$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$A = 6(ab + bc + ca) - 2(\Sigma \delta_{ab})^2 = 6(ab + bc + ca) - 2(a + b + c)^2 = (\Sigma a)^2 - 3\Sigma a^2,$$
$$B = \Sigma a \Sigma \delta_a - 3\Sigma a \delta_a,$$
$$C = 6\Sigma(\delta_a . \delta_b) - 2(\Sigma \delta_a)^2 = (\Sigma \delta_a)^2 - 3\Sigma \delta_a^2.$$

Diese Determinante R zerfällt nun in vier Determinanten, nämlich

$$\text{(IV.)} \quad R = 36 \begin{vmatrix} \Sigma l^2 & \Sigma l \delta_l \\ \Sigma l \delta_l & \Sigma \delta_l^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} + 6 \left\{ \begin{vmatrix} A & -\Sigma l \delta_l \\ B & -\Sigma \delta_l^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\Sigma l^2 & B \\ -\Sigma l \delta_l & C \end{vmatrix} \right\}.$$

Die erste dieser Determinanten ist nach einer bekannten Formel

$$\text{(3.)} \quad = (l\delta_m - m\delta_l)^2 + (m\delta_n - n\delta_m)^2 + (n\delta_l - l\delta_n)^2.$$

Die zweite

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\Sigma a)^2 - 3\Sigma a^2 & \Sigma a . \Sigma \delta_a - 3\Sigma a \delta_a \\ \Sigma a . \Sigma \delta_a - 3\Sigma a \delta_a & (\Sigma \delta_a)^2 - 3\Sigma \delta_a^2 \end{vmatrix}$$

findet man, entwickelt, nach wenigen Reductionen

$$\text{(4.)} \quad = 3[(a\delta_b - b\delta_a) + (b\delta_c - c\delta_b) + (c\delta_a - a\delta_c)]^2.$$

Zu diesem Resultat gelangt man aber auch auf folgende Weise. Bezeichnet man für einen Augenblick ein Element der Determinante

$$Q = \begin{vmatrix} 3 & \Sigma a & \Sigma \delta_a \\ \Sigma a & \Sigma a^2 & \Sigma a \delta_a \\ \Sigma \delta_a & \Sigma a \delta_a & \Sigma \delta_a^2 \end{vmatrix}$$

durch das Symbol a_{ik} und den Coefficienten dieses Elements in der Determinante durch α_{ik}, so ist, wie man sogleich ersieht,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{33} & \alpha_{23} \\ \alpha_{23} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix}.$$

Diese Unterdeterminante des adjungirten Systems ist aber $= Q.a_{11} = 3Q$. Ferner ist Q selbst das Quadrat der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \delta_a & \delta_b & \delta_c \end{vmatrix}.$$

Also

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \delta_a & \delta_b & \delta_c \end{vmatrix}^2$$

übereinstimmend mit dem oben gegebenen Werth.

Was endlich die zwei letzten Determinanten betrifft, aus welchen R besteht, so kann man, da A, B, C nach der hier gebrauchten Bezeichnung die l, m, n nicht explicite enthalten, für ihre Summe schreiben

$$\sum^{l,m,n} \left\{ \begin{vmatrix} A & -l\delta_l \\ B & -\delta_l^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -l^2 & B \\ -l\delta_l & C \end{vmatrix} \right\} = \sum^{l,m,n} (2B.l\delta_l - A.\delta_l^2 - C.l^2).$$

Setzt man für A, B, C ihre Werthe, so wird die Grösse unter dem Summenzeichen

$$\begin{aligned} &= 3(-2l\delta_l \Sigma a\delta_a + \delta_l^2 \Sigma a^2 + l^2 \Sigma \delta_a^2) + 2l\delta_l \Sigma a \Sigma \delta_a - \delta_l^2 (\Sigma a)^2 - l^2 (\Sigma \delta_a)^2 \\ &= 3\{\Sigma a^2 \delta_l^2 + \Sigma l^2 \delta_a^2 - 2\Sigma (a\delta_l . l\delta_a)\} - (\delta_l \Sigma a - l \Sigma \delta_a)^2 \\ &= 3\Sigma (a\delta_l - l\delta_a)^2 - (\Sigma (a\delta_l - l\delta_a))^2 \end{aligned}$$

oder, wenn wir zur Abkürzung $[a\delta_l]$ für $a\delta_l - l\delta_a$ schreiben,

$$(5.) \qquad = 2\{[a\delta_l]^2 + [b\delta_l]^2 + [c\delta_l]^2 - [a\delta_l][b\delta_l] - [b\delta_l][c\delta_l] - [c\delta_l][a\delta_l]\}.$$

Bezeichnen wir diesen Ausdruck abgesehen vom Factor 2 durch S_l und ebenso durch S_m und S_n das, was dieser Ausdruck wird, wenn man δ_l mit δ_m und δ_n vertauscht, so ist mithin die Summe der zwei letzten Determinanten in R (IV.) gleich $2(S_l + S_m + S_n)$, und man hat

$$(V.) \quad \tfrac{1}{3}R = 12\{[l\delta_m]^2 + [m\delta_n]^2 + [n\delta_l]^2\} + ([a\delta_b] + [b\delta_c] + [c\delta_a])^2 + 4S_l + 4S_m + 4S_n,$$

wenn analog der eben gebrauchten Bezeichnung

$$l\delta_m - m\delta_l = [l\delta_m], \quad a\delta_b - b\delta_a = [a\delta_b] \quad \text{u. s. f.}$$

gesetzt wird.

Die Grössen S_l, S_m, S_n sind wesentlich positiv und können auf verschiedene Weise in Quadrate zerfällt werden. Benutzt man die Formel

$$4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) = (2\alpha - \beta - \gamma)^2 + 3(\beta - \gamma)^2,$$

so erhält man

$$\begin{aligned} 4S_l &= (2[a\delta_l]-[b\delta_l]-[c\delta_l])^2+3([b\delta_l]-[c\delta_l])^2 \\ &= (2[b\delta_l]-[a\delta_l]-[c\delta_l])^2+3([c\delta_l]-[a\delta_l])^2 \\ &= (2[c\delta_l]-[a\delta_l]-[b\delta_l])^2+3([a\delta_l]-[b\delta_l])^2. \end{aligned}$$

Zerlegt man ebenso S_m und S_n in je zwei Quadrate, so erhält man R dargestellt als Summe von 10 Quadraten. Aber vermöge der leicht zu beweisenden Relationen

$$(6.)\qquad [a\delta_n]-[b\delta_n]=[l\delta_m],\quad [b\delta_l]-[c\delta_l]=[m\delta_n],\quad [c\delta_m]-[a\delta_m]=[n\delta_l]$$

wird bei passender Wahl der Zerlegung je eines der in S_l, S_m, S_n enthaltenen Quadrate einem der Quadrate $[l\delta_m]^2$, $[m\delta_n]^2$, $[n\delta_l]^2$ gleich; und man erhält sodann die *Kummer*sche Zerlegung von R in nur 7 Quadrate, in der Form, welche ihr *Jacobi* gegeben hat *). Führt man die Bezeichnung ein

$$[a\delta_l]-[b\delta_l] = [a\delta_l, b\delta_l],$$

so ist diese Zerlegung

$$(\text{VI.})\quad \begin{cases} \frac{1}{3}R = 15([l\delta_m]^2+[m\delta_n]^2+[n\delta_l]^2)+([a\delta_b]+[b\delta_c]+[c\delta_a])^2 \\ \quad +([a\delta_l, b\delta_l]-[c\delta_l, a\delta_l])^2+([b\delta_m, c\delta_m]-[a\delta_m, b\delta_m])^2 \\ \qquad\qquad +([c\delta_n, a\delta_n]-[b\delta_n, c\delta_n])^2. \end{cases}$$

Man kann aber auch $2S_l$ (5.) nach der Formel

$$2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha) = (\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2$$

zerlegen und ebenso $2S_m$ und $2S_n$. Man erhält dadurch für R eine Zerlegung in 13 Quadrate, auf welche auch Herr *Borchardt* durch seine Methode zunächst geführt wird **). Mittelst der Gleichungen (6.) reduciren sich jedoch die 13 Quadrate auf 10, und man erhält

$$(\text{VII.})\quad \begin{cases} \frac{1}{3}R = 14([l\delta_m]^2+[m\delta_n]^2+[n\delta_l]^2)+([a\delta_b]+[b\delta_c]+[c\delta_a])^2 \\ \quad +2([a\delta_l, b\delta_l]^2+[c\delta_l, a\delta_l]^2+[b\delta_m, c\delta_m]^2+[a\delta_m, b\delta_m]^2 \\ \qquad\qquad +[c\delta_n, a\delta_n]^2+[b\delta_n, c\delta_n]^2), \end{cases}$$

eine Zerlegung von R, welche obwohl mehr Quadrate enthaltend als die Zerlegung (V.) insofern einfacher als jene erscheint, als die Quadrate einfacher zusammengesetzt sind.

Damit $R=0$ und folglich die Fläche eine Rotationsfläche sei, ist bekanntlich nur erforderlich, dass zwei der drei ersten Quadrate verschwinden,

---

*) Dieses Journal Bd. XXX, pag. 46.

**) *Liouville,* Journal de Math. T. XII, pag. 66.

indem die übrigen zugleich verschwinden. Da in keiner der angeführten Abhandlungen angegeben ist, wie die Quadrate in R aus den drei Grössen $[l\delta_m]$, $[m\delta_n]$, $[n\delta_l]$ zusammengesetzt sind, um zugleich mit diesen zu verschwinden, so mögen hier noch die betreffenden Relationen Platz finden. Die drei Grössen selbst hängen unter einander durch die Gleichung zusammen

$$n[l\delta_m]+m[n\delta_l]+l[m\delta_n] = 0.$$

Aus der zweiten der Gleichungen (6.) folgt

$$(b-c)\delta_l - l(\delta_b-\delta_c) = [m\delta_n].$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit m und addirt $l(b\delta_m - c\delta_m)$, so erhält man sogleich die erste der folgenden Relationen:

$$\begin{aligned}
l[b\delta_m, c\delta_m] &= (b-c)[l\delta_m]-m[n\delta_m],\\
l[b\delta_n, c\delta_n] &= (b-c)[l\delta_n]-n[m\delta_n],\\
m[c\delta_n, a\delta_n] &= (c-a)[m\delta_n]-n[l\delta_n],\\
m[c\delta_l, a\delta_l] &= (c-a)[m\delta_l]-l[n\delta_l],\\
n[a\delta_l, b\delta_l] &= (a-b)[n\delta_l]-l[m\delta_l],\\
n[a\delta_m, b\delta_m] &= (a-b)[n\delta_m]-m[l\delta_m].
\end{aligned}$$

Endlich hat man

$$[a\delta_b]+[b\delta_c]+[c\delta_a] = a(\delta_b-\delta_c)+b(\delta_c-\delta_a)+c(\delta_a-\delta_c)$$

$$= \frac{a(b-c)}{l}\delta_l+\frac{b(c-a)}{m}\delta_m+\frac{c(a-b)}{n}\delta_n-\frac{a}{l}[m\delta_n]-\frac{b}{m}[n\delta_l]-\frac{c}{n}[l\delta_m]$$

$$= -\left(\frac{ab}{lm}+\frac{c}{n}\right)[l\delta_m]-\left(\frac{bc}{mn}+\frac{a}{l}\right)[m\delta_n]-\left(\frac{ca}{nl}+\frac{b}{m}\right)[n\delta_l].$$

München, April 1868.

Von den Kreisschnitten der Flächen zweiter Ordnung.

(Von Herrn *G. Bauer* in München.)

Wenn eine Fläche zweiter Ordnung, deren Gleichung

$$(1.)\quad ax^2+by^2+cz^2+2lyz+2mzx+2nxy+2px+2qy+2rz+d = 0$$

ist, von einer Ebene, deren Gleichung

$$(2.)\quad \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta = 0$$

ist, geschnitten wird, so ist die quadratische Gleichung, von welcher die Axen des Schnitts abhängen,

$$(3.)\quad \begin{vmatrix} a-k & n & m & \alpha \\ n & b-k & l & \beta \\ m & l & c-k & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Herr *Hesse* *) hat die Discriminante dieser quadratischen Gleichung auf verschiedene Weise in Summen von Quadraten zerlegt, indem er sie als Summe von 10, 7, 6 oder 5 Quadraten darstellte. Seitdem ist es Herrn *Henrici* **) gelungen, auch eine Zerlegung in nur zwei Quadrate zu bewerkstelligen. Es lässt sich aber auf ganz directem Wege eine Zerlegung dieser Art erzielen, welche den Vorzug hat, dass in ihr die Zusammensetzung der Quadrate klar hervortritt, und daher auch die Bedingungen für das Verschwinden derselben, also für die Gleichheit der Wurzeln der quadratischen Gleichung sich unmittelbar und zwar in bemerkenswerth einfacher Form ergeben.

1. Setzt man

$$(4.)\quad \Delta = -\begin{vmatrix} a & n & m & \alpha \\ n & b & l & \beta \\ m & l & c & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix},$$

*) Dieses Journal Bd. 60, pag. 305.
**) Dieses Journal Bd. 64, pag. 187.

$$(5.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Delta}{\partial a} = \Delta_a = -2l\beta\gamma + c\beta^2 + b\gamma^2, \\ \dfrac{\partial \Delta}{\partial b} = \Delta_b = -2m\alpha\gamma + c\alpha^2 + a\gamma^2, \\ \dfrac{\partial \Delta}{\partial c} = \Delta_c = -2n\alpha\beta + a\beta^2 + b\alpha^2, \end{cases}$$

$$(6.)\quad \begin{cases} \tfrac{1}{2}\dfrac{\partial \Delta}{\partial l} = \Delta_l = \alpha(-l\alpha + m\beta + n\gamma) - a\beta\gamma, \\ \tfrac{1}{2}\dfrac{\partial \Delta}{\partial m} = \Delta_m = \beta(\ \ l\alpha - m\beta + n\gamma) - b\gamma\alpha, \\ \tfrac{1}{2}\dfrac{\partial \Delta}{\partial n} = \Delta_n = \gamma(\ \ l\alpha + m\beta - n\gamma) - c\alpha\beta, \end{cases}$$

so lässt sich die quadratische Gleichung (3.) schreiben

$$(7.)\quad (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)k^2 - (\Delta_a+\Delta_b+\Delta_c)k + \Delta = 0,$$

und ihre Discriminante wird

$$(8.)\quad R = (\Delta_a+\Delta_b+\Delta_c)^2 - 4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\Delta.$$

Verschwindet dieser Ausdruck R, so hat die Gleichung (3.) gleiche Wurzeln, und der Schnitt der Fläche (1.) durch die Ebene (2.) ist ein Kreis.

2. Betrachten wir zunächst den speciellen Fall, in welchem $l=m=n=0$ ist, also die Coordinatenaxen parallel zu den Hauptaxen der Fläche liegen; dann wird

$$(9.)\quad R = [(b+c)\alpha^2 + (c+a)\beta^2 + (a+b)\gamma^2]^2 - 4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(bc\alpha^2 + ca\beta^2 + ab\gamma^2).$$

Dieser Ausdruck von R reducirt sich leicht auf folgenden

$$(10.)\quad \begin{cases} R = (b-c)^2\alpha^4 + (c-a)^2\beta^4 + (a-b)^2\gamma^4 - 2(b-c)(c-a)\alpha^2\beta^2 \\ \qquad\qquad - 2(a-b)(b-c)\alpha^2\gamma^2 - 2(b-a)(a-c)\beta^2\gamma^2, \end{cases}$$

welcher bekanntlich in vier Factoren, in der Formel

$$\alpha\sqrt{b-c} \pm \beta\sqrt{c-a} \pm \gamma\sqrt{a-b}$$

enthalten, zerfällt und hierdurch sogleich die Bedingungen erkennen lässt, welche für Kreisschnitte obwalten. Wir werden nun, indem wir zum allgemeinen Fall zurückkehren, zuerst den Ausdruck (8.) von R auf eine der Form (10.) ähnliche Form zurückführen.

3. Ersetzen wir zunächst

l	m	n	a	b	c

durch

$\dfrac{l}{\alpha}$	$\dfrac{m}{\beta}$	$\dfrac{n}{\gamma}$	$\dfrac{a\alpha}{\beta\gamma}$	$\dfrac{b\beta}{\gamma\alpha}$	$\dfrac{c\gamma}{\alpha\beta}$,

Von den Kreisschnitten der Flächen zweiter Ordnung.

(Von Herrn *G. Bauer* in München.)

Wenn eine Fläche zweiter Ordnung, deren Gleichung

$$(1.)\quad ax^2+by^2+cz^2+2lyz+2mzx+2nxy+2px+2qy+2rz+d = 0$$

ist, von einer Ebene, deren Gleichung

$$(2.)\quad \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta = 0$$

ist, geschnitten wird, so ist die quadratische Gleichung, von welcher die Axen des Schnitts abhängen,

$$(3.)\quad \begin{vmatrix} a-k & n & m & \alpha \\ n & b-k & l & \beta \\ m & l & c-k & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Herr *Hesse* *) hat die Discriminante dieser quadratischen Gleichung auf verschiedene Weise in Summen von Quadraten zerlegt, indem er sie als Summe von 10, 7, 6 oder 5 Quadraten darstellte. Seitdem ist es Herrn *Henrici* **) gelungen, auch eine Zerlegung in nur zwei Quadrate zu bewerkstelligen. Es lässt sich aber auf ganz directem Wege eine Zerlegung dieser Art erzielen, welche den Vorzug hat, dass in ihr die Zusammensetzung der Quadrate klar hervortritt, und daher auch die Bedingungen für das Verschwinden derselben, also für die Gleichheit der Wurzeln der quadratischen Gleichung sich unmittelbar und zwar in bemerkenswerth einfacher Form ergeben.

1. Setzt man

$$(4.)\quad \Delta = -\begin{vmatrix} a & n & m & \alpha \\ n & b & l & \beta \\ m & l & c & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix},$$

*) Dieses Journal Bd. 60, pag. 305.
**) Dieses Journal Bd. 64, pag. 187.

$$(5.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Delta}{\partial a} = \Delta_a = -2l\beta\gamma + c\beta^2 + b\gamma^2, \\ \dfrac{\partial \Delta}{\partial b} = \Delta_b = -2m\alpha\gamma + c\alpha^2 + a\gamma^2, \\ \dfrac{\partial \Delta}{\partial c} = \Delta_c = -2n\alpha\beta + a\beta^2 + b\alpha^2, \end{cases}$$

$$(6.)\quad \begin{cases} \tfrac{1}{2}\dfrac{\partial \Delta}{\partial l} = \Delta_l = \alpha(-l\alpha + m\beta + n\gamma) - a\beta\gamma, \\ \tfrac{1}{2}\dfrac{\partial \Delta}{\partial m} = \Delta_m = \beta(\ \ l\alpha - m\beta + n\gamma) - b\gamma\alpha, \\ \tfrac{1}{2}\dfrac{\partial \Delta}{\partial n} = \Delta_n = \gamma(\ \ l\alpha + m\beta - n\gamma) - c\alpha\beta, \end{cases}$$

so lässt sich die quadratische Gleichung (3.) schreiben

$$(7.)\quad (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)k^2 - (\Delta_a+\Delta_b+\Delta_c)k + \Delta = 0,$$

und ihre Discriminante wird

$$(8.)\quad R = (\Delta_a+\Delta_b+\Delta_c)^2 - 4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\Delta.$$

Verschwindet dieser Ausdruck R, so hat die Gleichung (3.) gleiche Wurzeln, und der Schnitt der Fläche (1.) durch die Ebene (2.) ist ein Kreis.

2. Betrachten wir zunächst den speciellen Fall, in welchem $l=m=n=0$ ist, also die Coordinatenaxen parallel zu den Hauptaxen der Fläche liegen; dann wird

$$(9.)\quad R = [(b+c)\alpha^2 + (c+a)\beta^2 + (a+b)\gamma^2]^2 - 4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(bc\alpha^2 + ca\beta^2 + ab\gamma^2).$$

Dieser Ausdruck von R reducirt sich leicht auf folgenden

$$(10.)\quad \begin{cases} R = (b-c)^2\alpha^4 + (c-a)^2\beta^4 + (a-b)^2\gamma^4 - 2(b-c)(c-a)\alpha^2\beta^2 \\ \qquad\qquad - 2(a-b)(b-c)\alpha^2\gamma^2 - 2(b-a)(a-c)\beta^2\gamma^2, \end{cases}$$

welcher bekanntlich in vier Factoren, in der Formel

$$\alpha\sqrt{b-c} \pm \beta\sqrt{c-a} \pm \gamma\sqrt{a-b}$$

enthalten, zerfällt und hierdurch sogleich die Bedingungen erkennen lässt, welche für Kreisschnitte obwalten. Wir werden nun, indem wir zum allgemeinen Fall zurückkehren, zuerst den Ausdruck (8.) von R auf eine der Form (10.) ähnliche Form zurückführen.

3. Ersetzen wir zunächst

$$l \quad m \quad n \quad a \quad b \quad c$$

durch

$$\frac{l}{\alpha} \quad \frac{m}{\beta} \quad \frac{n}{\gamma} \quad \frac{a\alpha}{\beta\gamma} \quad \frac{b\beta}{\gamma\alpha} \quad \frac{c\gamma}{\alpha\beta},$$

so erhalten wir eine bedeutende Vereinfachung, indem die Determinante $\triangle$ übergeht, wie leicht zu sehen, in

$$(11.) \qquad D = -\begin{vmatrix} a & n & m & 1 \\ n & b & l & 1 \\ m & l & c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Zugleich geht die Gleichung (3.) oder (7.) über in

$$(12.) \qquad \alpha\beta\gamma(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)k^2-(\beta^2\gamma^2 D_a+\gamma^2\alpha^2 D_b+\alpha^2\beta^2 D_c)k+\alpha\beta\gamma D = 0,$$

wo

$$(13.) \quad D_a=\frac{\partial D}{\partial a}=c+b-2l, \quad D_b=\frac{\partial D}{\partial b}=c+a-2m, \quad D_c=\frac{\partial D}{\partial c}=a+b-2n.$$

Bezeichnen wir mit R' die Discriminante dieser Gleichung (12.) und setzen zur Abkürzung

$$(14.) \qquad \beta^2\gamma^2=\lambda, \quad \gamma^2\alpha^2=\mu, \quad \alpha^2\beta^2=\nu,$$

so ist

$$(15.) \qquad R' = (\lambda D_a+\mu D_b+\nu D_c)^2-4(\lambda\mu+\mu\nu+\nu\lambda)D.$$

Nun ist aber

$$(16.) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial l}=D_l=-l+m+n-a, & \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial m}=D_m=l-m+n-b, \\ & \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial n}=D_n=l+m-n-c, \end{cases}$$

mithin

$$(17.) \qquad D_l+D_m=-D_c, \quad D_m+D_n=-D_a, \quad D_n+D_l=-D_b.$$

Ferner ist, da D eine homogene Function zweiten Grades der Grössen a, b, c, l, m, n ist,

$$2D = aD_a+bD_b+cD_c+2lD_l+2mD_m+2nD_n.$$

Ersetzt man hierin D_a, D_b, D_c durch ihre Werthe aus (17.) und berücksichtigt hierauf die Gleichungen (13.), so kommt

$$2D = -D_aD_l-D_bD_m-D_cD_n$$

oder endlich, wenn man wiederum für D_a, D_b, D_c ihre Werthe aus (17.) setzt,

$$(18.) \qquad D = D_lD_m+D_mD_n+D_nD_l.$$

Vermöge der Gleichungen (17.) und (18.) wird nun die Formel für R'

$$(19.) \quad R'=[\lambda(D_m+D_n)+\mu(D_n+D_l)+\nu(D_l+D_m)]^2-4(\lambda\mu+\mu\nu+\nu\lambda)(D_lD_m+D_mD_n+D_nD_l).$$

Multipliciren wir nun den Ausdruck (9.), welchen wir für R unter der Voraussetzung $l=m=n=0$ fanden, mit $\alpha^4\beta^4\gamma^4$ und ersetzen hierauf a, b, c durch

Dazu kommt noch für jeden Punkt des Innern die Gleichung

$$(B.) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$

und für jeden Punkt der Oberfläche, wenn a, b, c die Winkel der nach Innen gerichteten Normale mit den Coordinaten-Axen bezeichnen,

$$(C.) \qquad u\cos\mathfrak{a}+v\cos\mathfrak{b}+w\cos\mathfrak{c} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial t},$$

welche drei Gleichungen, wenn man μ, X, Y, Z, Q gleich Null setzt, mit den von Herrn *Kirchhoff* a. a. O. aufgestellten übereinstimmen.

Die Grösse $\mu = 2k\frac{m}{\delta}$, welche man in der bisherigen Theorie als ihrer Kleinheit halber ausserhalb des Bereichs unsrer Wahrnehmung fallend vernachlässigt hat, ist ein neues Element, welches Herr *Weber* a. a. O. in die Theorie der elektrischen Strömungen eingeführt hat, und dessen experimenteller Bestimmung er seine nächste Untersuchung zu widmen verspricht. Erinnert man sich, dass die in mechanischem Mass ausgedrückte Elektricitätsmenge δ nach ihrer Definition die Kraft angiebt, welche diese Elektricität auf die mechanische Masseinheit positiver Elektricität in der Entfernung 1 ausübt, so sieht man, dass der Quotient $\frac{m}{\delta} = \frac{m\delta}{\delta^2}$ das Verhältniss der (in Masseneinheiten, z. B. in Milligrammen ausgedrückten) Elektricitätsmasse in der Volumeinheit zu der von ihr auf eine gleiche Masse in der Entfernung 1 ausgeübten Kraft angiebt, oder dass $\frac{\delta}{m}$ die Kraft der Elektricität in der Volumeinheit auf 1^{mgr} Elektricität in der Entfernung 1 ist.

§. 2. Umformung der Gleichungen.

Um die Gleichungen $(A.)$ in Differentialgleichungen umzuformen, bezeichnen wir $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ mit $\Delta\varphi$ und beachten die aus (1.) für alle Punkte im Innern des Körpers folgenden Gleichungen

$$(2.) \qquad \frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0, \qquad \Delta X=\Delta Y=\Delta Z=\Delta Q=0.$$

Wir erhalten dann aus $(A.)$

$$(3.) \qquad \mu\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}+\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+16\pi k\varepsilon-2h\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2} = 0,$$

$$(4.) \qquad \mu\frac{\partial^3\varepsilon}{\partial x\,\partial t^2}+\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x\,\partial t}+8\pi k\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}+\left(\mu\frac{\partial}{\partial t}+1\right)\Delta u-8\pi h\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

und zwei der letztern analoge Gleichungen für die y- und z-Axe. Abgesehen von den in μ multiplicirten Gliedern ist die Gleichung (3.) schon von Herrn *Kirchhoff*, die Gleichung (4.) von Herrn *Weingarten* a. a. O. abgeleitet worden; auch bemerkt schon Herr *Kirchhoff*, es folge aus Gleichung (3.), dass die freie Elektricität im Innern im Allgemeinen nicht verschwinden kann. Um in den Differentialgleichungen (4.) die Unbekannten zu trennen, setzen wir

$$(\mathrm{I}) \qquad 8\pi u = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial t} + \chi_1, \quad 8\pi v = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial t} + \chi_2, \quad 8\pi w = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z \partial t} + \chi_3,$$

dann geht die Gleichung (*B.*) über in

$$(\mathrm{II.}) \qquad \frac{\partial \chi_1}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \chi_3}{\partial z} = 0,$$

welche Gleichung aussagt, dass die zweiten Theile χ_1, χ_2, χ_3 der Ausdrücke für die Stromdichtigkeiten der Art sind, dass sie keine Verdichtung der Elektricität *und folglich auch keine Ansammlung freier Elektricität veranlassen.* Bezeichnen wir ferner mit $\frac{\partial}{\partial N}$ eine Differentiation nach der nach Innen gerichteten Normale der Oberfläche, mit Ω_α den ausserhalb des Körpers stattfindenden Werth von Ω und beachten die bekannte Gleichung

$$-4\pi e = \frac{\partial \Omega}{\partial N} - \frac{\partial \Omega_\alpha}{\partial N},$$

so geht die Gleichung (*C.*) über in

$$(\mathrm{III.}) \qquad \chi_1 \cos a + \chi_2 \cos b + \chi_3 \cos c = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Omega_\alpha}{\partial N},$$

aus welcher folgt, dass χ_1, χ_2, χ_3 im Allgemeinen nicht gleich Null sein können. Die Einsetzung der Werthe (I.) in Gleichung (4.) giebt, nach Subtraction der nach x differentiirten Gleichung (3.),

$$\mu \frac{\partial \Delta \chi_1}{\partial t} + \Delta \chi_1 - 8\pi h \frac{\partial \chi_1}{\partial t} = 0,$$

und zwei ebensolche Gleichungen erhält man für χ_2 und χ_3; die zweiten Theile der Ausdrücke (I.) sind also drei solche Integrale der Differentialgleichung

$$(\mathrm{IV.}) \qquad \left(\mu \frac{\partial}{\partial t} + 1\right) \Delta \chi - 8\pi h \frac{\partial \chi}{\partial t} = 0,$$

welche zugleich den Gleichungen (II.) und (III.) genügen. Die Gleichung (IV.) stimmt, abgesehen von dem in μ multiplicirten Gliede der Form nach mit der Gleichung überein, durch welche bei dem Problem der Wärmeleitung die Temperatur bestimmt wird. Das Potential Ω endlich bestimmt sich durch die Gleichung

(3.), oder, wegen $-4\pi\varepsilon = \Delta\Omega$, durch die mit ihr identische

$$(V.) \quad \left(\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial t}+16\pi k\right)\Delta\Omega+8\pi h\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2} = 0.$$

Durch die Gleichungen (I.) bis (III.) sind die Gleichungen (*B.*) und (*C.*) des §. 1 erfüllt; die Gleichungen (*A.*) aber werden durch die Gleichungen (IV.) und (V.), welche aus jenen durch Differentiation entstanden sind, nicht ohne hinzukommende Bedingungen erfüllt sein. Diese Bedingungen ergeben sich mit Benutzung der aus dem *Green*schen Satze für eine beliebige Function φ folgenden Gleichungen

$$(5.) \quad \int\frac{\Delta\varphi'}{r}d\tau = \Delta\int\frac{\varphi'}{r}d\tau-\int\frac{d\sigma}{r^2}\frac{\partial(r\varphi')}{\partial N},$$

$$(6.) \quad \int r\,\Delta\varphi'd\tau = 2\int\frac{\varphi'}{r}d\tau-\int r\frac{\partial\varphi'}{\partial N}d\sigma+\int\varphi'\frac{\partial r}{\partial N}d\sigma$$

auf dem von Herrn *Weingarten* a. a. O. angedeuteten Wege in folgender Form:

$$(VI.)\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[2h\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\int\Big(\Omega'\dfrac{\partial r}{\partial N}-r\dfrac{\partial\Omega'_a}{\partial N}\Big)d\sigma+\dfrac{1}{4\pi}\Big(\mu\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}+\dfrac{\partial}{\partial t}+16\pi k\Big)\int\dfrac{\partial\sigma}{r^2}\dfrac{\partial(r\Omega')}{\partial N}-16\pi kQ\Big]\\ \quad+2h\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\int\Omega'\cos\alpha'\dfrac{d\sigma}{r}+\dfrac{1}{4\pi}\Big(\mu\dfrac{\partial}{\partial t}+1\Big)\int\dfrac{d\sigma}{r^2}\dfrac{\partial(r\chi'_1)}{\partial N}+16\pi kX = 0\end{cases}$$

und zwei analoge Gleichungen für die y- und z-Axe; diese Gleichungen, welche wir abkürzend

$$(VI^a.) \quad \frac{\partial V}{\partial x}+U_1=0, \quad \frac{\partial V}{\partial y}+U_2=0, \quad \frac{\partial V}{\partial z}+U_3=0$$

schreiben wollen, sind also die Bedingungen, denen die Werthe von Ω und χ an der Oberfläche noch genügen müssen, wenn aus den Gleichungen (I.)–(V.) die ursprünglichen Gleichungen (*A.*), (*B.*), (*C.*) folgen sollen.

Es ist wesentlich, zu bemerken, dass sämmtliche in den Gleichungen (VI.) vorkommende Integrale J im Innern des Körpers der Gleichung $\Delta J = 0$ genügen, und also, ebenso wie Q und X, Y, Z, als Potentiale äusserer Massen oder Flächenbelegungen für den innern Raum des Körpers betrachtet werden können. Nämlich $\int\frac{d\sigma}{r^2}\frac{\partial(r\varphi')}{\partial N}$, wo φ eine beliebige Function bedeutet, ist nach (5.) eine an der Oberfläche discontinuirliche Function, welche sich innen auf $-\int\frac{\Delta\varphi'}{r}d\tau-4\pi\varphi$, aussen auf $-\int\frac{\Delta\varphi'}{r}d\tau$ reducirt, also sowohl innen als aussen der Gleichung $\Delta\int\frac{d\sigma}{r^2}\frac{\partial(r\varphi')}{\partial N}=0$ genügt; für $\varphi=\Omega$ ist innen

$$\int\frac{d\sigma}{r^2}\frac{\partial(r\Omega')}{\partial N}=4\pi\int\frac{\varepsilon'}{r}d\tau-4\pi\Omega=-4\pi\Omega_f,$$

wo Ω_f das Potential der elektrischen Flächenbelegung des Körpers bezeichnet, aussen

$$\int \frac{d\sigma}{r^2} \frac{\partial (r\Omega')}{\partial N} = 4\pi(\Omega - \Omega_f).$$

Um auch $\int \left(\Omega' \frac{\partial r}{\partial N} - r \frac{\partial \Omega'_a}{\partial N}\right) d\sigma$ als Potential äusserer Massen darzustellen, bezeichnen wir mit dv das Element des zwischen dem Körper und einer ihn umschliessenden Kugel vom Radius c enthaltenen Raums, mit M die Summe der das Potential Ω erzeugenden Massen; dann ergiebt sich aus (6.)

$$(7.) \quad \int \left(\Omega' \frac{\partial r}{\partial N} - r \frac{\partial \Omega'_a}{\partial N}\right) d\sigma = 2\lim\left(\int \frac{\Omega'_a}{r}\, dv - 4\pi M c\right) \quad (\lim c = \infty).$$

Der rechts stehende Ausdruck ist aber offenbar für den innern Raum ein Potential äusserer Massen; nicht so im äussern Raum, wo sein Δ nicht gleich Null, sondern gleich $-8\pi\Omega_a$ ist. Hiernach ist auch der ganze auf der linken Seite der Gleichung (VI.) stehende Ausdruck für alle Punkte des innern Raumes ein Potential äusserer Massen, woraus folgt, dass die Gleichungen (VI.) bloss an der Oberfläche erfüllt zu sein brauchen. Die physikalische Bedeutung jenes Ausdrucks ist die, dass er, wenn man unter r nicht wie in der Gleichung (VI.) die Entfernung von einem innern, sondern von einem äussern Punkt p versteht, die mit $-16\pi k$ multiplicirte x-Componente der elektromotorischen Kraft bezeichnet, welche die Strömungen und die freie Elektricität des Körpers sammt den äussern elektrischen Massen und Strömen auf den Punkt p ausüben.

Wegen $\Delta V = 0$ folgt aus den Gleichungen (VI^a.)

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_3}{\partial z} = 0,$$

und diese Gleichung ergiebt sich unter Berücksichtigung von (II.), (IV.), (2.) und von bekannten Eigenschaften des Potentials als identisch mit der folgenden

$$(8.) \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\chi_1 \cos \mathfrak{a} + \chi_2 \cos \mathfrak{b} + \chi_3 \cos \mathfrak{c} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Omega_a}{\partial N}\right) = 0,$$

d. h. der eingeklammerte Ausdruck hat einen von der Zeit unabhängigen Werth, ist also beständig gleich Null, wenn er zu irgend einer Zeit verschwindet. Diese Bedingung wird aber im allgemeinen schon durch die sonstigen Annahmen erfüllt sein, so dass die Gleichung (III.) überflüssig und *das ganze Problem in den Gleichungen* (I.), (II.), (IV.), (V.), (VI.) *enthalten ist.* Für den Fall der Kugel wird im Folgenden nachgewiesen werden, dass diese Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten gerade ausreichen; hat man die Functionen χ und Ω den

Differentialgleichungen (IV.) und (V.) gemäss bestimmt, so ergeben sich die in χ_1, χ_2, χ_3 enthaltenen willkürlichen Constanten durch die drei Gleichungen (VI.) mittelst der Constanten von Ω, und indem man die letztern in die Gleichungen (II.) einführt, erhält man ein System von Gleichungen zu ihrer Bestimmung. Endlich ergeben sich u, v, w aus (I.), ε und e aus den Gleichungen

$$\varepsilon = -\frac{1}{4\pi}\Delta\Omega, \qquad e = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial N} - \frac{\partial\Omega_\alpha}{\partial N}\right),$$

wo Ω_α sich in bekannter Weise durch den an der Oberfläche stattfindenden Werth von Ω bestimmt.

Die Gleichung (II.) lässt sich dadurch identisch erfüllen, dass man

$$\chi_1 = \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial y}, \qquad \chi_2 = \frac{\partial\varphi_3}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}, \qquad \chi_3 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}$$

setzt, wo $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ irgend drei Integrale der Gleichung (IV.) bedeuten.

Zweiter Theil. Anwendung auf die Kugel.

§. 3. Inductionsströme unter fortdauernder Einwirkung einer äussern elektromotorischen Kraft.

Um die allgemeinen Gleichungen des vorigen Paragraphen auf die Bewegung der Elektricität in einer Kugel vom Radius a anzuwenden, führen wir Polarcoordinaten in Bezug auf den Mittelpunkt der Kugel als Anfangspunkt ein, setzen also

$$x = \varrho\cos\vartheta, \quad y = \varrho\sin\vartheta\cos\psi, \quad z = \varrho\sin\vartheta\sin\psi$$

und benutzen im Wesentlichen das Verfahren, welches *Poisson* in Cap. XI seiner *Théorie math. de la chaleur* anwendet, und zwar bei Untersuchung der Wärmebewegung in einer ursprünglich in beliebiger Weise erwärmten Kugel, die sich in einem Raum befindet, in welchem an den einzelnen Punkten der Kugeloberfläche beliebige und der Zeit nach veränderliche Temperaturen herschen. Sämmtliche in unserm Problem vorkommende Grössen lassen sich nach Kugelfunctionen entwickeln, d. h., wenn wir mit P^n die Kugelfunction n^{ten} Grades des Winkels ϑ bezeichnen und mit Herrn *Heine* (Handbuch d. Kugelfunctionen p. 183)

$$\sin^m\vartheta\frac{d^m P^n}{d(\cos\vartheta)^m}\cos m\psi = C_m^n, \qquad \sin^m\vartheta\frac{d^m P^n}{d(\cos\vartheta)^m}\sin m\psi = S_m^n$$

setzen, in Doppelreihen von Gliedern der Form

$$a_n^m C_m^n + b_n^m S_m^n,$$

wo a_n^m und b_n^m blosse Functionen von ϱ und t sind. Als Functionen von t lassen sich das Potential der äussern elektrostatischen Kraft Q und die Componenten der äussern Stromkräfte X, Y, Z bekanntlich in Reihen von der Form ${}^s\mathfrak{S} e^{k_s t} f_s$ (welche auch in bestimmte Integrale übergehen können) entwickeln, woraus folgt, dass auch Ω, χ_1, χ_2, χ_3 sich in eben solche Reihen entwickeln lassen; dabei nehmen wir für Q und für X, Y, Z dieselbe Form an, um die zwei Fälle, wo nur elektrostatische und wo nur Stromkräfte vorhanden sind, zusammenzufassen; es ist dann nachher in den so erhaltenen Formeln entweder Q oder X, Y, Z gleich Null zu setzen. Durch die Summenzeichen Σ, $\S$, $\mathfrak{S}$ bezeichnen wir im Folgenden überall, wo nicht eine andere Bestimmung ausdrücklich angegeben wird, Summationen respective nach n über alle ganzen Zahlen von 0 bis ∞, nach m über alle ganzen Zahlen von 0 bis n und nach einer Grösse s. Wir setzen demnach

$$\text{(I.)}\quad \begin{cases} X = \mathfrak{S} e^{\varkappa_s t} \Sigma \varrho^n X_{ns} = \mathfrak{S} e^{\varkappa_s t} \Sigma \varrho^n \S (a_{ns}^m S_m^n + \alpha_{ns}^m C_m^n), \\ Y = \mathfrak{S} e^{\varkappa_s t} \Sigma \varrho^n Y_{ns} = \mathfrak{S} e^{\varkappa_s t} \Sigma \varrho^n \S (b_{ns}^m S_m^n + \beta_{ns}^m C_m^n), \\ Z = \mathfrak{S} e^{\varkappa_s t} \Sigma \varrho^n Z_{ns} = \mathfrak{S} e^{\varkappa_s t} \Sigma \varrho^n \S (c_{ns}^m C_m^n - \gamma_{ns}^m S_m^n), \\ Q = \mathfrak{S} e^{\varkappa_s t} \Sigma \varrho^n Q_{ns} = \mathfrak{S} e^{\varkappa_s t} \Sigma \varrho^n \S (f_{ns}^m S_m^n + \varphi_{ns}^m C_m^n), \end{cases}$$

$$\text{(II.)}\quad \begin{cases} \chi_1 = \mathfrak{S} e^{\varkappa_s t} \Sigma \varrho^n p_{ns} \chi_{1ns} = \mathfrak{S} e^{\varkappa_s t} \Sigma \varrho^n p_{ns} \S (A_{ns}^m S_m^n + \mathrm{A}_{ns}^m C_m^n), \\ \chi_2 = \mathfrak{S} e^{\varkappa_s t} \Sigma \varrho^n p_{ns} \chi_{2ns} = \mathfrak{S} e^{\varkappa_s t} \Sigma \varrho^n p_{ns} \S (B_{ns}^m S_m^n + \mathrm{B}_{ns}^m C_m^n), \\ \chi_3 = \mathfrak{S} e^{\varkappa_s t} \Sigma \varrho^n p_{ns} \chi_{3ns} = \mathfrak{S} e^{\varkappa_s t} \Sigma \varrho^n p_{ns} \S (C_{ns}^m C_m^n - I_{ns}^m S_m^n), \\ \Omega = \mathfrak{S} e^{\varkappa_s t} \Sigma \varrho^n q_{ns} \Omega_{ns} = \mathfrak{S} e^{\varkappa_s t} \Sigma \varrho^n q_{ns} \S (F_{ns}^m S_m^n + \Phi_{ns}^m C_m^n). \end{cases}$$

Da Q und X, Y, Z Potentiale äusserer Massen sind, so sind in (I.) die Grössen X_{ns}, Q_{ns} von ϱ unabhängige Kugelfunctionen n^{ten} Grades, und die Grössen a_{ns}^m etc. sind blosse Constanten, ebenso wie die A_{ns}^m etc. in (II.); p_{ns} und q_{ns} sind noch zu bestimmende Functionen von ϱ. Vermöge des obigen Werthes von χ geht die Gleichung (IV.) des vorigen Paragraphen über in

$$\mathfrak{S} e^{\varkappa_s t} \Sigma \Big[\frac{d^2}{d\varrho^2} (\varrho^{n+1} p_{ns}) - \Big(\frac{n(n+1)}{\varrho^2} + \frac{8\pi h \varkappa_s}{\mu \varkappa_s + 1} \Big) \varrho^{n+1} p_{ns} \Big] \chi_{ns} = 0,$$

und wenn wir zur Abkürzung

$$(1.) \qquad \frac{8\pi h a^2 \varkappa_s}{\mu \varkappa_s + 1} = g_s^2$$

setzen, so folgt

$$(2.) \qquad \frac{d^2 p_{ns}}{d\varrho^2} + \frac{2n+2}{\varrho}\frac{dp_{ns}}{d\varrho} - \frac{g_s^2}{a^2} p_{ns} = 0.$$

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung ist nach *Poisson* eine Summe zweier particulären Integrale, von denen das eine für $\varrho = 0$ unendlich wird; da aber die Functionen χ im Mittelpunkt der Kugel endliche Werthe behalten müssen, so ist für p_{ns} nur das andere partikuläre Integral zu nehmen, nämlich

$$(3.) \qquad p_{ns} = \int_{-1}^{+1} (1-z^2)^n \cos\left(g_s \frac{\varrho}{a} zi\right) dz.$$

Man kann dieses Integral auf doppelte Art, in eine unter allen Umständen convergirende unendliche und in eine endliche Reihe entwickeln; führt man nämlich, wie üblich, die *Fourier-Bessel*sche Function

$$J^n(z) = \frac{z^n}{2^n \Pi n}\left(1 - \frac{z^2}{2.2n+2} + \frac{z^4}{2.4.2n+2.2n+4} - \cdots\right)$$

ein und setzt

$$z = i g_s \frac{\varrho}{a},$$

so ist

$$(4.) \qquad p_{ns} = \sqrt{2\pi}.2^n \Pi n \frac{J^{n+\frac{1}{2}}(z)}{z^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Ferner hat man nach *Poisson*

$$(5.) \begin{cases} (-1)^n \left(g_s \frac{\varrho}{a}\right)^{2n+1} p_{ns} = \left(e^{g_s \frac{\varrho}{a}} - e^{-g_s \frac{\varrho}{a}}\right) F_n + \left(e^{g_s \frac{\varrho}{a}} + e^{-g_s \frac{\varrho}{a}}\right) G_n, \\ \text{wo} \\ F_n = \sum_0^{\sigma} a_{2\sigma} \left(g_s \frac{\varrho}{a}\right)^{2\sigma}, \quad G_n = -\sum_0^{\sigma} a_{2\sigma+1} \left(g_s \frac{\varrho}{a}\right)^{2\sigma+1}, \quad a_\sigma = 2^\sigma . \binom{n}{\sigma} \Pi(2n-\sigma) \end{cases}$$

(wo $\binom{n}{\sigma}$ der σ^{te} Binomialcoefficient der Potenz n). In F_n und G_n sind die Summen $\sum$ so weit fortzusetzen, bis sie wegen der darin enthaltenen Binomialcoefficienten von selbst abbrechen; sie sind also ganze Functionen n^{ten} Grades von ϱ. Für $\varrho = 0$ erhält man

$$p_{ns} = \frac{2^{n+1} \Pi n}{1.3 \ldots 2n+1}.$$

Die Function p_{ns} genügt nachstehenden Gleichungen, welche im Folgenden vielfach Anwendung finden:

$$(6.)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_{n-1,s}}{\varrho d\varrho} = \dfrac{1}{2n}\dfrac{g_s^2}{a^2}p_{ns}, \qquad \varrho\dfrac{dp_{ns}}{d\varrho} + (2n+1)p_{ns} = 2np_{n-1,s}, \\ g_s^2\dfrac{\varrho^2}{a^2}\dfrac{p_{n+1,s}}{2n+2} + (2n+1)p_{ns} - 2np_{n-1,s} = 0, \end{cases}$$

und zwar gelten dieselben für alle Werthe von n, von $n=0$ an, wenn man für $n=0$ nur $np_{n-1,s}$ durch $\cos\left(g_s\dfrac{\varrho}{a}i\right)$ ersetzt.

Setzen wir ferner

$$(7.)\quad -\frac{8\pi h a^2 \varkappa_s^2}{\mu\varkappa_s^2 + \varkappa_s + 16\pi k} = c_s^2,$$

so wird in Folge der Gleichung (V.) des vorigen Paragraphen q_{ns} die nämliche Function von $c_s\dfrac{\varrho}{a}$, wie p_{ns} von $g_s\dfrac{\varrho}{a}$.

Es bleiben noch die Gleichungen (II.) und (VI.) des vorigen Paragraphen aufzustellen. Setzen wir

$$(8.)\quad \begin{cases} 2(n-m)A^m_{n-1,s} + (B^{m-1}_{n-1,s} + C^{m-1}_{n-1,s}) - (n-m)(n-m-1)(B^{m+1}_{n-1,s} - C^{m+1}_{n-1,s}) \\ \qquad = H^m_{n-1,s}(A, B, C), \\ 2(n+m+1)A^m_{n+1,s} - (B^{m-1}_{n+1,s} + C^{m-1}_{n+1,s}) + (n+m+1)(n+m+2)(B^{m+1}_{n+1,s} - C^{m+1}_{n+1,s}) \\ \qquad = K^m_{n+1,s}(A, B, C), \end{cases}$$

und bezeichnen mit $H^m_{n-1,s}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, I')$ und $K^m_{n+1,s}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, I')$ dieselben Functionen von A, B, I', wobei B^0 und I'^0 gleich Null zu setzen, C^0 und B^0 zu verdoppeln sind, so geht die Gleichung (II.) des §. 2 über in

$$(9.)\quad \begin{cases} \mathfrak{S}e^{\varkappa_s t}\Sigma\varrho^n p_{ns}\,\mathfrak{S}\left\{\left[\dfrac{1}{2n(2n-1)}H^m_{n-1,s}(A) + \dfrac{2(n+1)}{2n+3}\dfrac{a^2}{g_s^2}K^m_{n+1,s}(A)\right]S^n_m \right. \\ \qquad \left. + \left[\dfrac{1}{2n(2n-1)}H^m_{n-1,s}(\mathrm{A}) + \dfrac{2(n+1)}{2n+3}\dfrac{a^2}{g_s^2}K^m_{n+1,s}(\mathrm{A})\right]C^n_m\right\} = 0, \end{cases}$$

welche sich in folgende zwei Relationen zwischen den Constanten auflöst

$$(A.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2n(2n-1)}H^m_{n-1,s}(A) + \dfrac{2(n+1)}{2n+3}\dfrac{a^2}{g_s^2}K^m_{n+1,s}(A) = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots n), \\ \dfrac{1}{2n(2n-1)}H^m_{n-1,s}(\mathrm{A}) + \dfrac{2(n+1)}{2n+3}\dfrac{a^2}{g_s^2}K^m_{n+1,s}(\mathrm{A}) = 0 \quad (m = 0, 1, \ldots n), \end{cases}$$

welche von $n=1$ an bestehen müssen; ausserdem muss noch für $n=0$, wo zugleich $m=0$, die zweite Gleichung gelten, welche dann übergeht in

$$(A'.)\quad K^0_{1s}(\mathrm{A}) = 0.$$

$\frac{a}{\lambda}, \frac{b}{\mu}, \frac{c}{\nu}$; machen wir ferner dieselben Veränderungen in dem ihm gleichen Ausdruck (10.), so giebt die Gleichsetzung beider Ausdrücke

$$(20.)\quad \begin{cases} [\lambda(b+c)+\mu(c+a)+\nu(a+b)]^2-4(\lambda\mu+\mu\nu+\nu\lambda)(bc+ca+ab) \\ \quad = (b\nu-c\mu)^2+(c\lambda-a\nu)^2+(a\mu-b\lambda)^2-2(b\nu-c\mu)(c\lambda-a\nu) \\ \qquad -2(c\lambda-a\nu)(a\mu-b\lambda)-2(a\mu-b\lambda)(b\nu-c\mu), \end{cases}$$

und vermöge dieser Gleichung, deren erster Theil ganz die Form obigen Ausdrucks für R' (19.) hat, wird nun

$$(21.)\quad \begin{cases} R' = (D_m\nu-D_n\mu)^2+(D_n\lambda-D_l\nu)^2+(D_l\mu-D_m\lambda)^2-2(D_m\nu-D_n\mu)(D_n\lambda-D_l\nu) \\ \qquad -2(D_n\lambda-D_l\nu)(D_l\mu-D_m\lambda)-2(D_l\mu-D_m\lambda)(D_m\nu-D_n\mu). \end{cases}$$

4. Dieser Ausdruck für R' lässt sich wie der Ausdruck (10.) in vier Factoren zerlegen. Aber er lässt sich noch in anderer Weise umformen. Bezeichnen wir der Kürze halber die drei Grössen $D_m\nu-D_n\mu$, $D_n\lambda-D_l\nu$, $D_l\mu-D_m\lambda$, aus welchen R' zusammengesetzt ist, der Reihe nach mit P, Q, S, so besteht die Relation

$$(22.)\qquad \lambda P+\mu Q+\nu S = 0.$$

Multipliciren wir nun Gleichung (21.) mit $\lambda+\mu+\nu$ und bemerken, dass vermöge dieser Relation

$$-PQ\mu-PS\nu = P^2\lambda, \qquad -PQ\lambda-QS\mu = Q^2\mu, \qquad -PS\lambda-QS\mu = S^2\nu$$

ist, so wird

$$\begin{aligned} (\lambda+\mu+\nu)R' = {} & 3\lambda P^2+\lambda Q^2+\lambda S^2-2\lambda QS \\ & +\mu P^2+3\mu Q^2+\mu S^2-2\mu SP \\ & +\nu P^2+\nu Q^2+3\nu S^2-2\nu PQ \end{aligned}$$

oder schliesslich

$$(23.)\quad \begin{cases} (\lambda+\mu+\nu)R' = 3\lambda P^2+\lambda(Q-S)^2 \\ \qquad +3\mu Q^2+\mu(S-P)^2 \\ \qquad +3\nu S^2+\nu(P-Q)^2. \end{cases}$$

5. Um nun aus diesen Formeln für R' die entsprechenden für R zu erhalten, hat man die ursprünglichen Werthe von l, m, n, a, b, c wieder einzuführen, mithin

$$l, \quad m, \quad n, \quad a, \quad b, \quad c$$

zu ersetzen durch

$$\alpha l, \quad \beta m, \quad \gamma n, \quad \frac{\beta\gamma}{\alpha}a, \quad \frac{\alpha\gamma}{\beta}b, \quad \frac{\alpha\beta}{\gamma}c.$$

Hierdurch geht, wie aus (16.) und (6.) sich ergiebt, D_l, D_m, D_n über in $\frac{1}{\alpha}\Delta_l$, $\frac{1}{\beta}\Delta_m$, $\frac{1}{\gamma}\Delta_n$. Zugleich hat man R' zu ersetzen durch $\alpha^2\beta^2\gamma^2 R$, weil die quadratische Gleichung in k in n°. 3 mit $\alpha\beta\gamma$ multiplicirt wurde. Hiermit erhält man, mit Berücksichtigung der Werthe von λ, μ, ν, aus Gleichung (21.)

$$(24.)\quad \begin{aligned} &\alpha^2\beta^2\gamma^2 R = \\ &(\Delta_m\beta-\Delta_n\gamma)^2.\alpha^4+(\Delta_n\gamma-\Delta_l\alpha)^2.\beta^4+(\Delta_l\alpha-\Delta_m\beta)^2.\gamma^4-2(\Delta_m\beta-\Delta_n\gamma)(\Delta_n\gamma-\Delta_l\alpha).\alpha^2\beta^2 \\ &-2(\Delta_n\gamma-\Delta_l\alpha)(\Delta_l\alpha-\Delta_m\beta).\beta^2\gamma^2-2(\Delta_l\alpha-\Delta_m\beta)(\Delta_m\beta-\Delta_n\gamma).\gamma^2\alpha^2 \end{aligned}$$

oder auch, wenn Π ein Product von vier Factoren bezeichnet,

$$(25.)\quad \alpha^2\beta^2\gamma^2 R = \Pi(\alpha\sqrt{\Delta_m\beta-\Delta_n\gamma}\pm\beta\sqrt{\Delta_n\gamma-\Delta_l\alpha}\pm\gamma\sqrt{\Delta_l\alpha-\Delta_m\beta}).$$

Ferner erhält man aus (23.) folgende *Zerlegung von* $(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)R$ *in eine Summe von sechs Quadraten*

$$(26.)\quad \begin{aligned} &(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)R \\ &= 3\alpha^2(\Delta_m\beta-\Delta_n\gamma)^2+\frac{1}{\alpha^2}[(\Delta_n\gamma-\Delta_l\alpha)\beta^2-(\Delta_l\alpha-\Delta_m\beta)\gamma^2]^2 \\ &+3\beta^2(\Delta_n\gamma-\Delta_l\alpha)^2+\frac{1}{\beta^2}[(\Delta_l\alpha-\Delta_m\beta)\gamma^2-(\Delta_m\beta-\Delta_n\gamma)\alpha^2]^2 \\ &+3\gamma^2(\Delta_l\alpha-\Delta_m\beta)^2+\frac{1}{\gamma^2}[(\Delta_m\beta-\Delta_n\gamma)\alpha^2-(\Delta_n\gamma-\Delta_l\alpha)\beta^2]^2. \end{aligned}$$

Die Grössen Δ_l, Δ_m, Δ_n sind durch die Gleichungen (6.) gegeben. Die drei letzten Quadrate müssen resp. durch α^2, β^2, γ^2 theilbar sein. Die Grössen, deren Quadrate in dieser Formel auftreten, sind nämlich ausgeschrieben:

$$(27.)\quad \begin{cases} \Delta_m\beta-\Delta_n\gamma &= l\alpha(\beta^2-\gamma^2)-(m\beta-n\gamma)(\beta^2+\gamma^2)-(b-c)\alpha\beta\gamma, \\ \Delta_n\gamma-\Delta_l\alpha &= m\alpha(\gamma^2-\alpha^2)-(n\gamma-l\alpha)(\gamma^2+\alpha^2)-(c-a)\alpha\beta\gamma, \\ \Delta_l\alpha-\Delta_m\beta &= n\gamma(\alpha^2-\beta^2)-(l\alpha-m\beta)(\alpha^2+\beta^2)-(a-b)\alpha\beta\gamma \end{cases}$$

und

$$(28.)\quad \begin{aligned} &\frac{1}{\alpha}[(\Delta_n\gamma-\Delta_l\alpha)\beta^2-(\Delta_l\alpha-\Delta_m\beta)\gamma^2] \\ &= l(\alpha^2\beta^2+2\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)-(m\beta+n\gamma).\alpha(\beta^2+\gamma^2)-[(c-a)\beta^2-(a-b)\gamma^2]\beta\gamma, \\ &\frac{1}{\beta}[(\Delta_l\alpha-\Delta_m\beta)\gamma^2-(\Delta_m\beta-\Delta_n\gamma)\alpha^2] \\ &= m(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+2\gamma^2\alpha^2)-(n\gamma+l\alpha).\beta(\gamma^2+\alpha^2)-[(a-b)\gamma^2-(b-c)\alpha^2]\gamma\alpha, \\ &\frac{1}{\gamma}[(\Delta_m\beta-\Delta_n\gamma)\alpha^2-(\Delta_n\gamma-\Delta_l\alpha)\beta^2] \\ &= n(2\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)-(l\alpha+m\beta).\gamma(\alpha^2+\beta^2)-[(b-c)\alpha^2-(c-a)\beta^2]\alpha\beta. \end{aligned}$$

6. Aus der Gleichung (26.) ersieht man unmittelbar, dass *im Allgemeinen* $R = 0$ *wird, mithin der Schnitt der Fläche durch die Ebene ein Kreis ist, wenn die zwei Bedingungsgleichungen erfüllt sind*

$$(29.) \qquad \triangle_l \alpha = \triangle_m \beta = \triangle_n \gamma.$$

Im Allgemeinen wird nämlich für einen Kreisschnitt keine der Grössen α, β, γ Null sein, weil sonst eine Coordinatenaxe in einem Kreisschnitte liegen müsste. Dieser Fall kann nur eintreten, wenn die Coefficienten der Gleichung der Fläche einer besondern Bedingung genügen. Ist z. B. $\beta = 0$, also $\triangle_m \beta = 0$, so muss auch zugleich $\triangle_n \gamma = 0$ und $\triangle_l \alpha = 0$ sein, welche zwei Gleichungen sich für $\beta = 0$ auf die eine Bedingung

$$(30.) \qquad l\alpha - n\gamma = 0$$

reduciren. Aber damit in diesem Falle $R = 0$ werde, ist, wie Gleichung (26.) zeigt, noch erforderlich, dass

$$\frac{1}{\beta}[(\triangle_l \alpha - \triangle_m \beta)\gamma^2 - (\triangle_m \beta - \triangle_n \gamma)\alpha^2] = 0,$$

welche sich für $\beta = 0$ auf folgende

$$(31.) \qquad (a-b)\gamma^2 - (b-c)\alpha^2 - 2m\alpha\gamma = 0$$

reducirt. Die Elimination von $\frac{\alpha}{\gamma}$ aus (30.) und (31.) giebt

$$(32.) \qquad (b-a)l^2 + (b-c)n^2 + 2lmn = 0$$

als *Bedingung, dass die Axe der* y *in einem Kreisschnitt der Fläche* (1.) *liege,* und nach (30.) ist

$$\frac{x}{l} + \frac{z}{n} = 0$$

sodann die Gleichung der Ebene des Kreisschnitts, in welchem sie liegt.

Wäre aber zugleich $l = 0$ und $n = 0$, also die Axe der y parallel einer Hauptaxe der Fläche, so ist die Gleichung (30.) identisch erfüllt, und die Gleichung (31.) in Verbindung mit $\beta = 0$ bestimmt zwei durch die Axe der y gehende Kreisschnitte, deren Gleichung

$$(a-b)x^2 - (b-c)z^2 + 2mxz = 0$$

ist.

7. Kehren wir zu den allgemeinen Bedingungsgleichungen (29.) für Kreisschnitte zurück. Wie aus (27.) ersichtlich, ergiebt sich aus der Gleichung $\triangle_m \beta - \triangle_n \gamma = 0$

$$(33.) \qquad \alpha = \frac{(m\beta - n\gamma)(\beta^2 + \gamma^2)}{l(\beta^2 - \gamma^2) - (b-c)\beta\gamma},$$

und dieser Werth von α, in die Gleichung $\triangle_n \gamma - \triangle_l \alpha = 0$ substituirt, führt zu einer homogenen Gleichung in β und γ vom neunten Grad. Nun sahen wir

aber in n°. 6, dass die Gleichungen (29.) auch erfüllt werden durch die Systeme

$$(34.)\quad \begin{cases} \alpha = 0, & m\beta - n\gamma = 0, \\ \beta = 0, & l\alpha - n\gamma = 0, \\ \gamma = 0, & l\alpha - m\beta = 0, \end{cases}$$

welche Lösungen jedoch im Allgemeinen keine Kreisschnitte bestimmen, sondern nur, wenn resp. die erste, zweite, dritte der Bedingungsgleichungen

$$(35.)\quad \begin{cases} A = (a-b)m^2 + (a-c)n^2 + 2lmn = 0, \\ A' = (b-a)l^2 + (b-c)n^2 + 2lmn = 0, \\ A'' = (c-a)l^2 + (c-b)m^2 + 2lmn = 0 \end{cases}$$

Statt hat.

Vermöge der ersten Lösung (35.) ist die Gleichung vom neunten Grad durch $m\beta - n\gamma$ theilbar, was auch unmittelbar zu ersehen ist. Vermöge der zweiten Lösung ist der Coefficient der höchsten Potenz von γ Null und vermöge der dritten Lösung ist der Coefficient der höchsten Potenz von β Null. Hierdurch reducirt sich die Gleichung vom neunten Grad auf folgende Gleichung vom sechsten Grad

$$(36.)\quad \begin{cases} [(c-a)l^2 + (c-b)m^2 + 2lmn]\beta^6 + 2l[(c-a)(c-b) - l^2 - m^2 - n^2]\beta^5\gamma \\ + [(c-b)(-5l^2 + 2m^2 - n^2) + (c-a)(c-b)^2 - (c-a)l^2 + 6lmn]\beta^4\gamma^2 \\ + 4l[l^2 - m^2 - n^2 - (c-b)^2]\beta^3\gamma^3 \\ + [(b-c)(-5l^2 + 2n^2 - m^2) + (b-a)(b-c)^2 - (b-a)l^2 + 6lmn]\beta^2\gamma^4 \\ + 2l[(b-a)(b-c) - l^2 - m^2 - n^2]\beta\gamma^5 + [(b-a)l^2 + (b-c)n^2 + 2lmn]\gamma^6 = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichung vom sechsten Grad giebt auch die Lösungen (34.), wenn dieselben Kreisschnitte bestimmen. Denn ist die Bedingung $A'' = 0$ (35.) erfüllt, so genügt $\gamma = 0$ der Gleichung (36.); ist $A' = 0$, so ist $\beta = 0$ eine Wurzel, und wenn die Bedingung $A = 0$ erfüllt ist, so wird, wie man sich leicht überzeugt, die Gleichung befriedigt, wenn $m\beta = n\gamma$ gesetzt wird, und die Gleichung (33.) giebt den zugehörigen Werth $\alpha = 0$.

Uebrigens kommt die Auflösung dieser Gleichung auf die Auflösung der cubischen Gleichung zurück, von welcher die Bestimmung der Hauptaxen der Fläche (1.) abhängt, indem, wie aus andern Betrachtungen erhellt, die linke Seite der Gleichung in drei Factoren von der Form

$$b\gamma^2 + c\beta^2 - 2l\beta\gamma - \lambda(\beta^2 + \gamma^2)$$

zerfällt, wo λ je eine Wurzel dieser cubischen Gleichung ist.

München, Mai 1868.

Zur Theorie der Bewegung der Elektricität in nicht linearen Leitern.

(Von Herrn *H. Lorberg* in Ruhrort.)

---

§. 1. Aufstellung der allgemeinen Gleichungen der Bewegung der Elektricität.

Die von Herrn *Kirchhoff* im 102ten Bande von Pogg. Ann. aufgestellten allgemeinen Gleichungen für die Bewegung der Elektricität in beliebigen, auch nicht linearen Leitern sind meines Wissens — mit Ausnahme einiger Entwickelungen bezüglich ihrer Verwandlung in Differentialgleichungen, welche Herr *Weingarten* *) veröffentlicht hat — noch keiner eingehendern Behandlung unterworfen worden; es dürfte daher vielleicht ein kurzer Auszug aus einer über diesen Gegenstand angestellten Untersuchung nicht ganz ohne Interesse sein. Ich verallgemeinere die *Kirchhoff*schen Gleichungen in sofern etwas, als ich die Elektricität nicht sich selbst überlassen, sondern unter Einwirkung äusserer, mit der Zeit veränderlicher elektromotorischer Kräfte stehend annehme; und zwar will ich über diese Kräfte die allgemeinste Voraussetzung machen, dass sie theils von bewegten Massen statischer Elektricität, theils von bewegten und ihre Intensität ändernden elektrischen Strömen oder Magneten herrühren.

Ist Q das mit der Zeit veränderliche Potential der äusseren Massen statischer Elektricität, so ist $-\frac{\partial Q}{\partial x}$ die x-Componente der von diesen Massen auf die Einheit des positiven elektrischen Fluidums im Punkt $p = (x, y, z)$ ausgeübten Kraft. Es sei ferner $\varkappa = 439 . 10^9 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}$ die Constante des *Weber*schen Grundgesetzes, r die Entfernung des Punktes p von einem Punkt $p' = (x', y', z')$ des Stromdrahtes oder Magneten, v und v' die Geschwindigkeiten, mit denen der Strom und der Magnet bewegt wird, α und α' die Winkel der Richtungen dieser Geschwindigkeiten mit der x-Axe, $d\lambda$ das Element der Stromfläche, $d\nu$ das Element der Normale von $d\lambda$ oder der Axe eines dem Elementarstrom

---

*) „Ueber die Bewegung der Elektricität in Leitern.“ Dieses Journal Bd. 63.

gleichwerthigen magnetischen Moleküls vom Moment M, J die in mechanischem Mass gemessene Intensität des Stroms, $P = \Sigma M \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} = \Sigma 2\mu d\nu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} = \Sigma \frac{\mu}{r}$ das Potential des ganzen in dem Magneten enthaltenen positiven und negativen Magnetismus; dann sind die Componenten der ganzen von dem bewegten Magneten und von dem bewegten und seine Intensität ändernden Strom auf die mechanische Masseinheit des positiven Fluidums im Punkt p ausgeübten elektromotorischen Kraft, in mechanischem Mass gemessen,

$$(1.)\quad X = -\frac{4}{\varkappa^2}\left(\frac{\partial L_3}{\partial y} - \frac{\partial L_2}{\partial z}\right),\quad Y = -\frac{4}{\varkappa^2}\left(\frac{\partial L_1}{\partial z} - \frac{\partial L_3}{\partial x}\right),\quad Z = -\frac{4}{\varkappa^2}\left(\frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y}\right),$$

wo

$$L_1 = v\cos\alpha J\Sigma d\lambda \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} + \frac{\varkappa}{2\sqrt{2}} v'\cos\alpha' P + \frac{\partial J}{\partial t}\Sigma \frac{d\lambda \cos \nu x}{r}$$

und analog L_2 und L_3.

Um über die Voraussetzungen, auf denen die *Kirchhoff*schen Gleichungen beruhen, klar zu werden, ist es von einigem Interesse, die von der im Innern des Körpers befindlichen Elektricität auf die Einheit des positiven Fluidums im Punkt p ausgeübten Kräfte direct aus dem *Weber*schen Grundgesetz herzuleiten, nach welchem die ganze von zwei elektrischen Massen μ, μ' in der Entfernung r auf einander ausgeübte Kraft durch

$$\frac{\mu\mu'}{r^2} - \frac{\mu\mu'}{\varkappa^2}\left[\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 - \frac{2}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}\right]$$

ausgedrückt wird. Diese Kräfte sind folgende.

a) Die von der freien Elektricität herrührende Kraft; ist ε' die Dichtigkeit dieser freien Elektricität, d. h. des Ueberschusses der positiven über die negative Elektricität, in einem Punkt p' des Inneren, e' die Dichtigkeit der Flächenbelegung, Ω das Potential dieser ganzen freien Elektricität, also

$$\Omega = \int \frac{\varepsilon'}{r} d\tau + \int \frac{e'}{r} d\sigma,$$

(wo, wie überall im Folgenden, $d\tau$ ein Volumelement, $d\sigma$ ein Oberflächenelement des Körpers bezeichnet), so ist die x-Componente dieser Kraft $= -\frac{\partial \Omega}{\partial x}$.

b) Die von den im Innern vorhandenen elektrischen Strömen herrührende Kraft nach der x-Axe ergiebt sich aus dem *Weber*schen Grundgesetz als eine Summe von zwei Kräften, von denen die erste E_x (die *elektromotorische Kraft*) auf die positive und negative Elektricität mit gleicher Stärke, aber

entgegengesetzter Richtung, die zweite D_x (die *elektrodynamische Kraft*) auf beide Elektricitäts-Arten mit gleicher Stärke und Richtung wirkt und daher keinen andern Effect haben kann, als dass sie sich möglicherweise auf die Körpermoleküle überträgt und eine Bewegung derselben veranlasst. Unter der auch von *Weber* *) bei seiner Ableitung der *Kirchhoff*schen Gleichungen ausgesprochenen Voraussetzung, dass die Menge der freien Elektricität im Verhältniss zu der ganzen strömenden Elektricität beständig so klein bleibt, dass man die von der erstern ausgeübte Kraft gegen die von der letztern ausgeübte vernachlässigen darf; und unter der fernern Voraussetzung, dass die Dichtigkeit δ der positiven sowie der negativen strömenden Elektricität von der Zeit unabhängig sei, dass man also, wenn v die Geschwindigkeit der positiven Elektricität, u die Stromdichtigkeit bezeichnet, $\delta\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial(\delta v)}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial t}$ setzen könne, wobei ebenfalls nur Grössen von der Ordnung $\frac{\varepsilon}{\delta}$ vernachlässigt werden, ergiebt sich $E_x=-\frac{4}{\varkappa^2}\frac{\partial U}{\partial t}$, wo U den von *Kirchhoff* ebenso bezeichneten Werth hat.

Zu diesen von der Elektricität selbst ausgeübten Kräften kommt noch die von den ponderabeln Theilchen auf die Elektricität ausgeübte Kraft, welche man als Widerstand zu bezeichnen pflegt. Ist u die Stromdichtigkeit nach der x-Axe, k die Leitungsfähigkeit, so ist unter der von *Weber* a. a. O. (pag. 595) ausgesprochenen Voraussetzung die x-Componente dieser Kraft $=-\frac{u}{2k}$.

Hiernach ist die ganze von Aussen und Innen auf die mechanische Masseinheit positiver Elektricität im Punkt p ausgeübte Kraft nach der x-Axe, wenn wir noch die von den äussern Strömen und Magneten ausgeübte elektrodynamische Kraft mit Δ_x bezeichnen,

$$K=-\frac{u}{2k}-\frac{\partial}{\partial x}(\Omega+Q)-\frac{4}{\varkappa^2}\frac{\partial U}{\partial t}+X+D_x+\Delta_x.$$

Nach den Grundbegriffen der Mechanik muss nun diese Kraft gleich sein der im Punkt p stattfindenden Beschleunigung b der positiven Elektricität nach der x-Axe, multiplicirt mit der *Masse m der mechanischen Masseinheit positiver Elektricität*, das Wort „Masse“ in dem gewöhnlichen Sinne der Mechanik genommen als das Verhältniss der wirkenden Kraft zur ertheilten Beschleunigung.

---

*) „Elektrodynamische Massbestimmungen, insbesondere über elektrische Schwingungen.“ Fünfte Abhandlung, Leipzig 1864.

Betrachten wir die Geschwindigkeits-Componenten ξ, η, ζ der Elektricität im Punkt p als Functionen der Coordinaten und der Zeit, so ist b, die Beschleunigung eines *bestimmten* Elektricitätstheilchens, $= \frac{\partial \xi}{\partial t} + \xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \xi}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \xi}{\partial z}$. Die obige Kraft ist also, wenn wir mit u, v, w die Componenten der Stromdichtigkeit bezeichnen und statt $m \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{m}{\delta} \delta \frac{\partial \xi}{\partial t}$ wie oben in b) näherungsweise $\frac{m}{\delta} \frac{\partial u}{\partial t}$ setzen, $K = \frac{m}{\delta} \frac{\partial u}{\partial t} + m\left(\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \xi}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)$. Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{2km}{\delta} = \mu, \qquad \frac{4k}{\varkappa^2} = h,$$

so erhalten wir hiernach als Gleichungen der Bewegung der positiven Elektricität

$$\mu \frac{\partial u}{\partial t} + 2km\left(\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \xi}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) - 2k(D_x + \Delta_x) + u + 2k \frac{\partial}{\partial x}(\Omega + Q)$$
$$+ 2h \frac{\partial U}{\partial t} - 2kX = 0$$

und zwei analoge für die y- und z-Axe. Die Gleichungen für die Bewegung der negativen Elektricität ergeben sich hieraus, wenn wir die Zeichen von u, ξ, η, ζ, Ω, Q und (nach dem Begriff der elektromotorischen Kraft) auch von U und X umkehren, dagegen D_x und Δ_x ungeändert lassen. Die Subtraction der so entstehenden Gleichung von der vorigen liefert die erste der folgenden Gleichungen

$$(A.) \quad \begin{cases} \mu \frac{\partial u}{\partial t} + u + 2k \frac{\partial}{\partial x}(\Omega + Q) + 2h \frac{\partial U}{\partial t} - 2kX = 0, \\ \mu \frac{\partial v}{\partial t} + v + 2k \frac{\partial}{\partial y}(\Omega + Q) + 2h \frac{\partial V}{\partial t} - 2kY = 0, \\ \mu \frac{\partial w}{\partial t} + w + 2k \frac{\partial}{\partial z}(\Omega + Q) + 2h \frac{\partial W}{\partial t} - 2kZ = 0, \\ U = \int (x - x') \left(u' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + v' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + w' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) d\tau, \\ V = \int (y - y') \left(u' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + v' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + w' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) d\tau, \\ W = \int (z - z') \left(u' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + v' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + w' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) d\tau. \end{cases}$$

Die Gleichungen (VI.) des §. 2 gehen, indem wir, wie immer im Folgenden, den Werth einer Function φ an der Oberfläche, d. h. für $\varrho = a$, mit φ^a bezeichnen und die Coefficienten von $\sin m\psi$ und $\cos m\psi$ einzeln gleich Null setzen, über in

$$(B.)\quad \begin{cases} \dfrac{2n}{2n+1}(\mu\varkappa_s+1)p^a_{n-1,s}A^m_{ns} \\ = \dfrac{8\pi h\varkappa_s^2}{2n+1}q^a_{n-1,s}\Big[-\dfrac{n-m}{2n-1}F^m_{n-1,s}+\dfrac{4n(n+1)(n+m+1)}{2n+3}\dfrac{a^2}{c_s^2}F^m_{n+1,s}\Big] \\ -16\pi k(n+m+1)f^m_{n+1,s}+16\pi k a^m_{ns} \end{cases}$$

und zwei ganz ähnliche Gleichungen für B^m_{ns} und C^m_{ns}, in denen nur

$$(10.)\quad \begin{cases} -(n-m)\ F^m_{n-1,s} \text{ durch } \frac{1}{2}\big(\pm F^{m-1}_{n-1,s}+(n-m)(n-m-1)F^{m+1}_{n-1,s}\big), \\ (n+m+1)F^m_{n+1,s} \text{ durch } \frac{1}{2}\big(\pm F^{m-1}_{n+1,s}+(n+m+1)(n+m+2)F^{m+1}_{n+1,s}\big), \\ (n+m+1)f^m_{n+1,s} \text{ durch } \frac{1}{2}\big(\pm f^{m-1}_{n+1,s}+(n+m+1)(n+m+2)f^{m+1}_{n+1,s}\big) \end{cases}$$

zu ersetzen ist, wobei das untere Zeichen für B^m_{ns}, das obere für C^m_{ns} gilt. Ganz ebenso werden die Constanten A, B, I' durch die Constanten Φ, φ, α, β, γ ausgedrückt. In B'_{ns} und I''_{ns} ist dabei Φ^0 und φ^0 zu verdoppeln. Diese Gleichungen gelten von $n=0$, $m=0$ an, wobei aber nach (6.) statt $np^a_{n-1,s}$ und $nq^a_{n-1,s}$, für $n=0$, $\cos(g_s i)$ und $\cos(c_s i)$ zu setzen ist.

Diese Werthe sind nun in die Gleichungen (*A.*) einzusetzen. Es ergiebt sich

$$(11.)\quad \begin{cases} \dfrac{2(n-1)}{2n-1}(\mu\varkappa_s+1)p^a_{n-2,s}H^m_{n-1,s}(A) \\ = 8\pi h a^2\varkappa_s^2\dfrac{8n^2(n-1)}{2n+1}\dfrac{q^a_{n-2,s}}{c_s^2}F^m_{ns}-16\pi k2n(2n-1)f^m_{ns}+16\pi kH^m_{n-1,s}(a,b,c) \end{cases}$$

und mit Berücksichtigung der Gleichung $\dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial Y}{\partial y}+\dfrac{\partial Z}{\partial z}=0$, welche mit

$$(12.)\quad \begin{cases} K^m_{n+1,s}(a,b,c)=0 & (n=1,2,\dots\infty,\ m=1,2,\dots n) \\ K^m_{n+1,s}(\alpha,\beta,\gamma)=0 & (n=0,1,\dots\infty,\ m=0,1,\dots n) \end{cases}$$

identisch ist,

$$(13.)\quad \frac{2(n+1)}{2n+3}(\mu\varkappa_s+1)p^a_{ns}K^m_{n+1,s}(A) = -8\pi h\varkappa_s^2\frac{2(n+1)}{2n+1}q^a_{ns}F^m_{ns}.$$

Durch Einsetzung der Werthe (11.) und (13.) in (*A.*) erhält man

$$(C.)\quad \begin{cases} \dfrac{4}{\varkappa^2}a^2\varkappa_s^2\Big(-n\dfrac{q^a_{n-2,s}}{c_s^2}+(n+1)\dfrac{q^a_{ns}p^a_{n-2,s}}{g_s^2p^a_{ns}}\Big)F^m_{ns} \\ = -\dfrac{(2n-1)(2n+1)}{2(n-1)}f^m_{ns}+\dfrac{2n+1}{4n(n-1)}H^m_{n-1,s}(a,b,c) \end{cases}$$

für $n = 1, 2, \ldots \infty$; eine vollkommen identische Gleichung bestimmt Φ^m_{ns} mittelst der Coefficienten φ und α, β, γ. Dazu kommt noch für $n = 0$ die Gleichung $(A'.)$, welche nach (13.) übergeht in $\Phi^0_{0s} = 0$, ausser wenn $\varkappa_s = 0$ ist, in welchem Falle Φ^0_{0s} unbestimmt bleibt; es ergiebt sich aber leicht, wenn man $\Omega = \Sigma\Omega_n$ setzt, $\Omega_0 = \frac{E}{a}$, wo E die ganze Summe der freien Elektricität im Innern und an der Oberfläche, d. h. die Menge der etwa anfänglich der Kugel mitgetheilten Elektricität bezeichnet. Setzen wir noch zur Abkürzung

$$(14.) \qquad \frac{1}{n-1}\,\frac{1}{-\frac{n}{c_s^2}\,p^a_{ns}\,q^a_{n-2,s} + \frac{n+1}{g_s^2}\,q^a_{ns}\,p^a_{n-2,s}} = J_{ns},$$

wobei $J_{0s} = 0$ zu nehmen und in J_{1s} statt $(n-1)p^a_{n-2,s}$ und $(n-1)q^a_{n-2,s}$ resp. $\cos(g_s i)$ und $\cos(c_s i)$ zu setzen ist, so erhalten wir schliesslich aus $(C.)$

$$(III.) \quad \begin{cases} \Omega = \frac{E}{a} + \sum_1^{\varkappa} \varrho^n \Re e^{\varkappa_s t}\, q_{ns}\, \Omega_{ns} \\ \frac{4a^2}{\varkappa^2}\,\Omega_{ns} = -\frac{(2n-1)(2n+1)}{2}\,\frac{p^a_{ns} J_{ns}}{\varkappa_s^2}\,Q_{ns} \\ \qquad + \frac{2n+1}{4n}\,\frac{p^a_{ns} J_{ns}}{\varkappa_s^2}\,\Sigma\left[H^m_{n-1,s}(a,b,c)\,S^n_m + H^m_{n-1,s}(\alpha,\beta,\gamma)\,C^n_m\right] \end{cases}$$

und durch Einsetzung des Werthes von F^m_{ns} aus $(C.)$ in $(B.)$

$$(IV.) \quad \begin{cases} (\mu\varkappa_s + 1)\,A^m_{ns} \\ = -8\pi k\Big[-\frac{(2n-3)(n-m)}{4na^2}\,q^a_{n-1,s} J_{n-1,s} f^m_{n-1,s} \\ \qquad + (n+2)(2n+1)(n+m+1)\,\frac{q^a_{n+1,s} J_{n+1,s}}{g_s^2} f^m_{n+1,s}\Big] \\ + \frac{4\pi k}{p^a_{n-1,s}}\Big[\frac{2(2n+1)}{n}\,a^m_{ns} - \frac{n-m}{4n(n-1)a^2}\,q^a_{n-1,s} p^a_{n-1,s} J_{n-1,s} H^m_{n-2,s}(a) \\ \qquad + (n+m+1)\,\frac{q^a_{n-1,s} p^a_{n+1,s} J_{n+1,s}}{c_s^2} H^m_{ns}(a)\Big]. \end{cases}$$

B^m_{ns} und C^m_{ns} erhält man hieraus, indem man für $-(n-m)f^m_{n-1,s}$ und $-(n-m)H^m_{n-2,s}$ die Substitutionen macht, welche in (10.) für $-(n-m)F^m_{n-1,s}$ angegeben sind, für $(n+m+1)f^m_{n+1,s}$ und $(n+m+1)H^m_{ns}$ diejenigen, welche dort für $(n+m+1)f^m_{n+1,s}$ angegeben sind. Ganz ebenso bestimmen sich A^m_{ns}, B^m_{ns}, I'^m_{ns} durch die Coefficienten $\varphi, \alpha, \beta, \gamma$; in B'_{ns} und C'_{ns} ist dabei f^0 und $H^0(a)$ gleich Null zu setzen, in B'_{ns} und I'_{ns} ist φ^0 und $H^0(\alpha)$ zu verdoppeln. Die Gleichungen für A, B, Γ

gelten von $n=1$, $m=1$ an, die für C, A, B von $n=0$, $m=0$ an, so dass Ω und χ_1, χ_2, χ_3 durch die Gleichungen (III.) und (IV.) vollständig bestimmt sind. Diese Gleichungen gelten auch für $s=0$, wenn für diesen Werth $\varkappa_s=0$ ist; man hat dabei nur zu beachten, dass dann

$$-\frac{\varkappa_0^2}{c_0^2}=\frac{\varkappa^2}{2a^2}, \quad \frac{\varkappa_0^2}{g_0^2}=0, \quad p_{n0}=q_{n0}=\frac{2^{n+1}\Pi_n}{1.3\ldots(2n+1)};$$

der $s=0$ entsprechende, d. h. von der Zeit unabhängige, Theil von Ω wird hiernach

$$\Sigma\varrho^n q_{n0}\Omega_{n0}=\frac{E}{a}-\sum_1^\infty\varrho^n Q_{n0}+\sum_1^\infty\frac{\varrho^n}{2n(2n-1)}\Sigma[H^m_{n-1,0}(a)S^n_m+H^m_{n-1,0}(\alpha)C^n_m],$$

wo $Q_{00}+\sum_1^\infty\varrho^n Q_{n0}$ der von der Zeit unabhängige Theil von Q ist; sind also keine äussern Stromkräfte vorhanden, und ist das Potential Q von der Zeit unabhängig, so drückt die vorstehende Gleichung die bekannte Gleichgewichtsbedingung der auf der Kugel vorhandenen Elektricität aus, dass nämlich ihr Potential plus dem äussern Potential in allen Punkten der Kugel denselben Werth haben muss.

Die Ausdrücke (III.) und (IV.) bestehen aus je zwei Theilen, von denen der erste bloss von den äussern elektrostatischen, der zweite bloss von den äussern Stromkräften abhängt; bezeichnen wir diese zwei Theile von Ω_{ns} mit Ω'_{ns} und Ω''_{ns}, setzen im zweiten λ_s statt $\varkappa_s$, und nehmen beide Arten von Kräften gleichzeitig vorhanden, aber als verschiedene Functionen der Zeit an, nämlich

$$Q=\Sigma e^{\varkappa_s t}\Sigma\varrho^n Q_{ns}, \qquad X=\Sigma e^{\lambda_s t}\Sigma\varrho^n X_{ns},$$

so wird der allgemeinste Ausdruck von Ω

$$\Omega=\Sigma e^{\varkappa_s t}\Sigma\varrho^n q'_{ns}\Omega'_{ns}+\Sigma e^{\lambda_s t}\Sigma\varrho^n q''_{ns}\Omega''_{ns}$$

und analog χ_1, χ_2, χ_3.

Nachdem so Ω und χ_1, χ_2, χ_3, mithin auch $u=\frac{1}{8\pi}\left(\frac{d^2\Omega}{dx\,dt}+\chi_1\right)$, v, w bestimmt sind, ergiebt sich ferner

$$(15.)\qquad \varepsilon=-\frac{1}{4\pi a^2}\Sigma e^{\varkappa_s t}\sum_1^\infty c_s^2\varrho^n q_{ns}\Omega_{ns},$$

$$(16.)\qquad e=\frac{E}{4\pi a^2}+\frac{1}{2\pi a}\Sigma e^{\varkappa_s t}\sum_1^\infty n a^n q^a_{n-1,s}\Omega_{ns}.$$

Die Stromdichtigkeit nach dem Radius ist

$$(17.)\qquad R=\frac{1}{8\pi}\frac{d}{dt}\Sigma e^{\varkappa_s t}\sum_1^\infty\varrho^{n-1}\left[2nq_{n-1,s}+(n+1)\frac{q^a_{ns}p_{ns}-p^a_{ns}q_{ns}}{p^a_{ns}}\right]\Omega_{ns},$$

an der Oberfläche ist hiernach, wegen (16.), $R^a = \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial t}$, wie es nach der Gleichung (*C.*) des §. 1 sein muss.

Die ganze durch eine der gegebenen concentrische Kugelfläche vom Radius ϱ in der Zeiteinheit strömende positive Elektricitätsmenge ist, wenn wir $R = \sum_1^\infty R_n$ setzen,

$$M = \varrho^2 \sum_1^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R_n \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\psi = 0,$$

d. h. durch jede der gegebenen concentrische Kugelfläche strömt in jedem Augenblick so viel positive (mithin auch negative) Elektricität aus wie ein, es bleibt also die ganze in einer concentrischen Kugel enthaltene positive Elektricitätsmenge beständig dieselbe und gleich der der negativen Elektricität. Es kann also auch auf der Oberfläche einer Kugel durch äussere Inductionskräfte die Elektricitätsmenge einer Art nie vermehrt oder vermindert werden, gerade als ob die Elektricität sich bloss auf der Oberfläche bewegte; mithin wird dadurch auch während der Bewegung ebensowenig wie im Gleichgewichtszustande ein Ueberschuss der einen Elektricitätsart über die andere aufgehäuft.

Aus (III.) folgt, dass wenn keine freie Elektricität vorhanden sein, also $\Omega = 0$ sein soll, $Q = 0$ und ausserdem

$$(18.) \quad \begin{cases} H^m_{n-1,s}(a) = 0, & (n = 1, 2, \ldots \infty, \; m = 1, \ldots n) \\ H^m_{n-1,s}(\alpha) = 0, & (n = 0, 1, \ldots \infty, \; m = 0, \ldots n) \end{cases}$$

sein muss. Diese zwei Gleichungen in Verbindung mit den Gleichungen (12.) sind aber die nothwendigen und genügenden Bedingungen dafür, dass die Resultirende der äussern Stromkräfte beständig auf dem Radius senkrecht steht, was dann natürlich auch für die Strömung stattfindet; es wird dann nach (IV.)

$$(19.) \quad A^m_{ns} = 8\pi k \frac{2n+1}{n} \frac{1}{(\mu\varkappa_s + 1) p^a_{n-1,s}} a^m_{ns}, \quad \mathrm{A}^m_{ns} = 8\pi k \frac{2n+1}{n} \frac{1}{(\mu\varkappa_s + 1) p^a_{n-1,s}} \alpha^m_{ns}$$

und analog *B*, *C*, B, *I'*. Sind also keine äussern elektrostatischen Kräfte vorhanden, und ist die Resultirende der äussern Stromkräfte in jedem Punkt auf dem Radius senkrecht, so verlaufen die — in diesem Falle natürlich geschlossenen — Stromcurven, d. h. die Linien, welche in jedem Punkt die Richtung der Strömung angeben, auf mit der gegebenen Kugel concentrischen Kugelflächen, und die Stromdichtigkeit ändert sich nur von einer solchen Stromcurve zur andern. Jn jedem andern Falle sind die Stromcurven nicht geschlossen, sondern endigen an der Oberfläche. Aus den Gleichungen (12.)

und (18.) folgt

$$(20.)\quad \begin{cases} b_{ns}^m = -\dfrac{1}{2(m-1)}\,a_{ns}^{m-1} - \dfrac{(n-m)(n-m-1)}{2(m+1)}\,a_{ns}^{m+1}, \\ c_{ns}^m = -\dfrac{1}{2(m-1)}\,a_{ns}^{m-1} - \dfrac{(n-m)(n-m+1)}{2(m+1)}\,a_{ns}^{m+1}, \\ b_{ns}^1 + c_{ns}^1 = -\dfrac{(n-1)(n+2)}{2}\,a_{ns}^2, \end{cases} \quad (n=0,1,\ldots\infty,\ m=0,2,3,\ldots n)$$

und ebenso wie b_{ns}^m und c_{ns}^m durch die zwei ersten Gleichungen, bestimmen sich β_{ns}^m und γ_{ns}^m mittelst der Coefficienten α für alle Werthe von n und m, auch für $m=1$; ausserdem ist $\alpha_{ns}^0 = 0$.

§. 4. Strömung unter Einwirkung auf dem Radius senkrechter äusserer Stromkräfte.

Wir wollen jetzt zunächst den zu Ende des vorigen Paragraphen betrachteten Fall näher untersuchen, wo keine äussern elektrostatischen, sondern bloss Stromkräfte vorhanden sind, deren Resultirende beständig und in jedem Punkt der Oberfläche parallel ist, wo also keine freie Elektricität auftritt; die eine Componente X dieser Kraft bleibt dann willkürlich, während die zwei andern Y und Z durch die Gleichungen (20.) bestimmt sind. Setzen wir

$$(21.)\qquad X = \sum_1^\infty \varrho^n X_n = \sum_1^\infty \varrho^n \Im e^{\varkappa_s t} X_{ns}$$

und analog Y und Z, so wird nach (19.)

$$(22.)\qquad u = \frac{1}{8\pi}\chi_1 = \sum_1^\infty \varrho^n u_n = 2k \sum_1^\infty \frac{2n+1}{2n}\,\varrho^n \Im e^{\varkappa_s t}\,\frac{p_{ns}}{(\mu\varkappa_s+1)\,p_{n-1,s}^a}\,X_{ns}$$

und entsprechend v und w. Um diesen Ausdruck weiter zu entwickeln, wollen wir $\mu\varkappa_s$ gegen 1 vernachlässigen, was im vorliegenden Falle, wo der Anfangszustand nicht in Betracht kommt, unbedenklich ist, da die der „Masse" der Elektricität proportionale Grösse μ jedenfalls sehr klein sein muss und wegen der Convergenz der Entwickelung von X in (21.) nur endliche Werthe von $\varkappa_s$ zu berücksichtigen sind. Setzen wir zur Abkürzung

$$(23.)\qquad \frac{1.3\ldots(2n+1)}{\Pi 2\sigma.(2\sigma+1)(2\sigma+3)\ldots(2\sigma+2n+1)} = \delta_{n\sigma},$$

führen neue numerische Constanten ε durch die Gleichung

$$(24.)\qquad \frac{1}{1+\sum_{\sigma=1}^{\sigma=\infty}{}' \delta_{n-1,\sigma}\,x^\sigma} = 1 + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\infty}{}' \varepsilon_{n\sigma}\,x^\sigma$$

ein, entwickeln p_{ns} nach Potenzen von g_s^2 nach (4.), und beachten, dass $\mathfrak{S} z_s^\tau e^{z_s t} X_{ns} = \frac{\partial^\tau X_n}{\partial t^\tau}$ ist, so wird

$$(\text{I.}) \qquad u = \sum_1^\infty \varrho^n u_n = 2kX + 2k \sum_{\tau=1}^{\tau=\infty} (8\pi h a^2)^\tau \sum_1^\infty \Big(\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\tau} \delta_{n\sigma} \varepsilon_{n,\tau-\sigma} \Big(\frac{\varrho}{a}\Big)^{2\sigma} \Big) \varrho^n \frac{\partial^\tau X_n}{\partial t^\tau}$$

und analog v und w. Die Stromdichtigkeit u erscheint hier durch eine nach Potenzen von $8\pi h a^2 = \frac{4k}{\varkappa^2} 8\pi a^2$ fortschreitende Reihe ausgedrückt, welche um so rascher convergiren wird, je kleiner ha^2 ist. Um ein Urtheil über den Werth dieser Constante zu gewinnen, wollen wir einen von Herrn *Weber* *) angegebenen und auch von Herrn *Kirchhoff* benutzten Werth des Leitungsvermögens k zu Grunde legen. Herr *Weber* fand den Widerstand des *Jacobi*schen Widerstands-Etalons, eines Kupferdrahtes von 7620^{mm} Länge und $\frac{1}{3}^{\text{mm}}$ Radius, in elektromagnetischem Mass gleich $598.10^7 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}$, folglich in mechanischem Mass $w = \frac{8}{\varkappa^2} \cdot 598 \cdot 10^7 = \frac{7620}{\pi . \frac{1}{9} . k}$, woraus

$$h = \frac{4k}{\varkappa^2} = \frac{9.7620.10^{-7}}{2.598.\pi} = 18.10^{-7}.$$

Es würde also $8\pi h a^2 = 1$ sein für eine Kugel aus diesem Stoff von 148^{mm} Radius; ist der Radius beträchtlich kleiner, so können wir uns, zumal wegen der rasch abnehmenden Zahlencoefficienten, auf die ersten Potenzen von $8\pi h a^2$ beschränken, und erhalten so als erste Näherungswerthe

$$u = 2kX$$

$$u = 2kX + 2k . 4\pi h \sum_1^\infty \Big(\frac{\varrho^2}{2n+3} - \frac{a^2}{2n+1} \Big) \varrho^n \frac{\partial X_n}{\partial t} .$$

Der erste Näherungswerth $u = 2kX$ ist derjenige, welcher sich aus Gleichung (*A.*) in §. 1 ergiebt, wenn man die elektromotorische Kraft $-\frac{4}{\varkappa^2} \frac{\partial U}{\partial t}$ der innern Ströme, welche selbst von der Ordnung hX ist, gegen die äussere Kraft X vernachlässigt; man sieht aber, dass diese Vernachlässigung für eine einigermassen grosse Kugel zu ganz falschen Resultaten führen würde. Die Stromdichtigkeit $u = 2kX$ ist hiernach diejenige, welche direct durch die äussere elektromotorische Kraft, ohne Mitwirkung der innern Ströme, inducirt wird, gerade als ob jede einzelne Strombahn ein isolirter Draht wäre; wir wollen sie die „Stromdichtigkeit erster Ordnung“ nennen. Der zweite Theil, die

---

*) Elektrodynamische Massbestimmungen. 2te Abhandlung, pag. 252.

„Stromdichtigkeit zweiter Ordnung", hängt von den nach der Zeit genommenen Differentialquotienten der äussern Kraft ab.

Es mögen z. B. die äussern Ströme und Magnete rings um eine Axe, welche wir als x-Axe annehmen, symmetrisch angeordnet sein, (die Ströme z. B. Kreise, deren Ebenen auf dieser Axe senkrecht stehen und deren Mittelpunkte in ihr liegen), und mögen in Richtung dieser Axe bewegt werden; die äussere elektromotorische Kraft steht dann in jedem Punkt senkrecht auf dem Meridian dieses Punktes, und die Strömung geschieht in Parallelkreisen. Wir haben für diesen Fall

$$X = 0, \qquad Y = -E\sin\psi, \qquad Z = E\cos\psi$$

zu setzen, wo, wenn wir $\cos\vartheta$ mit ξ bezeichnen,

$$(24.) \qquad E = \sin\vartheta \sum_1^\infty \varrho^n E_n \frac{dP^n}{d\xi}$$

die nach der Tangente des Parallelkreises gerichtete Resultirende der äussern Kräfte ist, und wo E_n eine blosse Function der Zeit bedeutet; bezeichnen wir mit λ die resultirende Stromdichtigkeit nach der Tangente des Parallelkreises, so ist nach (I.)

$$(25.) \quad \begin{cases} \lambda = \sin\vartheta \sum_1^\infty \varrho^n \lambda_n \frac{dP^n}{d\xi} \\ = 2kE + 2k\sin\vartheta \sum_{\tau=1}^{\tau=\infty} (8\pi h a^2)^\tau \sum_1^\infty \Big(\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\tau}{}' \delta_{n\sigma}\varepsilon_{n,\tau-\sigma}\Big(\frac{\varrho}{a}\Big)^{2\sigma}\Big) \varrho^n \frac{d^\tau E_n}{dt^\tau} \frac{dP^n}{d\xi}. \end{cases}$$

Es möge z. B. die äussere elektromotorische Kraft von einem auf der Axe senkrechten Kreisstrom von der Intensität J und dem Radius b herrühren, dessen Mittelpunkt sich mit der Geschwindigkeit v auf der Axe bewegt; c sei die veränderliche Entfernung seines Mittelpunkts vom Mittelpunkt der Kugel. Ist dann ϱ' die Entfernung eines Punktes des Kreises vom Kugelmittelpunkt, und setzt man $\frac{c}{\varrho'} = \cos\vartheta' = \xi'$, $\frac{b}{\varrho'} = \sin\vartheta'$, so findet man aus Gleichung (1.) in §. 1 leicht

$$E_n = \frac{4}{\varkappa^2} Jv \frac{2\pi b^2}{(n+1)\varrho'^{n+3}} \frac{dP^{n+1}(\xi')}{d\xi'}.$$

Indem man hierin ϱ' und ξ' nach Potenzen von c entwickelt, und c als periodische Function der Zeit annimmt, etwa

$$c = c_0\Big(1 + \gamma\cos\frac{2\pi t}{\delta}\Big), \text{ also } v = \frac{dc}{dt} = -c_0\gamma\frac{2\pi}{\delta}\sin\frac{2\pi t}{\delta},$$

erhält man schliesslich für E einen Ausdruck von der Form

$$E = \frac{4}{\varkappa^2} J \sin\vartheta \mathfrak{S} \sin\frac{2\pi st}{\delta} \sum_1^\infty \varrho^n \alpha_{ns} \frac{dP^n}{d\xi},$$

wodurch der obige zweite Näherungswerth wird

$$\lambda = 2hJ \sin\vartheta \mathfrak{S} \sin\frac{2\pi st}{\delta} \sum_1^\infty \alpha_{ns} \varrho^n \frac{dP^n}{d\xi}$$

$$+ \frac{16h^2\pi^2}{\delta} J \sin\vartheta \mathfrak{S} s \cos\frac{2\pi st}{\delta} \sum_1^\infty \alpha_{ns} \left(\frac{\varrho^2}{2n+3} - \frac{a^2}{2n+1}\right) \varrho^n \frac{dP^n}{d\xi}.$$

Zur Zeit $t = 0$ oder $t = m \cdot \frac{\delta}{2}$, wo $E = 0$ ist, ist dieser Werth von der Ordnung h^2.

Ist das Verhältniss 2γ der Schwingungsamplitude $2\gamma c_0$ des oscillirenden Inductors zu seiner mittlern Entfernung c_0 vom Kugelmittelpunkt so klein, dass man nur die erste Potenz von γ zu berücksichtigen braucht und folglich die elektromotorische Kraft einfach der Geschwindigkeit v des Inducenten proportional setzen kann, so wird, indem man mit C_n eine Constante bezeichnet,

$$E = \frac{4}{\varkappa^2} J c_0 \gamma \frac{2\pi}{\delta} \sin\frac{2\pi t}{\delta} \sin\vartheta \Sigma C_n \varrho^n \frac{dP^n}{d\xi},$$

also, wenn man mit α_n eine neue Constante bezeichnet,

$$(26.) \qquad E_n = \alpha_n \sin\frac{2\pi t}{\delta}.$$

Unter dieser einfachsten Annahme für E_n als Function der Zeit wird nach (25.), wenn man

$$(27.) \qquad \frac{32\pi^2 a^2 h}{\delta} = c^2$$

setzt,

$$(28.) \quad \begin{cases} \frac{\lambda_n}{2k\alpha_n} = \sin\frac{2\pi t}{\delta} - \frac{c^4}{4} \sin\frac{2\pi t}{\delta} \mathop{\mathfrak{S}}_{\tau=0}^{\tau=\infty} (-1)^\tau \left(\frac{c^2}{2}\right)^{2\tau} \sum_{\sigma=0}^{\sigma=2\tau+2}{}' \delta_{n\sigma} \varepsilon_{n,2\tau+2-\sigma} \left(\frac{\varrho}{a}\right)^{2\sigma} \\ \qquad + \frac{c^2}{2} \cos\frac{2\pi t}{\delta} \mathop{\mathfrak{S}}_{\tau=0}^{\tau=\infty} (-1)^\tau \left(\frac{c^2}{2}\right)^{2\tau} \sum_{\sigma=0}^{\sigma=2\tau+1}{}' \delta_{n\sigma} \varepsilon_{n,2\tau+1-\sigma} \left(\frac{\varrho}{a}\right)^{2\sigma} \\ = \left(1 - \frac{c^4}{4} p_n\right) \sin\frac{2\pi t}{\delta} + \frac{c^2}{2} q_n \cos\frac{2\pi t}{\delta} \end{cases}$$

oder, wenn man $A = \Sigma\left(1 - \frac{c^4}{4} p_n\right) \alpha_n \varrho^n \frac{dP^n}{d\xi}$, $B = \frac{c^2}{2} \Sigma q_n \alpha_n \varrho^n \frac{dP^n}{d\xi}$ setzt,

$$\lambda = 2k \sin\vartheta \sqrt{A^2 + B^2} \sin\left(\frac{2\pi t}{\delta} + \operatorname{Arc\,tg} \frac{B}{A}\right),$$

welche Gleichung die Abhängigkeit der Amplitude $2k\sin\vartheta\sqrt{A^2+B^2}$ und der Phase $\operatorname{Arc\,tg}\frac{B}{A}$ der elektrischen Schwingung von ϱ und ϑ angiebt.

Für kleine Werthe von c convergirt die nach Potenzen von c^4 fortschreitende Reihe (28.) wegen der rasch abnehmenden Zahlencoefficienten sehr stark; ist c so klein, dass wir die Glieder mit höheren Potenzen als die vierte gegen 1 vernachlässigen können, so dürfen wir an der Oberfläche setzen

$$(29.)\quad \frac{\lambda_n^a}{2k\alpha_n} = \Big(1-\frac{c^4}{2(2n+1)^2(2n+3)(2n+5)}\Big)\sin\frac{2\pi t}{\delta} - \frac{c^2}{2(2n+1)(2n+3)}\cos\frac{2\pi t}{\delta},$$

$$(30.)\quad \frac{\lambda_1^a}{2k\alpha_1} = \Big(1-\frac{c^4}{630}\Big)\sin\frac{2\pi t}{\delta} - \frac{c^2}{30}\cos\frac{2\pi t}{\delta} = \sqrt{1-\frac{13c^4}{6300}}\sin\Big(\frac{2\pi t}{\delta} - \operatorname{arc\,tg}\frac{c^2}{30}\Big).$$

So ist z. B. $c^2 = \frac{1}{10}$ für $a = 100^{\text{mm}}$, $\delta = 57''$ bei dem oben angegebenen Werth von h, die Glieder mit c^4 sind schon verschwindend klein gegen 1, und wir können mit grosser Annäherung setzen

$$\frac{\lambda_n^a}{2k\alpha_n} = \sin\frac{2\pi t}{\delta} - \frac{1}{20(2n+1)(2n+3)}\cos\frac{2\pi t}{\delta}.$$

Für Werthe von c dagegen, welche beträchtlich grösser als 1 sind, ist die Reihe (28.), obwohl immer convergent, doch zur näherungsweisen Berechnung nicht brauchbar. Für diesen Fall erhalten wir bei der in (26.) für E_n gemachten Annahme aus (22.), indem wir

$$\frac{ip_{ns}^a}{2np_{n-1,s}^a} = C_n + iD_n$$

setzen,

$$(31.)\quad \lambda_n^a = -2k(2n+1)\alpha_n\Big(C_n\cos\frac{2\pi t}{\delta} - D_n\sin\frac{2\pi t}{\delta}\Big).$$

Nun ist nach (5.)

$$(32.)\quad \frac{ip_{ns}^a}{2np_{n-1,s}^a} = C_n + iD_n = -\frac{1}{nc^2}\cdot\frac{(1-e^{-c(1+i)})F_n + (1+e^{-c(1+i)})G_n}{(1-e^{-c(1+i)})F_{n-1} + (1+e^{-c(1+i)})G_{n-1}},$$

woraus sich durch Trennung des Reellen und Imaginären C_n und D_n berechnen lassen. Z. B. für $n=1$ erhält man hieraus

$$(33.)\quad \frac{\lambda_1^a}{2k\alpha_1} = \frac{3}{c}\cdot\frac{e^c-e^{-c}-2\sin c}{e^c+e^{-c}-2\cos c}\sin\frac{2\pi t}{\delta} - \frac{3}{c}\Big(\frac{e^c-e^{-c}+2\sin c}{e^c+e^{-c}-2\cos c} - \frac{2}{c}\Big)\cos\frac{2\pi t}{\delta}.$$

Ist c so gross, dass man e^{-c} gegen 1 vernachlässigen darf, so kann man nach (32.) setzen

$$C_n + iD_n = -\frac{1}{nc^2}\cdot\frac{F_n+G_n}{F_{n-1}+G_{n-1}}.$$

Für $n = 1$ erhält man unter dieser Annahme

$$(34.)\quad \begin{cases} \frac{\lambda_1^a}{2k\alpha_1} = \frac{3}{c}\sin\frac{2\pi t}{\delta} - \frac{3}{c}\left(1-\frac{2}{c}\right)\cos\frac{2\pi t}{\delta} \\ \qquad\quad = \frac{3}{c}\sqrt{\left\{2\left(1-\frac{2}{c}\right)+\frac{4}{c^2}\right\}}\sin\left[\frac{2\pi t}{\delta} - \operatorname{arc\,tg}\left(1-\frac{2}{c}\right)\right]. \end{cases}$$

Z. B. für $a = 100^{\text{mm}}$, $\delta = \frac{1}{25}''$ wird $c = 12$, $e^{-c} < 10^{-5}$, was gegen 1 vernachlässigt werden darf; für diese Werthe ist also

$$\frac{\lambda_1^a}{2k\alpha_1} = \tfrac{1}{4}\sin\frac{2\pi t}{\delta} - \tfrac{5}{24}\cos\frac{2\pi t}{\delta} = \tfrac{1}{3}\sin\frac{2\pi}{\delta}\left(t-\frac{\delta}{9}\right).$$

Von der dem Werth $n = 1$ entsprechenden partiellen Stromdichtigkeit ist nach der oben eingeführten Bezeichnungsweise $2k\alpha_1 \sin\frac{2\pi t}{\delta}\cdot a\sin\vartheta$ die partielle Stromdichtigkeit erster Ordnung; ihr Maximum ist $2k\alpha_1 . a\sin\vartheta$ und findet zur Zeit $t = \frac{\delta}{4}$ Statt. Zur Zeit $t = \frac{\delta}{2}$ verschwindet die Stromdichtigkeit erster Ordnung, und das Verhältniss der übrig bleibenden partiellen Stromdichtigkeit zweiter Ordnung zu jenem Maximum ist in den zwei oben betrachteten Fällen eines kleinen und eines grossen Werthes von c oder $\frac{a^2}{\delta}$ nach (30.) und (34.)

$$(35.)\quad \frac{\lambda_1^a}{2k\alpha_1} = \frac{c^2}{30} \text{ und } = \frac{3}{c}\left(1-\frac{2}{c}\right),$$

in den zwei obigen Beispielen gleich $\frac{1}{300}$ und gleich $\frac{5}{24}$. Das zweite Beispiel zeigt recht deutlich, wie bedeutend der inducirende Einfluss der inneren Ströme sein kann; in dem Moment, wo die äussere elektromotorische Kraft gleich Null ist, bleibt fast ein Viertel des Maximums der Stromdichtigkeit erster Ordnung bestehen; die Phase der elektrischen Schwingung wird um ein Neuntel der Oscillationsdauer des Inductors verzögert, und ihre Amplitude ist ein Drittel von derjenigen der Stromdichtigkeit erster Ordnung. Aus (35.) lässt sich schliessen, dass zur Zeit $t = \frac{\delta}{2}$ das Verhältniss der übrig bleibenden Stromdichtigkeit zweiter Ordnung zu dem Maximum der Stromdichtigkeit erster Ordnung für einen bestimmten Werth von c oder $\frac{a^2}{\delta}$ ein Maximum haben muss, welches sich aus (33.) würde berechnen lassen.

§. 5. Strömung ohne Einwirkung einer äussern elektromotorischen Kraft.

Für den Fall, wo $X = Y = Z = Q = 0$ ist, müssen, wie der Verlauf der Rechnung ergiebt, die Exponenten $\varkappa$, von n abhängig sein; wir wollen

daher $\varkappa_{ns}$ statt $\varkappa_s$ setzen, und entsprechend die durch die Gleichungen (1.) und (7.) bestimmten Constanten mit g_{ns} und c_{ns} bezeichnen; unter p_{ns} verstehen wir die durch die Gleichung (3.) bestimmte Function, in welcher $\varkappa_{ns}$ statt $\varkappa_s$ gesetzt wird; soll ein andrer Exponent, z. B. $\varkappa_{n-1,s}$, statt $\varkappa_s$ gesetzt werden, so bezeichnen wir dies durch $p_{ns}(\varkappa_{n-1})$. Wir setzen

$$\text{(I.)}\quad \begin{cases} \Omega = \sum_0^\infty \varrho^n \mathfrak{S} e^{\varkappa_{ns} t} q_{ns} \mathfrak{S}(F^m_{ns} S^n_m + \Phi^m_{ns} C^n_m), \\ \chi_1 = \sum_1^\infty \varrho^n \mathfrak{S} e^{\varkappa_{n-1,s} t} p_{ns}(\varkappa_{n-1}) \mathfrak{S}(A^m_{ns} S^n_m + \mathrm{A}^m_{ns} C^n_m) \\ \qquad\qquad + \sum_0^\infty \varrho^n \mathfrak{S} e^{\varkappa_{n+1,s} t} p_{ns}(\varkappa_{n+1}) \mathfrak{S}(A'^m_{ns} S^n_m + \mathrm{A}'^m_{ns} C^n_m) \end{cases}$$

und ganz analog χ_2 und χ_3, worin nur statt $A^m_{ns} S^n_m + \mathrm{A}^m_{ns} C^n_m$ resp. $B^m_{ns} S^n_m + \mathrm{B}^m_{ns} C^n_m$ und $C^m_{ns} C^n_m - I'^m_{ns} S^n_m$ zu setzen ist, und entsprechend statt $A'^m_{ns} S^n_m + \mathrm{A}'^m_{ns} C^n_m$. Dann geht die Gleichung (II.) des §. 2 in folgende, der Gleichung (*A.*) des §. 3 entsprechende Gleichungen über:

$$(A.)\qquad \frac{1}{2n(2n-1)} \frac{g^2_{ns}}{a^2} H^m_{n-1,s}(A') + \frac{2(n+1)}{2n+3} K^m_{n+1,s}(A) = 0,$$

$$(a.)\qquad H^m_{n-1,s}(A) = 0, \qquad (b.)\qquad K^m_{n+1,s}(A') = 0$$

von $n = 1$, $m = 1$ an, und ganz dieselben Gleichungen gelten für die Coefficienten A, A′ etc. von $n = 0$, $m = 0$ an. An Stelle der Gleichung (*B.*) des §. 3 tritt

$$\text{(II.)}\quad \begin{cases} (\mu \varkappa_{n-1,s} + 1) p^a_{n-1,s}(\varkappa_{n-1}) A^m_{ns} = -\frac{n-m}{2n(2n-1)} 8\pi h \varkappa^2_{n-1,s} q^a_{n-1,s}(\varkappa_{n-1}) F^m_{n-1,s}, \\ (\mu \varkappa_{n+1,s} + 1) p^a_{n-1,s}(\varkappa_{n+1}) A'^m_{ns} = \frac{2(n+1)(n+m+1)}{2n+3} \frac{8\pi h a^2 \varkappa^2_{n+1,s}}{c^2_{n+1,s}} q^a_{n-1,s}(\varkappa_{n+1}) F^m_{n+1,s} \end{cases}$$

und B^m_{ns}, B'^m_{ns} sowie C^m_{ns}, C'^m_{ns} erhält man hieraus, indem man für $-(n-m)F^m_{n-1,s}$ und $(n+m+1)F^m_{n+1,s}$ die in (10.) angegebenen Substitutionen macht. Ganz ebenso werden die Coefficienten A durch die Coefficienten Φ ausgedrückt. In B′ und B″, I'' und I''' ist Φ^0 zu verdoppeln. Für $n = 0$ ist die Bemerkung zu Gleichung (6.) zu beachten; daher verschwinden die Coefficienten C, A, B für $n = 0$, was schon in (I.) durch die Grenzen der Summation nach n angedeutet ist.

Indem man die Werthe (II.) in die Gleichungen (*A.*), (*a.*), (*b.*) einsetzt, werden die zwei letztern identisch erfüllt, und (*A.*) geht in die der Gleichung (*C.*) des §. 3 entsprechenden Gleichungen über, nämlich, mit An-

wendung der Bezeichnung (14.),

$$\frac{\varkappa_{ns}^2}{J_{ns}} F_{ns}^m = 0, \qquad \frac{\varkappa_{ns}^2}{J_{ns}} \Phi_{ns}^m = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots \infty).$$

Sollen also nicht sämmtliche Coefficienten F, Φ verschwinden, so müssen, da $\frac{\varkappa_{ns}^2}{J_{ns}}$ für $\varkappa_{ns} = 0$ von Null verschieden ist, für die Exponenten $\varkappa_{ns}$ die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung

$$\text{(III.)} \qquad \frac{1}{J_{ns}} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{q_{ns}^a}{p_{ns}^a} - \frac{n}{n+1} \frac{g_{ns}^2}{c_{ns}^2} \frac{q_{n-2,s}^a}{p_{n-2,s}^a} = 0 \quad (n > 0)$$

genommen werden; dieselben sind sämmtlich von Null verschieden; für $n = 1$ ist nach (6.) $\frac{q_{n-2,s}^a}{p_{n-2,s}^a} = \frac{e^{c_{1s}} + e^{-c_{1s}}}{e^{g_{1s}} + e^{-g_{1s}}}$ zu setzen. Vermöge der zwei ersten Gleichungen (6.) lässt sich diese Gleichung auch folgendermassen schreiben:

$$\text{(36.)} \qquad (n+1)\left(\frac{p_{n-1,s}}{\frac{dp_{n-1,s}}{d\varrho}}\right)^a - n\left(\frac{q_{n-1,s}}{\frac{dq_{n-1,s}}{d\varrho}}\right)^a = -\frac{a}{2n-1}.$$

Für $n = 0$ geht die Gleichung (A.) über in $K_{1s}^0(\mathrm{A}) = 0$, d. h. $\Phi_{0s}^0 = 0$, ausser wenn $\varkappa_{ns} = 0$ ist, in welchem Falle Φ_{0s}^0 unbestimmt bleibt; das dem Werth $n = 0$ entsprechende Glied der Reihe $\Omega = \Sigma \varrho^n \Omega_n$ reducirt sich also auf eine Constante, deren Werth sich wie in §. 3 gleich $\frac{E}{a}$ ergiebt. Es ist also

$$\text{(IV.)} \qquad \Omega = \frac{E}{a} + \sum_1^\infty \varrho^n \Omega_n = \frac{E}{a} + \sum_1^\infty \varrho^n \Sigma e^{\varkappa_{ns} t} q_{ns} \Omega_{ns},$$

wo $\Omega_{ns} = \int (F_{ns}^m S_m^n + \Phi_{ns}^m C_m^n)$ durch den willkürlichen Anfangszustand zu bestimmen ist, während χ_1, χ_2, χ_3 sich durch (I.) und (II.) mittelst Ω bestimmen. ε und e sind durch die Gleichungen (15.) und (16.) gegeben, in denen nur $\varkappa_{ns}$ statt $\varkappa_s$ zu setzen ist.

Ist dagegen keine freie Elektricität vorhanden, sind also sämmtliche Coefficienten F und Φ gleich Null, so genügt man den Gleichungen (II.) durch die Annahme

$$\text{(37.)} \qquad \begin{cases} A_{ns}^{\prime m} = B_{ns}^{\prime m} = C_{ns}^{\prime m} = \mathrm{A}_{ns}^{\prime m} = \mathrm{B}_{ns}^{\prime m} = I_{ns}^{\prime m} = 0, \\ p_{n-1,s}^a(\varkappa_{n-1}) = 0; \end{cases}$$

für die Exponenten $\varkappa_{n-1,s}$ sind also die sämmtlichen Wurzeln der vorstehenden Gleichung zu nehmen; die durch die Gleichungen (II.) nicht bestimmten Coef-

ficienten A, A etc. müssen dann den Gleichungen ($A.$) und ($a.$), d. h. wegen (37.) den Gleichungen

$$(\mathrm{II}^a.) \qquad H^m_{n-1,s}(A) = 0, \qquad K^m_{n+1,s}(A) = 0$$

genügen, welche nach §. 3 Gleichung (18.) die nothwendigen und genügenden Bedingungen dafür sind, dass die Strömung in jedem Punkt auf dem Radius senkrecht steht; hieraus bestimmen sich dann durch die Gleichungen (20.), in denen nur die grossen Buchstaben statt der kleinen zu setzen sind, die Coefficienten B, C, B, I' mittelst A und A, also χ_2 und χ_3 durch χ_1, welches letztere durch den willkürlichen Anfangszustand zu bestimmen ist. Es wird also für diesen Fall, wenn wir $\varkappa_{ns}$ statt $\varkappa_{n-1,s}$ setzen und für $\varkappa_{ns}$ die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung

$$(\mathrm{III}^a.) \qquad p^a_{n-1,s} = 0 \quad \text{oder} \quad \left[\varrho \frac{dp_{ns}}{d\varrho} + (2n+1)p_{ns}\right]^a = 0$$

nehmen,

$$(\mathrm{IV}^a.) \qquad u = \frac{1}{8\pi} \sum_1^\infty \varrho^n \Im e^{\varkappa_{ns} t} p_{ns} \Sigma (A^m_{ns} S^n_m + \mathrm{A}^m_{ns} C^n_m)$$

und analog v und w. Umgekehrt können die Gleichungen (37.) nicht bestehen, ohne dass sämmtliche Coefficienten F, Φ verschwinden.

Die in diesem Paragraphen bestimmten Werthe von Ω und u, v, w müssen zu den in §. 4 bestimmten Werthen hinzugefügt werden, um die vollständigen Ausdrücke zu geben. Bei dem Problem des §. 4 ist die ganze Stromdichtigkeit $u'' = u + u'$, wo $u = \Sigma \varrho^n \Im e^{\varkappa_s t} p_{ns} u_{ns}$ durch die Gleichung (22.), $u' = \Sigma \varrho^n \Im e^{\varkappa_{ns} t} p'_{ns} u'_{ns}$ durch die Gleichung ($\mathrm{IV}^a.$) gegeben ist. Die Constanten von u' bestimmen sich dann durch die Bedingung, dass u'' für $t = 0$ sich auf eine gegebene Function der Coordinaten reduciren soll; ist z. B. die äussere elektromotorische Kraft anfangs gleich Null, (indem etwa der oscillirende Inductor in diesem Moment seine Bewegung beginnt), so muss $u'' = 0$ sein für $t = 0$, d. h. für jeden Werth von ϱ muss $\Im u'_{ns} p'_{ns} = -\Im u_{ns} p_{ns}$ sein, woraus sich die Coefficienten u'_{ns} in der Weise bestimmen lassen, wie im folgenden Paragraphen angegeben werden wird. Ich will indessen auf die Darstellung des Anfangszustandes nicht näher eingehen, da dieselbe doch nur ein geringes physikalisches Interesse hat. Aus der Erfahrungsthatsache nämlich, dass die Bewegung der Elektricität nach dem Aufhören der äussern elektromotorischen Kraft sehr schnell erlischt, lässt sich schliessen, dass die durch die Gleichung (III.) oder ($\mathrm{III}^a.$) bestimmten Exponenten $\varkappa_{ns}$ einen sehr grossen negativen reellen Theil haben müssen, so dass die Behufs Darstellung des willkürlichen Anfangszu-

standes hinzuzufügenden Functionen Ω' und u', welche die Bewegung der sich selbst überlassenen Elektricität ausdrücken, schon nach sehr kurzer Zeit unmerklich werden und also von da an Ω und u als die vollständigen Lösungen des Problems anzusehen sind. Dagegen treten jene Functionen Ω' und u' allein auf, wenn es sich um die nach Erlöschen der äussern elektromotorischen Kraft noch fortdauernde Strömung handelt; von diesem Problem, welches namentlich wegen der Frage nach der *Dauer* der elektrischen Nachwirkung einiges physikalisches Interesse hat, soll im folgenden Paragraphen ein specieller Fall behandelt werden.

§. 6. Strömung parallel der Oberfläche nach Erlöschen der äussern elektromotorischen Kraft.

Wir wollen annehmen, dass unter Einwirkung äusserer Stromkräfte eine überall auf dem Radius senkrechte Strömung eine gewisse Zeit T hindurch angedauert habe, und dass in einem bestimmten Moment, den wir als Anfangspunkt der Zeit t nehmen, die äussere Kraft verschwinde, indem z. B. der oscillirende Inductor plötzlich in seiner Bewegung gehemmt werde. Es tritt dann weder zu Anfang, noch im Verlauf der Strömung freie Elektricität auf; die in den Ausdrücken für die Stromdichtigkeiten, (IV^a.) des vorigen Paragraphen, enthaltenen Constanten müssen den Gleichungen (II^a.) des vorigen Paragraphen oder den Gleichungen (20.) genügen und bestimmen sich vollständig durch die Bedingung, dass u, v, w für $t=0$ sich auf die durch die Gleichung (22.) gegebenen Werthe für $t=T$ reduciren müssen, deren Constanten denselben Gleichungen genügen. Wir setzen

$$g_{ns}^2 = -x_{ns}^2, \quad \text{also} \quad \varkappa_{ns} = -\frac{x_{ns}^2}{8\pi h a^2 + \mu x_{ns}^2},$$

$$(38.)\quad \begin{cases} \lambda_{ns} = \varrho^{n+1} p_{ns} = 2\varrho^{n+1} \int_0^1 (1-z^2)^n \cos\left(x_{ns}\frac{\varrho}{a} z\right) dz \\ \qquad = 2\varrho^{n+1} \dfrac{F_n\left(x_{ns}\frac{\varrho}{a}\right)\sin\left(x_{ns}\frac{\varrho}{a}\right) + G_n\left(x_{ns}\frac{\varrho}{a}\right)\cos\left(x_{ns}\frac{\varrho}{a}\right)}{\left(x_{ns}\frac{\varrho}{a}\right)^{2n+1}}, \end{cases}$$

wo nach (5.)

$$F_n(x) = \sum_0^\sigma{}' (-1)^\sigma a_{2\sigma} x^{2\sigma}, \quad G_n(x) = -\sum_0^\sigma{}' (-1)^\sigma a_{2\sigma+1} x^{2\sigma+1}, \quad a_\sigma = 2^\sigma \binom{n}{\sigma} \Pi(2n-\sigma).$$

Es wird dann

$$(A.) \qquad u = \sum_1^\infty \varrho^n u_n = \frac{1}{\varrho} \sum_1^\infty \mathfrak{S} e^{-\frac{x_{ns}^2 t}{8\pi h a^2 + \mu x_{ns}^2}} \lambda_{ns} u_{ns}$$

und analog v und w, wobei sich das Summationszeichen $\mathfrak{S}$ auf alle Wurzeln x_{ns}^2 der Gleichung (III^a.) des vorigen Paragraphen, nämlich

$$(B.) \qquad \begin{cases} \lambda_{n-1,s}^a = 0 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{d\lambda_{ns}}{d\varrho}\right)^a + \frac{n}{a}\lambda_{ns}^a = 0 \quad \text{oder} \\ \left[\frac{d(\varrho^n \lambda_{ns})}{d\varrho}\right]^a = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots \infty) \end{cases}$$

bezieht, oder, was dasselbe ist, auf die sämmtlichen von Null verschiedenen Wurzeln x^2 der Gleichung

$$(B'.) \qquad F_{n-1}(x)\sin x + G_{n-1}(x)\cos x = 0.$$

Endlich ist die Kugelfunction u_{ns} durch die Bedingung zu bestimmen, dass u_n für $t = 0$ sich auf eine gegebene Function von ϱ reduciren soll, also durch die Gleichung

$$(C.) \quad \varrho^{n+1} u_n = \mathfrak{S} u_{ns} \lambda_{ns} = f(\varrho) \quad \text{(für jeden Werth von } \varrho \text{ von 0 bis } a).$$

Diese Gleichungen stimmen der Form nach mit denjenigen überein, durch welche *Poisson* die Wärmebewegung in einer ursprünglich in beliebiger Weise erwärmten und dann in eine Umgebung von der Temperatur Null versetzten Kugel bestimmt. Aus der Differentialgleichung für λ_{ns}, nämlich

$$(39.) \qquad \frac{d^2\lambda_{ns}}{d\varrho^2} + \left(\frac{x_{ns}^2}{a^2} - \frac{n(n+1)}{\varrho^2}\right)\lambda_{ns} = 0$$

leitet *Poisson* durch partielle Integration die Gleichung

$$(40.) \qquad \int_0^a \lambda_{ns}\lambda_{n\sigma}\, d\varrho = 0$$

ab, wo $\lambda_{n\sigma}$ sich auf irgend eine von x_{ns} verschiedene Wurzel der Gleichung ($B.$) bezieht; daraus folgert er, dass sämmtliche Wurzeln x^2 der Gleichung ($B.$) reell sind; dass sie dann grösser als Null sein müssen, ergiebt sich unmittelbar aus (38.). *Die Wurzeln x der Gleichung ($B.$) sind also sämmtlich reell und von Null verschieden;* je zwei sind gleich und von entgegengesetztem Zeichen. Dass λ_{ns} für alle reellen Werthe von x endlich bleibt, ebenso wie für alle endlichen Werthe von ϱ, folgt unmittelbar aus (38.).

Aus (39.) folgt, dass alle Wurzeln der Gleichung ($B.$) grösser als $\sqrt{n(n+1)}$ sind. Nach (6.) genügt die Function $x^{n+1}\lambda_{ns}^a = \lambda_n(x)$ den Gleichungen

$$(41.) \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{x^n}\right) = -\frac{1}{2n}\cdot\frac{\lambda_n}{x^n}, \qquad \frac{d}{dx}(x^n\lambda_n) = 2nx^n\lambda_{n-1}.$$

Hieraus folgt zunächst, dass sämmtliche Wurzeln der Gleichung (*B.*) ungleich sind. Ferner muss zwischen zwei successiven, von Null verschiedenen Wurzeln von $\lambda^{n-1}=0$ oder $\frac{\lambda_{n-1}}{x^n}=0$ wenigstens *ein* Werth von x liegen, für den $\frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda_{n-1}}{x^n}\right)$ gleich Null wird, und für diesen ist nach der ersten der Gleichungen (41.) $\lambda_n=0$; umgekehrt liegt nach der zweiten Gleichung zwischen zwei successiven Wurzeln von $\lambda_n=0$, die Wurzel $x=0$ eingeschlossen, wenigstens *eine* Wurzel von $\lambda_{n-1}=0$. Zwischen je zwei successiven, von Null verschiedenen Wurzeln von $\lambda_{n-1}=0$ liegt also eine und nur eine Wurzel von $\lambda_n=0$, die Wurzeln von $\lambda_{n-1}=0$ und $\lambda_n=0$ wechseln also mit einander ab, und die kleinste von Null verschiedene Wurzel von $\lambda_n=0$ folgt auf die von $\lambda_{n-1}=0$. Am kleinsten sind daher die Wurzeln der Gleichung (*B.*) für $n=1$, wo dieselbe übergeht in $\frac{\sin x}{x}=0$, deren Wurzeln $x_s=s\pi$ $(s=1, 2, \ldots \infty)$ sind; die kleinste aller Wurzeln für alle Werthe von n ist mithin $x=\pi$. Es folgt hieraus einmal, dass die Gleichung (*B.*) unendlich viele Wurzeln hat, welche eine ins Unendliche wachsende Reihe bilden; ferner dass für nicht ganz kleine Werthe von t die Glieder der Summe (*A.*) mit wachsendem n mehr und mehr unmerklich werden, und dass man sich für einigermassen grosse Werthe von t auf das dem Werth $n=1$ und der kleinsten Wurzel $x=\pi$ entsprechende Glied der Reihe beschränken, also

$$u = e^{-\frac{\pi t}{8ha^2+\mu\pi}} \frac{\lambda_{11}}{\varrho} u_{11}$$

setzen kann.

Alle diese Resultate ergeben sich auch aus den allgemeineren Sätzen, welche *Sturm* in zwei Abhandlungen *) über die der allgemeinsten linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügenden Functionen direct aus dieser Differentialgleichung abgeleitet hat. Aus diesen Sätzen (a. a. O. pag. 168) ergiebt sich noch weiter, dass wenn α, β zwei successive Wurzeln der durch die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\lambda_n}{dx^2}+\left(1-\frac{n(n+1)}{x^2}\right)\lambda_n = 0$$

bestimmten Function λ_n sind, die Ungleichheiten

$$\beta-\alpha > \frac{\pi}{\sqrt{1-\frac{n(n+1)}{\beta^2}}} \quad \text{und} \quad < \frac{\pi}{\sqrt{1-\frac{n(n+1)}{\alpha^2}}}$$

*) „Mémoire sur les équations différentielles linéaires du 2 ordre“ und „Mémoire sur une classe d'équations à différences partielles“. Journal de M. *Liouville* T. I.

erfüllt sind. Wenn man also die Wurzeln nach wachsender Grösse ordnet, so nimmt die Differenz zweier benachbarten Wurzeln beständig ab und nähert sich immer mehr dem Werth π. Da hiernach in einem Intervall $s\pi$ bis $(s+1)\pi$ höchstens *eine* Wurzel liegen kann, so enthält dasselbe eine oder keine Wurzel, je nachdem λ_n für $s\pi$ und $(s+1)\pi$ verschiedenes oder gleiches Zeichen hat, mithin nach (38.), je nachdem $G_n(x)$ für $s\pi$ und $(s+1)\pi$ gleiches oder verschiedenes Zeichen hat. Da nun G_n sein Zeichen nicht mehr ändert, wenn x oberhalb der Grenze

$$g = \sqrt{\frac{a_{n-2}}{a_n}} = \sqrt{\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{8}}$$

liegt, so liegt oberhalb dieser Grenze in jedem Intervall $s\pi$ bis $(s+1)\pi$ eine und nur eine Wurzel von $\lambda_{ns}^{n}=0$. Es liegen übrigens unter Umständen auch unterhalb dieser Grenze noch Wurzeln. Die oberhalb der Grenze g liegenden Wurzeln fallen für ein grades n zwischen $s\pi+\frac{1}{2}\pi$ und $(s+1)\pi$, für ein ungrades n zwischen $s\pi$ und $s\pi+\frac{1}{2}\pi$. So findet man z. B. für $\lambda_1=0$ und $\lambda_3=0$ eine und nur eine Wurzel zwischen $s\pi$ und $s\pi+\frac{1}{2}\pi$, für $\lambda_2=0$ und $\lambda_4=0$ eine und nur eine Wurzel zwischen $s\pi+\frac{1}{2}\pi$ und $(s+1)\pi$, wo s für λ_1 und λ_2 alle Werthe von 1 bis ∞, für λ_3 und λ_4 alle Werthe von 2 bis ∞ haben kann, während zwischen π und 2π keine Wurzel von $\lambda_3=0$ und $\lambda_4=0$ liegt. Nach den angegebenen Principien kann man die Wurzeln mit Leichtigkeit in Grenzen einschliessen und diese dann nach irgend einem Näherungsverfahren verengern; so findet man z. B. für die kleinste Wurzel von $\lambda_1=0$ die Grenzen 4,3662 und 4,5002.

Hinsichtlich der Function λ_{ns} von ϱ ergiebt sich noch aus dem Vorhergehenden, dass, wenn man die Wurzeln x_{n1}, x_{n2}, ... nach wachsender Grösse geordnet denkt, λ_{ns} für $s-1$ Werthe von ϱ zwischen 0 und a (die Wurzel $\varrho=0$ nicht mitgerechnet) verschwindet und in diesen Punkten jedesmal sein Zeichen ändert. Diese Werthe sind, wenn man mit x_{ns} und $x_{n+1,\sigma}$ resp. eine Wurzel von $\lambda_{n-1}(x)=0$ und $\lambda_n(x)=0$ bezeichnet,

$$\varrho_1 = a\frac{x_{n+1,1}}{x_{ns}}, \qquad \varrho_2 = a\frac{x_{n+1,2}}{x_{ns}}, \qquad \ldots \qquad \varrho_{s-1} = a\frac{x_{n+1,s-1}}{x_{ns}}.$$

Setzen wir nach dem Vorstehenden die Wurzeln der Gleichung (*B.*) als bekannt voraus, so bleibt noch die in (*A.*) enthaltene Kugelfunction u_{ns} mittelst der Gleichung (*C.*) zu bestimmen. Diese Bestimmung ergiebt sich nach *Poisson* unmittelbar aus der Gleichung (40.) in Verbindung mit (*C.*); daraus folgt nämlich

$$(42.) \qquad u_{ns} = \frac{\int_0^a \lambda_{ns} f(\varrho)\, d\varrho}{\int_0^a \lambda_{ns}^2\, d\varrho},$$

oder da $\int_0^a \lambda_{ns}^2\, d\varrho = \frac{a}{2}(\lambda_{ns}^a)^2$ ist,

$$(D.) \qquad u_{ns} = \frac{2}{a(\lambda_{ns}^a)^2} \int_0^a \lambda_{ns} f(\varrho)\, d\varrho.$$

Bekanntlich hat Herr *Liouville* *) die von *Poisson* bloss vorausgesetzte Möglichkeit der Entwickelung einer beliebigen Function $f(\varrho)$ in eine Reihe von der Form (*C.*) bewiesen, indem er gezeigt hat, dass wenn man in (*C.*) für u_{ns} den Werth (42.) setzt, die auf der linken Seite der Gleichung (*C.*) stehende unendliche Reihe wirklich den Werth $f(\varrho)$ hat. Sein Beweis schliesst indessen nicht aus, dass dennoch in *einzelnen* Punkten des Intervalls 0 bis a der Werth jener Reihe von $f(\varrho)$ verschieden sein kann; und jedenfalls muss dies an der Grenze $\varrho = a$ der Fall sein, wenn hier die willkürliche Function $f(\varrho)$ nicht der Bedingung

$$(43.) \qquad \frac{d(\varrho^n f(\varrho))}{d\varrho} = 0$$

genügt, da die auf der linken Seite von (*C.*) stehende Reihe wegen (*B.*) dieser Gleichung genügt. Die Bedingung (43.) ist aber im Allgemeinen nicht erfüllt bei dem Eingangs dieses Paragraphen aufgestellten Problem. Bei diesem wird nämlich zur Zeit $t = 0$, oder am Ende des Zeitraums T, die Bewegung durch die Gleichung (22.) dargestellt, d. h., wenn wir zur Unterscheidung $\lambda_{ns}(\varkappa_s) = L_{ns}$ setzen, durch

$$(44.) \qquad U = \sum_1^\infty \varrho^n U_n = \frac{1}{\varrho} \sum_1^\infty \mathfrak{S} e^{\varkappa_s T} L_{ns} U_{ns},$$

wo

$$U_{ns} = 2k \frac{2n+1}{2n} a^n \frac{X_{ns}}{(\mu\varkappa_s + 1) L_{n-1,s}^a},$$

woraus mit Vernachlässigung von μ folgt

$$\left\{ \frac{d}{d\varrho} \left[\varrho^{2n+1} (U_n - 2kX_n) \right] \right\}^a = 0.$$

Die Function $f(\varrho) = \varrho^{n+1} U_n$ genügt also der Gleichung (43.) nicht, wohl aber die Function $\varrho^{n+1}(U_n - 2kX_n)$; damit also die Gleichung (*C.*) auch an der

---

*) „Sur le développement des fonctions etc.“ Journal de M. *Liouville* T. I.

Oberfläche gelte, haben wir

$$(45.) \quad f(\varrho) = \varrho^{n+1}(U_n - 2kX_n) = \Sigma e^{x_s T} U_{ns} L_{ns} - 2k\varrho^{n+1} \Sigma e^{x_s T} X_{ns}$$

zu setzen, d. h. wir müssen den Anfangswerth von $\varrho^n u_n$ durch die Bedingung bestimmen, dass er sich auf den am Ende der ersten Periode T der Strömung stattfindenden Werth $\varrho^n(U_n - 2kX_n)$ der „partiellen Stromdichtigkeit zweiter Ordnung" (vergl. §. 4) reducirt. Unsere Formeln werden dann allerdings die wirklich stattfindende Strömung nur unter der Voraussetzung vollständig ausdrücken, dass entweder die Hemmung des Inductors in einem solchen Moment geschieht, wo die von ihm ausgeübte Kraft schon von selbst gleich Null ist, also wo er mit der Geschwindigkeit Null am Ende seiner Bahn angekommen ist; wir sahen in §. 4, dass in diesem Moment die Stromdichtigkeit zweiter Ordnung noch einen sehr beträchtlichen Werth haben kann. Oder wenn die Hemmung in einem andern Augenblick geschieht, so müssen wir voraussetzen, dass die Stromdichtigkeit erster Ordnung nach dem Verschwinden der äusseren Kraft in einer Zeit erlischt, welche selbst gegen die kurze Dauer der ganzen Strömung verschwindend klein ist: eine Annahme, welche man bisher in der Theorie der inducirten Ströme in linearen Leitern immer gemacht und auch durch die Beobachtung bestätigt gefunden hat. Es bleibt dann allerdings hier in der Theorie eine Lücke, eine scheinbare Discontinuität der Bewegung; über die Vorgänge während der unendlich kurzen Zeit vom Verschwinden der äusseren Kraft bis zum Erlöschen der Ströme erster Ordnung vermag, wie es hiernach scheint, die Theorie auf den bisherigen und auch hier beibehaltenen Grundlagen keine Rechenschaft zu geben, auch nicht mit Zuhülfenahme des von Herrn *Weber* eingeführten Begriffes einer „Masse" der Elektricität; es scheint dies ein Punkt zu sein, über den man nur von einer wirklichen *Theorie* der Elektricität, wie sie neuerdings Herr *Hankel* angedeutet hat, Aufschluss erwarten darf. Uebrigens begegnen wir derselben scheinbaren Discontinuität auch in dem analogen Problem der Wärmelehre, wenn wir eine Kugel aus einer Umgebung, in welcher an der Oberfläche beliebige und mit der Zeit veränderliche Temperaturen herschen, plötzlich in einen Raum von der Temperatur Null versetzt denken; das entsprechende Problem der Elektricitätslehre hat aber im Gegensatz zu jenem ein nicht bloss mathematisches, sondern physikalisches Interesse, weil wir wirklich — nach den geltenden Anschauungen wenigstens — die äussere elektromotorische Kraft durch Hemmung oder Unterbrechung eines Inductors *plötzlich* vernichten können.

Indem wir, von dem erörterten Bedenken absehend, $f(\varrho)$ in jedem Falle durch die Gleichung (45.) gegeben annehmen und u_{ns} nach (*D.*) bestimmen, ergiebt sich als Endresultat Folgendes: Ist die während der ersten Periode wirkende Componente der äusseren elektromotorischen Kraft

$$X = \Sigma \varrho^n X_n = \Sigma \varrho^n \mathfrak{S} e^{\varkappa_\sigma T} X_{n\sigma},$$

wo $\mathfrak{S}$ die Summation nach der Grösse σ bezeichnet, und ist

$$p_{ns} = 2\int_0^1 (1-z^2)^n \cos\left(x_{ns}\frac{\varrho}{a}z\right) dz,$$

so ist nach Verschwinden der äusseren Kraft die Componente der Stromdichtigkeit

$$\text{(I.)} \quad \begin{cases} u = \sum_1^\infty \varrho^n u_n, \\ \dfrac{u_n}{2n+1} = -4k.8\pi h a^2 \mathfrak{S} e^{-\frac{x_{ns}^2 t}{8\pi h a^2 + \mu x_{ns}^2}} \dfrac{p_{ns}}{x_{ns}^2 p_{ns}^a} \dfrac{d}{dT} \mathfrak{S} \dfrac{e^{\varkappa_\sigma T} X_{n\sigma}}{x_{ns}^2 + 8\pi h a^2 \varkappa_\sigma}, \end{cases}$$

wo x_{ns} irgend eine Wurzel der Gleichung $p_{n-1,s}^a = 0$ ist; und ganz eben so werden v und w durch Y und Z ausgedrückt.

Z. B. für $n = 1$, wo $x_{1s} = s\pi$, wird

$$\tfrac{1}{3}u_1 = -4k.8ha^2 \sum_1^\infty (-1)^{s+1} s \, e^{-\frac{s^2\pi t}{8ha^2+\mu s^2\pi}} \frac{\sin\frac{s\pi\varrho}{a} - \frac{s\pi\varrho}{a}\cos\frac{s\pi\varrho}{a}}{\left(\frac{s\pi\varrho}{a}\right)^3} \frac{d}{dT} \mathfrak{S} \frac{e^{\varkappa_\sigma T} X_{1\sigma}}{\pi s^2 + 8ha^2\varkappa_\sigma}.$$

Die Summe nach σ in dem Ausdruck (I.) lässt sich durch ein bestimmtes Integral ersetzen. Es sei nämlich X periodisch mit der Periode δ; dann lässt sich bekanntlich X_n zwischen den Grenzen 0 und δ durch folgende Reihe darstellen:

$$X_n(T) = \frac{1}{\delta} \mathfrak{S}_{\sigma=-\infty}^{\sigma=+\infty} \int_0^\delta e^{i\sigma\frac{2\pi}{\delta}(T-t)} X_n(t)\, dt,$$

und man erhält, mit Einführung des Werthes von c aus (27.),

$$\mathfrak{S} \frac{e^{\varkappa_\sigma T} X_{n\sigma}}{x_{ns}^2 + 8\pi h a^2 \varkappa_\sigma} = \frac{4\pi}{c^2\delta} \frac{e^{-\frac{2x_{ns}^2}{c^2}\frac{2\pi T}{\delta}}}{e^{\frac{2x_{ns}^2}{c^2}\pi} - e^{-\frac{2x_{ns}^2}{c^2}\pi}} \left[e^{\frac{2x_{ns}^2}{c^2}\pi} \int_0^T e^{\frac{2x_{ns}^2}{c^2}\frac{2\pi t}{\delta}} X_n(t)\, dt \right.$$
$$\left. + e^{-\frac{2x_{ns}^2}{c^2}\pi} \int_T^\delta e^{\frac{2x_{ns}^2}{c^2}\frac{2\pi t}{\delta}} X_n(t)\, dt \right].$$

Machen wir über die äussere Kraft die Annahme des §. 4, setzen also nach (25.) und (26.) die auf dem Meridian senkrechte Kraft

$$E = \sin\vartheta \sum_1^x \varrho^n \frac{dP^n}{d\xi} E_n, \qquad E_n = \alpha_n \sin\frac{2\pi T}{\delta},$$

so wird nach (I.) die auf dem Meridian senkrechte Stromdichtigkeit an der Oberfläche, mit Einführung der Constante c aus (27.),

$$(46.)\quad \begin{cases} \lambda^n = \sin\vartheta \sum_1^x a^n \frac{dP^n}{d\xi} \lambda_n, \qquad \lambda_n = -2k(2n+1)\alpha_n \mathfrak{S} b_s e^{-\frac{x_{ns}^2 t}{8\pi h a^2 + \mu x_{ns}^2}}, \\ \text{wo} \\ \qquad b_s = \dfrac{c^2 \cos\frac{2\pi T}{\delta} + \frac{c^4}{2x_{ns}^2}\sin\frac{2\pi T}{\delta}}{x_{ns}^4 + \frac{c^4}{4}}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir den Anfangswerth von λ_n (für $t=0$) mit $L_n - 2kE_n$, so wird nach (31.)

$$(47.)\quad \begin{cases} L_n - 2kE_n = -2k(2n+1)\alpha_n\left[C_n\cos\frac{2\pi T}{\delta} - \left(D_n - \frac{1}{2n+1}\right)\sin\frac{2\pi T}{\delta}\right] \\ \qquad\qquad = -2k(2n+1)\alpha_n G. \end{cases}$$

§. 7. Dauer der Strömung nach Erlöschen der äusseren elektromotorischen Kraft.

Wir wollen zur Untersuchung dieser Frage die Gleichung (46.) und (47.) anwenden. Suchen wir die Zeit, nach welcher die anfängliche Stromdichtigkeit auf einen bestimmten Bruchtheil, $\frac{1}{m}$, herabgesunken ist, vernachlässigen dabei μ und setzen

$$e^{-\frac{t}{8\pi h a^2}} = z,$$

so bestimmt sich z durch die Gleichung

$$(48.)\quad f(z) = \mathfrak{S} b_s z^{x_{ns}^2} - \frac{G}{m} = 0$$

oder

$$(49.)\quad f(z) = \mathfrak{S} b_s \left(z^{x_{ns}^2} - \frac{1}{m}\right) = 0,$$

wobei die Wurzeln x_{ns} nach wachsender Grösse geordnet angenommen werden. Haben nun $\sin\frac{2\pi T}{\delta}$ und $\cos\frac{2\pi T}{\delta}$ dasselbe Zeichen, d. h. liegt T zwischen 0

und $\frac{1}{4}\delta$ (incl. der Grenzen, oder zwischen $\frac{1}{2}\delta$ und $\frac{3}{4}\delta$, wodurch bloss das Zeichen von λ_n und G sich ändert), so sind alle Coefficienten b_s grösser als 0; nehmen wir also $z^{x_{n1}^2} = \frac{1}{m}$, wo x_{n1} die kleinste Wurzel bedeutet, so wird nach (49.) $f(z) < 0$, für die Wurzel von $f(z) = 0$ muss also $z^{x_{n1}^2} > \frac{1}{m}$ sein, also

$$t < \frac{8\pi h}{\log e} \frac{a^2 \log m}{x_{n1}^2}$$

oder nach dem in §. 4 gegebenen Werth $h = 18.10^{-7}$,

$$(50.) \qquad t < 1042.10^{-7} \frac{a^2 \log m}{x_{n1}^2}.$$

Da $x_{n1} \geqq \pi$, so folgt aus dieser Gleichung, dass für alle Werthe von n

$$(51.) \qquad t < 106.10^{-7} a^2 \log m$$

ist; z. B. die Zeiten, nach denen λ_n resp. auf die Hälfte und auf $\frac{1}{1000}$ seines Anfangswerthes herabgesunken ist, sind $< 32.10^{-7}a^2$ und $317.10^{-7}a^2$ Secunden. Nehmen wir dagegen $b_1 z^{x_{n1}^2} = \frac{G}{m}$, so wird nach (48.) $f(z) > 0$, für die Wurzel von $f(z) = 0$ muss also $z^{x_{n1}^2} < \frac{G}{m b_1}$ sein, d. h.

$$(52.) \qquad t > 1042.10^{-7} \frac{a^2}{x_{n1}^2} \left(\log m - \log \frac{G}{b_1} \right).$$

Wir wollen das Vorstehende auf den Fall $n = 1$ anwenden, wo $x_{ns} = s\pi$ ist. Für diesen Fall ist nach Gleichung (33.)

$$(53.) \quad G = \frac{1}{c}\left(\frac{e^c - e^{-c} + 2\sin c}{e^c + e^{-c} - 2\cos c} - \frac{2}{c} \right) \cos \frac{2\pi T}{\delta} - \left(\frac{1}{c} \frac{e^c - e^{-c} - 2\sin c}{e^c + e^{-c} - 2\cos c} - \tfrac{1}{3} \right) \sin \frac{2\pi T}{\delta}.$$

Nehmen wir zunächst $T = \frac{\delta}{2}$. Für kleine Werthe von c oder $\frac{a^2}{\delta}$ kann nach (30.) $G = -\frac{c^2}{90}$ gesetzt werden; folglich wird dann nach (52.)

$$(a.) \quad \begin{cases} t > 106.10^{-7} a^2 \left(\log m - \log \frac{4\pi^4 + c^4}{360} \right) > 106.10^{-7} a^2 (\log m - \log \frac{3}{3}\frac{9}{6}\frac{1}{0}) \\ > 106.10^{-7} a^2 \log m - 3{,}8.10^{-7} a^2, \end{cases}$$

während nach (51.)

$$t < 106.10^{-7} a^2 \log m.$$

Für einigermassen grosse Werthe von c dagegen kann nach (53.) $G = -\frac{1}{c}\left(1 - \frac{2}{c}\right)$ gesetzt werden, und da

$$\frac{G}{b_1} = \frac{1}{c^3}\left(1 - \frac{2}{c}\right)\left(\pi^4 + \frac{c^4}{4}\right) = \frac{c}{4}\left[1 - \frac{2}{c}\left(1 - \frac{2\pi^4}{c^3}\right) - \frac{8\pi^4}{c^5}\right] < \frac{c}{4}$$

ist, wenn $1-\frac{2\pi^4}{c^3}>0$, also $c>6$, was nach der über die Grösse von c gemachten Annahme jedenfalls vorausgesetzt werden darf, so ergiebt sich aus (52.)

$$(b.) \qquad t>106.10^{-7}a^2\left(\log m-\log\frac{c}{4}\right),$$

z. B. für die in §. 4 gemachte Annahme $c=12$

$$t>106.10^{-7}a^2\log m-51.10^{-7}a^2.$$

Für kleine Werthe von m, z. B. $m=2$, ist der Grenzwerth $(b.)$ nicht brauchbar, da er negativ wird; man kann aber für jeden gegebenen Werth von m und c leicht engere Grenzen finden; z. B. für $m=2$, $c=12$, also $-\frac{G}{m}=\frac{5}{144}$, findet man

$$t>6.10^{-7}a^2.$$

Aus dem Vorstehenden, in Verbindung mit §. 4, ergeben sich folgende Resultate. Wird — unter den zu Ende des vorigen Paragraphen angegebenen Voraussetzungen — die Bewegung des Inductors in dem Augenblick gehemmt, wo er mit der Geschwindigkeit Null am Ende seiner Bahn angekommen ist, und ist $\frac{a^2}{\delta}$ (wo a der Kugelradius, δ die Oscillationsdauer des Inductors) so klein, dass man die die zweite übersteigenden Potenzen von $c^2=32\pi^2h\frac{a^2}{\delta}$ gegen 1 vernachlässigen kann, (z. B. $a=100^{mm}$, $\delta=57''$), so ist in diesem Moment an der Oberfläche die $n=1$ entsprechende partielle Stromdichtigkeit zweiter Ordnung gleich $\frac{c^2}{30}$ des Maximums der Stromdichtigkeit erster Ordnung, — welche letztere selbst in diesem Moment zugleich mit der äussern Kraft verschwindet — $(=\frac{1}{300}$ für die angegebenen Zahlen), und sie sinkt auf die Hälfte herab in einer Zeit, welche zwischen $27.10^{-7}a^2$ und $32.10^{-7}a^2$ Secunden liegt (z. B. zwischen 0,027″ und 0,032″ für $a=100^{mm}$), auf $\frac{1}{1000}$ in einer Zeit, welche zwischen $312.10^{-7}a^2$ und $317.10^{-7}a^2$ Sec. liegt (z. B. zwischen 0,312″ und 0,317″ für $a=100^{mm}$). Ist dagegen $\frac{a^2}{\delta}$ so gross, dass e^{-c} gegen 1 vernachlässigt werden kann, so ist im Moment der Hemmung die partielle Stromdichtigkeit zweiter Ordnung gleich $\frac{3}{c}\left(1-\frac{2}{c}\right)$ des Maximums der Stromdichtigkeit erster Ordnung, z. B. gleich $\frac{5}{24}$ für $\frac{a^2}{\delta}=25.10^4$; und für diesen Werth von $\frac{a^2}{\delta}$ sinkt sie auf die Hälfte in einer Zeit, welche zwischen $6.10^{-7}a^2$ und $32.10^{-7}a^2$ Sec. liegt, (z. B. zwischen 0,006″ und 0,032″ für $a=100^{mm}$, $\delta=\frac{1}{25}''$), auf

$\frac{1}{1000}$ in einer Zeit zwischen $266.10^{-7}a^2$ und $317.10^{-7}a^2$ Sec. (z. B. für $a = 1^m$, $\delta = 4''$ zwischen $26''$ und $32''$).

Die aus den angeführten Zahlen sich ergebende Dauer der elektrischen Nachwirkung ist unverhältnissmässig viel grösser. als sich vielleicht nach den für lineare Ströme gefundenen Resultaten hätte erwarten lassen; so findet Herr *Weber* *) für 3 kreisförmige Kupferdrähte von 1^m, 1000^m, 1000^m Kreisradius und resp. 1, 1, $\frac{1}{10}$ Quadrat-Millimeter Querschnitt die Zeit, in welcher die Stromintensität nach Erlöschen der äusseren elektromotorischen Kraft auf die Hälfte herabsinkt, resp. gleich $\frac{1}{130000}$, $\frac{1}{87000}$, $\frac{1}{818000}$ Secunden.

Für wachsende Werthe von c nimmt die Wurzel z der Gleichung (48.) oder (49.) zu; also für dieselbe Kugel wächst die Zeit, in welcher die anfängliche Intensität auf $\frac{1}{m}$ herabsinkt, mit abnehmendem c oder wachsender Oscillationsdauer δ.

Wir wollen die entsprechende Untersuchung auch für den Fall anstellen, wo die Hemmung des Inductors in dem Augenblick stattfindet, in welchem seine Geschwindigkeit und damit auch die partielle Stromdichtigkeit erster Ordnung ihr Maximum $2k\alpha_1 . a \sin\vartheta$ erreicht hat, also für $T = \frac{\delta}{4}$. Für hinlänglich grosse Werthe von c kann nach (53.) $G = \frac{1}{3} - \frac{1}{c}$ gesetzt werden, also

$$\frac{G}{b_1} = \frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{3}{c}\right)\left(1+\frac{4\pi^4}{c^4}\right) < \frac{\pi^2}{6}\left[1-\left(\frac{3}{c}-\frac{4\pi^4}{c^4}\right)\right] < \frac{\pi^2}{6},$$

wenn, wie wir voraussetzen dürfen, $c > 6$ ist. Daraus folgt nach (52.)

$$(c.) \qquad t > 106.10^{-7}a^2 \log m - 23.10^{-7}a^2,$$

während nach (51.) wieder

$$t < 106.10^{-7}a^2 \log m$$

ist. Z. B. für $m = 2$ ist $t > 9.10^{-7}a^2$, für $m = 1000$ ist $t > 293.10^{-7}a^2$. Für einen gegebenen Werth von c kann man leicht noch engere Grenzen finden; z. B. für $c = 12$ ergiebt sich $t > 106.10^{-7}a^2\ (\log m - 0{,}1003)$. Also: Wenn der Inductor in dem Moment gehemmt wird, wo er mit dem Maximum der Geschwindigkeit in der Mitte seiner Bahn angekommen ist, wo also die äussere elektromotorische Kraft und damit die Stromdichtigkeit erster Ordnung ihr Maximum erreicht hat, so wird die letztere nach der im vorigen Paragraphen

*) Elektrodynamische Massbestimmungen. Fünfte Abhandlung, pag. 630.

erörterten Annahme unmerklich in einer Zeit, welche gegen die Dauer der ganzen Strömung verschwindend klein ist. Die langsamer verschwindende Stromdichtigkeit zweiter Ordnung ist der erster Ordnung entgegengesetzt, aber für kleine Werthe von $\frac{a^2}{\delta}$ schon von Anfang an sehr klein, z. B. für $a = 100^{mm}$, $\delta = 57''$ ist sie $\frac{1}{6300}$ der Stromdichtigkeit erster Ordnung. Für so grosse Werthe von $\frac{a^2}{\delta}$ dagegen, dass man e^{-c} gegen 1 vernachlässigen darf, ist die übrigbleibende Stromdichtigkeit zweiter Ordnung Anfangs ein beträchtlicher Bruchtheil der Stromdichtigkeit erster Ordnung, nämlich $1-\frac{3}{c}$, (z. B. $\frac{3}{4}$ für $c=12$), und sie sinkt auf die Hälfte in einer Zeit, welche in jedem Falle zwischen $9.10^{-7}a^2$ und $32.10^{-7}a^2$ Sec., für $c=12$ zwischen $21.10^{-7}a^2$ und $32.10^{-7}a^2$ Sec. liegt; auf $\frac{1}{1000}$ in einer Zeit zwischen $293.10^{-7}a^2$ und $317.10^{-7}a^2$ Sec., z. B. für $c=12$, $a=1^m$ (also $\delta = 4''$) zwischen $29''$ und $32''$. Hierbei erinnere ich aber an das im vorigen Paragraphen hervorgehobene Bedenken, ob in diesem Falle die Strömung sich wirklich in der angenommenen Form darstellen lässt: ein Bedenken, dem der vorige Fall, wo die Hemmung in dem Moment stattfindet, in welchem die äussere Kraft gleich Null ist, nicht unterliegt. Uebrigens hatten wir in jenem Falle ganz ähnliche Zahlen gefunden.

Wir haben bei der vorstehenden Untersuchung im Nenner des Exponenten von $e^{-\frac{x_{ns}^2 t}{8\pi h a^2+\mu x_{ns}^2}}$ das von μ abhängige Glied vernachlässigt; sollte μ eine messbare Grösse haben, so würde dadurch $e^{-\frac{x_{ns}^2 t}{8\pi h a^2}}$ für einen bestimmten Werth von t vergrössert werden, also die Zeit, in welcher die Intensität auf einen bestimmten Bruchtheil ihres Anfangswerthes herabsinkt, noch grösser sein als die oben bestimmte. Es ist indessen wohl kaum zu erwarten, dass man auf diesem Wege durch Vergleichung der Beobachtung mit der Rechnung zu einem Urtheil über die Grösse dieser der „Masse“ der Elektricität proportionalen Constante sollte gelangen können.

Da mit wachsender Zeit in dem Werth von λ in (46.) das Glied λ_1, welches die kleinsten Exponenten enthält, mehr und mehr überwiegt, so kann auch z. B. nach der Zeit $266.10^{-7}a^2$ Sec., wo, wie wir oben fanden, dieses Glied sich noch nicht auf $\frac{1}{1000}$ seines Anfangswerthes reducirt hat, die ganze Stromintensität noch nicht unmerklich geworden sein. Es muss der Beobachtung überlassen bleiben, dieses einigermassen überraschende Resultat zu

bestätigen oder zu widerlegen, also z. B. festzustellen, ob es richtig ist, dass an der Oberfläche einer kupfernen Kugel von 1^m Radius *die inducirten Ströme noch 26″ nach Erlöschen der äusseren electromotorischen Kraft merklich sind,* wenn der mit einer Oscillationsdauer von 4″ sich bewegende Inductor in dem Moment gehemmt wird, wo er mit der Geschwindigkeit Null am Ende seiner Bahn angekommen ist. Ob und wie aber der Versuch in dieser Form — etwa mittelst einer ein Galvanometer enthaltenden Nebenschliessung — wirklich ausführbar sein würde, muss ich competenteren Beurtheilern überlassen.

Ruhrort, im Januar 1869.

Berichtigungen.

Seite 68, zweite Gleichung (18.) lese man $n = 1, 2, \ldots \infty$ statt $n = 0, 1, \ldots \infty$.
- 69, erste Gleichung (20.) lese man $n+m+1$ statt $n-m-1$.
- 69, zweite Gleichung (20.) lese man $n+m+1$ statt $n-m+1$.

Die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale als Functionen eines Parameters aufgefasst.

(Von Herrn *L. Fuchs* in Greifswald.)

Man wird in der Analysis häufig zur Darstellung einer Function durch ein bestimmtes Integral geführt, welches das Argument derselben als Parameter enthält. Besonders häufig werden Integrale linearer Differentialgleichungen unter diese Form gebracht. Diese Darstellung einer Function hat vor der durch unendliche Reihen im Allgemeinen die Gültigkeit in der ganzen Ebene voraus. Aber es ist bisher nur in wenigen Fällen gelungen, die Eigenschaften der Functionen aus der Integralform herzuleiten. Ich hoffe daher, es werde nicht überflüssig erscheinen, wenn ich im Folgenden die bestimmten Integrale, welche in der Theorie der hyperelliptischen Functionen unter dem Namen der Periodicitätsmoduln auftreten, als Functionen eines Parameters aufgefasst, untersuche. Es werden die Haupteigenschaften dieser Functionen hergeleitet und lineare Differentialgleichungen, denen sie genügen, entwickelt. — Es wird ersichtlich sein, dass die hier befolgte Methode sich auf die Periodicitätsmoduln der allgemeinen *Abel*schen Integrale anwenden lässt, und im Wesentlichen für diese zu ganz identischen Ergebnissen führt. Ich behalte mir vor, bei anderer Gelegenheit dieses weiter nachzuweisen. — Die hier auftretenden Differentialgleichungen gehören zur Klasse derjenigen, welche ich in den Abhandlungen (dieses Journal Bd. 66, No. 4, Gl. (12.) und Bd. 68) betrachtet; und in so fern steht die gegenwärtige Arbeit mit jenen im engsten Zusammenhange. In der That ist sie in ihren Grundzügen schon vor mehr als zwei Jahren entworfen, und nur ihre Endredaction durch verschiedene Hindernisse verschoben worden. — Die eben angeführten Abhandlungen werde ich der Kürze halber im Folgenden unter dem Zeichen A. B. 66 und A. B. 68 citiren.

1.

Es sei

$$(1.) \qquad s^2 = \varphi(x, u),$$

wo $\varphi(x, u)$ eine ganze rationale Function von x und u ist, und zwar in Be-

zug auf x vom Grade n, von der Beschaffenheit, dass nicht zwei der Wurzeln der Gleichung für x

$$(2.) \qquad \varphi(x, u) = 0,$$

die wir mit $a_1, a_2, \ldots a_n$ bezeichnen wollen, für jeden Werth von u einander gleich sind. Stellen wir die Function s nach *Riemann* durch eine zweiblättrige Fläche T dar, so sind $a_1, a_2, \ldots a_n$ die Verzweigungspunkte derselben. Ebenso stellen wir die durch die Gleichung (2.) definirte algebraische Function x von u durch eine n-blättrige Fläche S dar, und bezeichnen deren Verzweigungspunkte (auch solche Punkte eingerechnet, in welchen Wurzeln einander gleich sind, ohne dass Verzweigung stattfindet) mit $b_1, b_2, \ldots b_\nu$. Durch die n Blätter dieser Fläche wird also der Verlauf der Verzweigungspunkte der Fläche T bestimmt.

Es sei $u^{(0)}$ ein von den Verzweigungspunkten der Fläche S verschiedener Punkt und $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots a_n^{(0)}$ die ihm entsprechenden Wurzeln der Gleichung (2.), so werde die Form $T^{(0)}$ der zugehörigen Fläche T folgendermassen bestimmt. Es werde ein die beiden die x-Ebene bedeckenden Blätter durchdringender Schnitt, *Hauptschnitt,* längs einer durch alle Verzweigungspunkte $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots a_n^{(0)}$ hindurchgehenden, sich selbst nicht durchschneidenden Linie geführt, und alsdann das obere und untere Blatt eindeutig mit den Werthen von s belegt. Nennt man einen zwischen zwei auf einander folgenden Verzweigungspunkten enthaltenen Abschnitt des Hauptschnittes einen Theil desselben, so werden beide Blätter in diesen Theilen abwechselnd in einander übergehen oder getrennt verlaufen. Die ersteren mögen Verzweigungstheile des Hauptschnittes heissen.

Geht u von $u^{(0)}$ continuirlich zu einem anderen Werthe u auf einem Wege über, der durch keinen der Verzweigungspunkte der Fläche S führt, so gehen die Wurzeln der Gleichung (2.) in der x-Ebene continuirlich von den Werthen $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots a_n^{(0)}$ resp. zu den Werthen $a_1, a_2, \ldots a_n$ längs bestimmter Curven über, die resp. mit $A_1, A_2, \ldots A_n$ bezeichnet werden mögen. Zu gleicher Zeit gehen in jedem Punkte der x-Ebene, der nicht auf einer der letzteren Curven sich befindet, die zugehörigen Werthe von s in vollkommen bestimmte andere über.

Nunmehr denke man sich eine neue zweiblättrige Fläche über die x-Ebene ausgebreitet und verpflanze in jedem Punkte der x-Ebene die durch continuirliche Aenderung von u umgewandelten Werthe von s des oberen und unteren Blattes von $T^{(0)}$ resp. in die über demselben Punkte der x-Ebene

befindlichen Punkte des oberen und unteren Blattes der neuen Fläche. Diese letztere Fläche soll die dem Werthe u entsprechende Fläche T sein. In continuirlich auf einander folgenden Punkten derselben folgen alsdann in demselben Blatte die Werthe von s continuirlich auf einander, wenn nicht der Uebergang durch einen Verzweigungstheil der Fläche $T^{(0)}$ oder durch eine der Curven A führt. Bei dem Uebergange durch eine dieser Linien gelangt man zu entgegengesetzten Werthen von s. In der That sind die an verschiedenen Seiten der Verzweigungstheile in demselben Blatte von $T^{(0)}$ befindlichen Werthe von s entgegengesetzt gleich, folglich auch ihre durch continuirliche Aenderung von u umgewandelten Werthe in dem entsprechenden Blatte der Fläche T. Ferner führt jeder noch so kleine Umlauf um einen der Punkte $a_1, a_2, \ldots a_n$ den Werth s continuirlich zum entgegengesetzten über, was nur möglich ist, wenn resp. an den Curven $A_1, A_2, \ldots A_n$ ein plötzliches Uebergehen zum entgegengesetzten Werth stattfindet. — Die beiden Blätter der Fläche T, deren Verzweigungspunkte $a_1, a_2, \ldots a_n$, werden demnach längs einer Linie durchschnitten, welche aus dem Hauptschnitte der Fläche $T^{(0)}$ durch Einschalten der beiden Seiten der Curven A oder auch derselben Seite in zwei entgegengesetzten Richtungen genommen entsteht, und es werde dieser Schnitt der Hauptschnitt der Fläche T genannt.

Zwei Verzweigungspunkte der Flächen T und $T^{(0)}$, die durch continuirliche Aenderung von u aus einander hervorgegangen sind, mögen entsprechende Verzweigungspunkte, und solche Theile ihrer bezüglichen Hauptschnitte, die zwischen entsprechenden Verzweigungspunkten enthalten sind, entsprechende Theile genannt werden. Es folgt alsdann, dass die den Verzweigungstheilen der Fläche $T^{(0)}$ entsprechenden Theile des Hauptschnittes der Fläche T im Allgemeinen in ihrem ganzen Verlaufe Verzweigungsstellen sind.

2.

Wenn zwei Curven A_λ und A_μ sich in einem Punkte m der x-Ebene schneiden, so muss einer der Verzweigungspunkte a_λ und a_μ, welche resp. diese Curven beschreiben, früher in m angelangt sein als der andere, da ihre Wege nicht durch einen der Verzweigungspunkte der Fläche S führen. Wenn a_λ früher anlangt als a_μ, so wollen wir sagen, *die Curve A_λ geht der Curve A_μ in Bezug auf m voran.* Ebenso befindet sich jeder dem Hauptschnitte der Fläche $T^{(0)}$ angehörige Punkt an seiner Stelle, ehe eine der Curven A sich dorthin erstreckt. Wir sagen daher analog, wenn ein Theil des Haupt-

schnitts der Fläche $T^{(0)}$ von einer der Curven A geschnitten wird, der erstere gehe der letzteren in Bezug auf den Durchschnittspunkt voran. — In beiden Fällen heisst der Theil der Curve A, welcher nach dem Durchschneiden mit der vorangehenden Curve entstanden, der *nachfolgende* Theil.

Die beiden Verzweigungspunkte, welche einen Theil des Hauptschnittes einer Fläche T abgrenzen, wollen wir in willkürlicher Weise als Anfangs- und Endpunkt desselben von einander unterscheiden, jedoch so, dass in allen Flächen T sowohl die Anfangspunkte als auch die Endpunkte entsprechender Theile entsprechende Verzweigungspunkte sind.

Bewegt man sich auf der x-Ebene längs eines Theiles des Hauptschnittes vom Anfangspunkte desselben zum Endpunkte hin, so sollen die linke und die rechte Seite dieser Bewegung auch die linke und die rechte Seite dieses Theiles genannt werden. —

Es sei nunmehr

$$y = \frac{f(x)}{s},$$

wo $f(x)$ eine ganze rationale Function von x und u bedeutet, so ist das Integral

$$z = \int y\,dx$$

in jeder Fläche T bestimmt, wenn der Integrationsweg vorgezeichnet wird. — Längs eines jeden im Endlichen verlaufenden Theils des Hauptschnitts einer Fläche T wird das Integral z vom Anfangspunkte bis zum Endpunkte dieses Theils auf der linken Seite desselben erstreckt, und zwar wird das Blatt, von welchem die Integration ihren Ausgang nimmt, so gewählt, dass der an einem dem Hauptschnitte der Fläche $T^{(0)}$ angehörigen Abschnitte des Theiles befindliche Integrationsweg im oberen Blatte verläuft. Ueberschreitet der Integrationsweg eine Curve A längs einer Linie, welche dieser Curve vorangeht, so ist ein Integrationsweg einzuschalten, welcher den nachfolgenden Theil der letzteren umgiebt. Die so gebildeten $n-1$ Integrale heissen die Periodicitätsmoduln des Integrals z in der Fläche T*).

Für die Fläche $T^{(0)}$ sind demnach die Periodicitätsmoduln die an den Theilen des Hauptschnitts dieser Fläche auf der linken Seite derselben vom Anfangspunkt bis zum Endpunkt im oberen Blatte sich erstreckenden Integrale.

Ein Periodicitätsmodul der Fläche $T^{(0)}$ repräsentirt in Verbindung mit

---

*) Diesen Namen führen zwar gewöhnlich die doppelten Werthe unserer Integrale, allein dieser Unterschied ist für das Folgende gleichgültig.

der Schaar der in den verschiedenen Flächen T auf den entsprechenden Theil der Hauptschnitte derselben bezogenen Periodicitätsmoduln eine bestimmte Function von u.

3.

Die Periodicitätsmoduln sind in der Umgebung eines von den Verzweigungswerthen der Fläche S verschiedenen Werthes von u continuirlich und eindeutig. In der That sei u ein von den Verzweigungspunkten der Fläche S verschiedener Punkt und $u' = u + \delta$ ein beliebig wenig davon verschiedener, T und T' resp. die zugehörigen Formen der Fläche T. Ferner mögen ein Paar dem Werthe u entsprechende Verzweigungspunkte a_λ und a_μ während des Ueberganges von u nach u' resp. auf den Curven A_λ und A_μ in a'_λ und a_μ übergehen. Ist l der Theil des Hauptschnittes von T zwischen a_λ und a_μ, so ist die Curve, welche der Reihe nach aus A_λ, l, A_μ zusammengesetzt ist, der entsprechende Theil des Hauptschnitts der Fläche T'. Der Theil des Periodicitätsmoduls längs l in T' ist mit abnehmenden δ beliebig wenig von dem Periodicitätsmodul längs l in T verschieden, während die Integrale längs A_λ und A_μ, weil diese Curven mit δ beliebig klein werden, und weil u kein Verzweigungspunkt der Fläche S ist, selber mit δ beliebig klein werden. Hieraus folgt aber die Stetigkeit des Periodicitätsmoduls zwischen a_λ und a_μ.

Macht u um einen von den Verzweigungspunkten der Fläche S verschiedenen Punkt einen in der Umgebung desselben befindlichen Umlauf, so kann die Fläche dieses Umlaufes so klein gewählt werden, dass die Punkte $a_1, a_2, \ldots a_n$ beliebig kleine, ganz aus einander liegende vollständige Umläufe vollziehen. Ist l ein Theil des Hauptschnittes der Fläche T zwischen a_λ und a_μ, so besteht in der nach dem Umlauf resultirenden Fläche T' der entsprechende Theil des Hauptschnitts der Reihe nach aus der kleinen von a_λ beschriebenen Peripherie, aus l, und aus der kleinen von a_μ beschriebenen Peripherie. Da aber in der Fläche T' ausserhalb der von den Punkten $a_1, a_2, \ldots a_n$ beschriebenen Umläufe s im oberen und unteren Blatte denselben Werth hat wie resp. in den über demselben Punkte der x-Ebene befindlichen Punkten des oberen und unteren Blattes von T, so folgt, dass der Theil des Periodicitätsmoduls längs l in beiden Flächen denselben Werth hat. Die Theile des Periodicitätsmoduls in T' längs den beiden Peripherieen sind aber, weil der Umlauf von u um einen von den Verzweigungspunkten der

schnitts der Fläche $T^{(0)}$ von einer der Curven A geschnitten wird, der erstere gehe der letzteren in Bezug auf den Durchschnittspunkt voran. — In beiden Fällen heisst der Theil der Curve A, welcher nach dem Durchschneiden mit der vorangehenden Curve entstanden, der *nachfolgende* Theil.

Die beiden Verzweigungspunkte, welche einen Theil des Hauptschnittes einer Fläche T abgrenzen, wollen wir in willkürlicher Weise als Anfangs- und Endpunkt desselben von einander unterscheiden, jedoch so, dass in allen Flächen T sowohl die Anfangspunkte als auch die Endpunkte entsprechender Theile entsprechende Verzweigungspunkte sind.

Bewegt man sich auf der x-Ebene längs eines Theiles des Hauptschnittes vom Anfangspunkte desselben zum Endpunkte hin, so sollen die linke und die rechte Seite dieser Bewegung auch die linke und die rechte Seite dieses Theiles genannt werden. —

Es sei nunmehr

$$y = \frac{f(x)}{s},$$

wo $f(x)$ eine ganze rationale Function von x und u bedeutet, so ist das Integral

$$z = \int y\,dx$$

in jeder Fläche T bestimmt, wenn der Integrationsweg vorgezeichnet wird. — Längs eines jeden im Endlichen verlaufenden Theils des Hauptschnitts einer Fläche T wird das Integral z vom Anfangspunkte bis zum Endpunkte dieses Theils auf der linken Seite desselben erstreckt, und zwar wird das Blatt, von welchem die Integration ihren Ausgang nimmt, so gewählt, dass der an einem dem Hauptschnitte der Fläche $T^{(0)}$ angehörigen Abschnitte des Theiles befindliche Integrationsweg im oberen Blatte verläuft. Ueberschreitet der Integrationsweg eine Curve A längs einer Linie, welche dieser Curve vorangeht, so ist ein Integrationsweg einzuschalten, welcher den nachfolgenden Theil der letzteren umgiebt. Die so gebildeten $n-1$ Integrale heissen die Periodicitätsmoduln des Integrals z in der Fläche T*).

Für die Fläche $T^{(0)}$ sind demnach die Periodicitätsmoduln die an den Theilen des Hauptschnitts dieser Fläche auf der linken Seite derselben vom Anfangspunkt bis zum Endpunkt im oberen Blatte sich erstreckenden Integrale.

Ein Periodicitätsmodul der Fläche $T^{(0)}$ repräsentirt in Verbindung mit

---

*) Diesen Namen führen zwar gewöhnlich die doppelten Werthe unserer Integrale, allein dieser Unterschied ist für das Folgende gleichgültig.

der Schaar der in den verschiedenen Flächen T auf den entsprechenden Theil der Hauptschnitte derselben bezogenen Periodicitätsmoduln eine bestimmte Function von u.

3.

Die Periodicitätsmoduln sind in der Umgebung eines von den Verzweigungswerthen der Fläche S verschiedenen Werthes von u continuirlich und eindeutig. In der That sei u ein von den Verzweigungspunkten der Fläche S verschiedener Punkt und $u' = u + \delta$ ein beliebig wenig davon verschiedener, T und T' resp. die zugehörigen Formen der Fläche T. Ferner mögen ein Paar dem Werthe u entsprechende Verzweigungspunkte a_λ und a_μ während des Ueberganges von u nach u' resp. auf den Curven A_λ und A_μ in a'_λ und a_μ übergehen. Ist l der Theil des Hauptschnittes von T zwischen a_λ und a_μ, so ist die Curve, welche der Reihe nach aus A_λ, l, A_μ zusammengesetzt ist, der entsprechende Theil des Hauptschnitts der Fläche T'. Der Theil des Periodicitätsmoduls längs l in T' ist mit abnehmenden δ beliebig wenig von dem Periodicitätsmodul längs l in T verschieden, während die Integrale längs A_λ und A_μ, weil diese Curven mit δ beliebig klein werden, und weil u kein Verzweigungspunkt der Fläche S ist, selber mit δ beliebig klein werden. Hieraus folgt aber die Stetigkeit des Periodicitätsmoduls zwischen a_λ und a_μ.

Macht u um einen von den Verzweigungspunkten der Fläche S verschiedenen Punkt einen in der Umgebung desselben befindlichen Umlauf, so kann die Fläche dieses Umlaufes so klein gewählt werden, dass die Punkte $a_1, a_2, \ldots a_n$ beliebig kleine, ganz aus einander liegende vollständige Umläufe vollziehen. Ist l ein Theil des Hauptschnittes der Fläche T zwischen a_λ und a_μ, so besteht in der nach dem Umlauf resultirenden Fläche T' der entsprechende Theil des Hauptschnitts der Reihe nach aus der kleinen von a_λ beschriebenen Peripherie, aus l, und aus der kleinen von a_μ beschriebenen Peripherie. Da aber in der Fläche T' ausserhalb der von den Punkten $a_1, a_2, \ldots a_n$ beschriebenen Umläufe s im oberen und unteren Blatte denselben Werth hat wie resp. in den über demselben Punkte der x-Ebene befindlichen Punkten des oberen und unteren Blattes von T, so folgt, dass der Theil des Periodicitätsmoduls längs l in beiden Flächen denselben Werth hat. Die Theile des Periodicitätsmoduls in T' längs den beiden Peripherieen sind aber, weil der Umlauf von u um einen von den Verzweigungspunkten der

Fläche S verschiedenen Punkt geschieht, mit diesen Peripherieen verschwindend klein. Demnach sind die Periodicitätsmoduln an den entsprechenden Theilen der Hauptschnitte in T und T' einander gleich. Hieraus ergiebt sich, dass der Periodicitätsmodul in der Umgebung eines von den Verzweigungspunkten der Fläche S verschiedenen Punktes u eindeutig ist.

4.

Es sei η ein Periodicitätsmodul zwischen a_λ und a_μ für irgend einen von den Verzweigungswerthen von S verschiedenen Werth, das heisst das Integral $z = \int y\,dx$ erstreckt über eine in No. 2 angegebene von a_λ nach a_μ führende Linie in der zu diesem Werthe von u gehörigen Fläche T. Man erstrecke das Integral z in T über eine geschlossene Curve q, welche den Integrationsweg von η derart umgiebt, dass sie durch keinen der Verzweigungspunkte hindurchführt und dass innerhalb derselben keine Verzweigungspunkte sich befinden, durch welche η nicht hindurchführt, und bezeichne dieses Integral mit $\int' y\,dx$, so ist

$$(1.) \qquad \eta = \tfrac{1}{2}\int' y\,dx.$$

Da u von den Verzweigungspunkten der Fläche S verschieden ist, so können die Dimensionen dieser Curve q bei hinlänglich kleinem δ so gewählt werden, dass sie mit einer geschlossenen Curve, welche den Integrationsweg des Periodicitätsmoduls η' an dem entsprechenden Theile des Hauptschnittes einer zum Werthe $u+\delta$ gehörigen Fläche T' in ähnlicher Weise wie q den Weg von η umgiebt, in der x-Ebene sich deckt. Bezeichnet man alsdann das Integral, welches über die Curve q in T' erstreckt ist, mit $\int''' y'dx$, wo y' und y demselben x zugehörige Werthe in den entsprechenden Blättern von T und T' sind, und setzt man $y' = y + \Delta y$, so ist

$$(2.) \qquad \eta' = \tfrac{1}{2}\int'' y'\,dx,$$

$$(3.) \qquad \int'' y'\,dx = \int' y\,dx + \int' \Delta y\,dx.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich, da y in keinem Punkte von q unendlich wird,

$$(4.) \qquad \lim \frac{\eta' - \eta}{\delta} \quad (\text{für } \delta = 0) \quad = \frac{d\eta}{du} = \tfrac{1}{2}\int' \frac{\partial y}{\partial u}\,dx.$$

Da ebenso $\frac{\partial y}{\partial u}$, so wie alle folgenden Ableitungen von y nach u in keinem

Punkte von q unendlich werden, so ergiebt sich auf dieselbe Weise für jede Ordnung λ

$$(5.) \qquad \frac{d^\lambda \eta}{du^\lambda} = \tfrac{1}{2}\int' \frac{\partial^\lambda y}{\partial u^\lambda} dx.$$

5.

Es sei b einer der Verzweigungspunkte der Fläche S, und möge u in dessen Umgebung von einer Anfangslage $u^{(0)}$ aus einen Umlauf vollziehen, so werden die Grössen $a_1, a_2, \ldots a_n$ im Allgemeinen in Gruppen zerfallen, derart, dass die Glieder einer Gruppe nach dem Umlaufe von u cyclisch in einander übergehen. Es können auch alle Grössen a eine einzige Gruppe bilden, und einzelne Gruppen nur ein einziges Glied enthalten. Der Anfangslage $u^{(0)}$ entspreche die Fläche $T^{(0)}$, und diese wandle sich nach dem Umlauf von u in T' um. Die Curven, welche in der x-Ebene von einer Gruppe G der Verzweigungspunkte $a_1, a_2, \ldots a_n$ beschrieben werden, bilden die Begrenzung eines geschlossenen Raumes, welcher denjenigen Punkt α umschliesst, mit welchem die Glieder der Gruppe G für $u = b$ zusammenfallen. Diese geschlossenen Räume können theilweise zusammenfallen. In den über demselben Punkte der x-Ebene befindlichen Punkten der Flächen $T^{(0)}$ und T' sind die Werthe von s im oberen und unteren Blatte der einen resp. denen im oberen und unteren Blatte der anderen entweder gleich oder entgegengesetzt, da $\varphi(x, u)$ eine symmetrische Function der Grössen $a_1, a_2, \ldots a_n$ ist. Ersteres findet allemal statt für einen Punkt x ausserhalb der von $a_1, a_2, \ldots a_n$ gebildeten Räume, dagegen wird letzteres innerhalb dieser Räume erfolgen, wenn in dem Werthe $e^{2k\pi i}\varphi(x, u)$, in welchen $\varphi(x, u)$ nach einem Umlaufe von u um b übergeht, k eine ungerade Zahl ist. — Ein Periodicitätsmodul des Integrals z in der Fläche T' kann demnach als ein Integral angesehen werden, welches in der Fläche T zwischen zwei Verzweigungspunkten sich erstreckt, d. h. als eine Summe von positiven oder negativen ganzen Vielfachen der Periodicitätsmoduln in der Fläche T.

Die Periodicitätsmoduln als Functionen von u haben daher die Eigenschaft, nach einem Umlauf von u um einen Verzweigungspunkt der Fläche S in lineare homogene Functionen mit ganzzahligen Coefficienten ihrer ursprünglichen Werthe überzugehen.

Im Allgemeinen bleiben die Periodicitätsmoduln auch nicht unverändert, wenn u einen Umlauf um ∞ macht, selbst wenn letzterer Punkt nicht zu den Verzweigungspunkten der Fläche S gehört. Man zeigt ebenso wie für diese Verzweigungspunkte, dass jeder Periodicitätsmodul in eine lineare homogene Function mit ganzzahligen Coefficienten der ursprünglichen Periodicitätsmoduln übergeht.

6.

Es muss nunmehr die Art der Unstetigkeit der Periodicitätsmoduln in den Verzweigungspunkten der Fläche S und für $u=\infty$ näher untersucht werden. — Es bedeute Π das Product der Differenzen der Wurzeln der Gleichung $\varphi(x,u)=0$*), und man setze an die Stelle jeder Differenz $a_\lambda - a_\mu$ den gleichwerthigen Ausdruck $a_\lambda - x - (a_\mu - x)$, so lässt sich Π auf die Gestalt bringen:

$$(1.) \qquad \Pi = \Sigma k_\lambda (a_1-x)^{\lambda_1}(a_2-x)^{\lambda_2}\ldots(a_n-x)^{\lambda_n},$$

eine Summe, in welcher der Coefficient k_λ jedes Gliedes eine positive oder negative ganze Zahl und die Exponenten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ von einander *verschiedene* positive Zahlen aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots n-1$ sind, deren Summe gleich $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Der Quotient irgend eines Gliedes der Summe (1.) durch $\sqrt{\varphi(x,u)}$ hat die Gestalt:

$$(2.) \qquad (-1)^{\frac{1}{2}n} k_\lambda (a_1-x)^{\lambda_1-\frac{1}{2}}.(a_2-x)^{\lambda_2-\frac{1}{2}}\ldots(a_n-x)^{\lambda_n-\frac{1}{2}}.$$

Ist keiner der Exponenten λ gleich Null, so wird der Ausdruck (2.) für keinen der Werthe $a_1, a_2, \ldots a_n$ unendlich. Ist einer davon, λ_1, gleich Null, so sind die übrigen von Null verschieden, der Ausdruck (2.) ist endlich für $a_2, a_3, \ldots a_{n-1}$ und unendlich wie $(x-a_1)^{-\frac{1}{2}}$ für a_1. — Wenn mehrere der Grössen a gleich a_1 werden, so würde der Ausdruck (2.) auch für a_1 nicht unendlich werden.

Ist η ein Periodicitätsmodul, so hat man

$$(3.) \quad \Pi.\eta = (-1)^{\frac{1}{2}n}\Sigma k_\lambda \int (a_1-x)^{\lambda_1-\frac{1}{2}}(a_2-x)^{\lambda_2-\frac{1}{2}}\ldots(a_n-x)^{\lambda_n-\frac{1}{2}}.f(x)\,dx,$$

die Integrale bezogen auf ein und dieselbe in No. 2 festgesetzte Linie zwischen zwei Verzweigungspunkten. Demnach ist $\Pi.\eta$ auch in den Verzweigungspunkten der Fläche S nicht unendlich. Ist b einer dieser Verzweigungspunkte, so ist Π in der Umgebung desselben von der Gestalt $(u-b)^\beta.\Pi'$, wo β eine positive Zahl und Π' eine in der Umgebung von b eindeutige, endliche und

---

*) Ist $\psi(u)$ der Coefficient von x^n in $\varphi(x,u)$, so führt die Substitution $x=\frac{x'}{\psi(u)}$ das Integral $\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{\varphi(x,u)}}$ über in ein anderes der Form $\psi(u)^\mu \int \frac{f_1(x')\,dx'}{\sqrt{\varphi_1(x',u)}}$, wo μ so gewählt werden kann, dass $f_1(x')$ und $\varphi_1(x',u)$ wieder ganze rationale Functionen von x' und u sind, und in letzterer der Coefficient von x'^n gleich Eins. Da die Eigenschaften des Factors $\psi(u)^\mu$ bekannt sind, so kann der Einfachheit wegen überall vorausgesetzt werden, dass der Coefficient von x^n in $\varphi(x,u)$ gleich Eins ist.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

continuirliche Function bedeutet, die für $u = b$ von Null verschieden ist. Daher werden die Periodicitätsmoduln in den Verzweigungspunkten b der Fläche S so unstetig, dass sie mit einer bestimmten Potenz $(u-b)^\beta$ multiplicirt für $u = b$ nicht mehr unendlich sind.

Ist u^m die höchste Potenz von u in $f(x)$, so wird für jeden Periodicitätsmodul η, als ein im Endlichen verlaufendes Integral, jedenfalls $u^{-m}.\eta$ für $u = \infty$ nicht mehr unendlich.

7.

Theils zur Erläuterung des Vorhergehenden, theils für den späteren Gebrauch betrachten wir den besonderen Fall, dass

$$\varphi(x, u) = (x-k_1)(x-k_2)\ldots(x-k_{n-1})(x-u),$$

wo $k_1, k_2, \ldots k_{n-1}$ von u unabhängige und von einander verschiedene Grössen sind. — Die Fläche S besteht aus n über einander liegenden Blättern, in deren $n-1$ resp. die Werthe $k_1, k_2, \ldots k_{n-1}$, in einer aber der Werth u sich befindet. In den Punkten $u = k_1$, $u = k_2$, $\ldots$ $u = k_{n-1}$ sind also zwei der Wurzeln der Gleichung $\varphi(x, u) = 0$ einander gleich, eine Verzweigung der Fläche S findet jedoch in ihnen nicht statt.

In jeder Fläche T werde der Hauptschnitt der Reihe nach durch u, $k_1, k_2, \ldots k_{n-1}$ oder $u, k_1, k_2, \ldots k_{n-1}, \infty$ geführt, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Als Anfangspunkt des ersten Theiles werde ferner u, und als Anfangspunkt irgend eines zwischen k_λ und $k_{\lambda+1}$ enthaltenen Theils k_λ betrachtet. Die Hauptschnitte verschiedener Flächen T unterscheiden sich daher nur in ihrem ersten Theile.

Es sei $u^{(0)}$ ein Punkt in der Umgebung eines Verzweigungspunktes k_λ, und es mache u von $u^{(0)}$ ausgehend um diesen Verzweigungspunkt einen in dessen Umgebung befindlichen vollständigen Umlauf U, wodurch die Fläche $T^{(0)}$, welche der Anfangslage von u in $u^{(0)}$ entspricht, in die Fläche T' verwandelt wird, so besteht der erste Theil des Hauptschnitts der letzteren Fläche aus der geschlossenen Curve U, in der ihrer Erzeugung entgegengesetzten Richtung genommen, und aus dem ersten Theile des Hauptschnittes der Fläche $T^{(0)}$. — Wir können der Einfachheit wegen annehmen, dass der Hauptschnitt der Fläche $T^{(0)}$ sich nicht selbst durchschneide.

Für einen Werth x innerhalb U geht $x-u$ in $e^{2\pi i}(x-u)$ über, wenn u seinen Umlauf macht, während die übrigen Factoren von $\varphi(x, u)$ unverändert bleiben, demnach geht s in $-s$ über. Für einen Werth x ausserhalb U bleibt s unverändert. Es stimmen daher die Werthe von s der oberen und

unteren Blätter resp. von $T^{(0)}$ und T' über demselben Punkte der x-Ebene mit einander überein oder sind entgegengesetzt, je nachdem der Punkt x ausserhalb oder innerhalb U sich befindet.

Ist nunmehr

$$y = \frac{f(x)}{s},$$

wo $f(x)$ eine ganze rationale Function von x und u bedeutet, so befinden sich die Curven, über welche die Periodicitätsmoduln des Integrals $z = \int y\,dx$ in der Fläche $T^{(0)}$ erstreckt sind, alle im oberen Blatte. Bezeichnen wir die Periodicitätsmoduln in $T^{(0)}$ resp. zwischen $u^{(0)}$ und k_1, k_1 und k_2, ..., k_{n-2} und k_{n-1} mit $(u^{(0)}, k_1)$, (k_1, k_2), ... (k_{n-2}, k_{n-1}), ebenso ein im oberen Blatte von einem Verzweigungspunkte a nach einem Verzweigungspunkte b, die noch nicht durch den Hauptschnitt mit einander verbunden sind, erstrecktes Integral mit (a, b), und die Werthe, in welche alle diese Grössen nach einem Umlaufe von u um k_λ übergehen, d. h. die entsprechenden Periodicitätsmoduln und Integrale in T', indem wir diese Zeichen mit Accenten versehen, so ist für $\lambda = 2, 3, \ldots n-2$

$$(1.) \qquad (u^0, k_1)' = -2(u^0, k_\lambda) + (u^0, k_1),$$

$$(1^a.) \qquad (k_\mu, k_{\mu+1})' = (k_\mu, k_{\mu+1}),$$

für $\mu = 1, 2, \ldots \lambda-2, \lambda+1, \ldots n-2$

$$(1^b.) \qquad (k_{\lambda-1}, k_\lambda)' = 3(u^0, k_\lambda) - (u^0, k_{\lambda-1}),$$

$$(1^c.) \qquad (k_\lambda, k_{\lambda+1})' = (u^0, k_\lambda) + (u^0, k_{\lambda+1}).$$

Nun ist

$$(2.) \qquad (u^0, k_\mu) = (u^0, k_1) + (k_1, k_2) + (k_2, k_3) + \cdots + (k_{\mu-1}, k_\mu)$$

für $\mu = 1, 2, \ldots n-1$, daher erhält man aus (1.) bis (1^c.)

$$(3.) \qquad (u^0, k_1)' = -(u^0, k_1) - 2\{(k_1, k_2) + (k_2, k_3) + \cdots + (k_{\lambda-1}, k_\lambda)\},$$

$$(3^a.) \qquad (k_\mu, k_{\mu+1})' = (k_\mu, k_{\mu+1}),$$

für $\mu = 1, 2, \ldots \lambda-2, \lambda+1, \ldots n-2$

$$(3^b.) \qquad (k_{\lambda-1}, k_\lambda)' = 2\{(u^0, k_1) + (k_1, k_2) + (k_2, k_3) + \cdots + (k_{\lambda-2}, k_{\lambda-1})\} + 3(k_{\lambda-1}, k_\lambda),$$

$$(3^c.) \qquad (k_\lambda, k_{\lambda+1})' = 2\{(u^0, k_1) + (k_1, k_2) + (k_2, k_3) + \cdots + (k_{\lambda-1}, k_\lambda)\} + (k_\lambda, k_{\lambda+1}).$$

Für $\lambda = 1$ ist

$$(4.) \qquad (u^0, k_1)' = (u^0, k_1),$$

$$(4^a.) \qquad (k_\mu, k_{\mu+1})' = (k_\mu, k_{\mu+1}),$$

für $\mu = 2, 3, \ldots n-2$

$$(4^b.) \qquad (k_1, k_2)' = 2(u^0, k_1) + (k_1, k_2).$$

Für $\lambda = n-1$ gelten die Formeln (3.) bis (3^b.), während die Formel (3^c.) nicht in Betracht kommt.

Macht u einen Umlauf V um ∞, so bildet die Aussenseite desselben einen Umlauf um die Punkte $k_1, k_2, \ldots k_{n-1}$. Die über demselben Punkte der x-Ebene befindlichen Werthe von s in den oberen und unteren Blättern resp. der ursprünglichen Fläche $T^{(0)}$ und der nach dem Umlaufe von u entstandenen Fläche T' sind übereinstimmend oder entgegengesetzt, je nachdem x innerhalb oder ausserhalb V sich befindet. Wir können wieder der Einfachheit wegen annehmen, der Hauptschnitt der Fläche $T^{(0)}$ durchschneide sich selbst nicht. Wendet man hier dieselben Bezeichnungen an, wie oben, so ist,

wenn n gerade

$$(5.) \qquad (u^0, k_1)' = (u^0, k_1) + 2\{(k_2, k_3) + (k_4, k_5) + \cdots + (k_{n-2}, k_{n-1})\},$$

wenn n ungerade

$$(5^a.) \qquad (u^0, k_1)' = 2\{(k_1, k_2) + (k_3, k_4) + \cdots + (k_{n-2}, k_{n-1})\} - (u^0, k_1)$$

und in beiden Fällen

$$(6.) \qquad (k_\mu, k_{\mu+1})' = -(k_\mu, k_{\mu+1})$$

für $\mu = 1, 2, \ldots n-2$.

8.

Es seien in irgend einer Fläche T der Reihe nach $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ die Anfangspunkte und $a_2, a_3, \ldots a_n$ die Endpunkte resp. des 1ten, 2ten, $\ldots$ $(n-1)^{\text{ten}}$ Theils des Hauptschnitts, $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{n-1}$ resp. die auf diese Theile bezogenen Periodicitätsmoduln. Wir umgeben den Integrationsweg eines jeden derselben in der in No. 4 angegebenen Weise mit geschlossenen Curven $q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$. Je nachdem n gerade oder ungerade, wird durch $q_1, q_2, \ldots q_{n-2}$ oder durch $q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$ die Fläche T in eine einfach zusammenhangende T' zerlegt. Es ist ferner, wenn man das nach No. 4 über q_λ erstreckte Integral mit $\int_{(\lambda)}$ bezeichnet,

$$(1.) \qquad \begin{cases} \eta_\lambda = \frac{1}{2}\int_{(\lambda)} y\,dx, \\ \frac{d^\mu \eta}{du^\mu} = \frac{1}{2}\int_{(\lambda)} \frac{\partial^\mu y}{\partial u^\mu}\,dx. \end{cases}$$

Es sei nunmehr von den Periodicitätsmoduln $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{n-1}$ eine Anzahl p

nämlich $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$ linearunabhängig, d. h. so beschaffen, dass eine Gleichung

$$(2.) \qquad c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_p\eta_p = 0$$

mit von u unabhängigen Coefficienten $c_1, c_2, \ldots c_p$ für einen endlichen Theil der u-Ebene nicht identisch stattfinden kann, während die übrigen η sich als lineare homogene Functionen von $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$ mit von u unabhängigen Coefficienten ausdrücken lassen. Man bilde eine lineare homogene Differentialgleichung

$$(3.) \qquad \beta_p \frac{d^p\eta}{du^p} + \beta_{p-1} \frac{d^{p-1}\eta}{du^{p-1}} + \cdots + \beta_0\eta = 0,$$

welcher die p Functionen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$, folglich sämmtliche Periodicitätsmoduln genügen, und setze

$$Y = \beta_p \frac{\partial^p y}{\partial u^p} + \beta_{p-1} \frac{\partial^{p-1} y}{\partial u^{p-1}} + \cdots + \beta_0 y,$$

so repräsentirt die Gleichung (3.) nach No. 4 und den Gleichungen (1.) dieser Nummer folgendes System von $n-1$ Gleichungen:

$$(4.) \qquad \int_{(\lambda)} Y\,dx = 0$$

für $\lambda = 1, 2, \ldots n-1$.

Für ein gerades n ergeben die $n-2$ ersten derselben, dass $\int Y\,dx$ in der Fläche T' beim Ueberschreiten eines der Querschnitte, welche die Fläche T in die einfach zusammenhängende Fläche T' verwandeln, ungeändert bleibt; die letzte Gleichung (4.) enthält die Bedingung dafür, dass das Integral $\int Y\,dx$ für $x = \infty$ nicht logarithmisch unendlich werde.

Für ein ungerades n enthalten die $n-1$ Gleichungen (4.) die Bedingung, dass $\int Y\,dx$ beim Ueberschreiten der Querschnitte ungeändert bleibt. Das Integral $\int Y\,dx$ kann überhaupt für $x=\infty$ nicht logarithmisch unendlich werden.

In beiden Fällen also drückt das System der Gleichungen (4.) aus, dass $\int Y\,dx$ eine in der Fläche T überall eindeutige Function ist, die nur eine endliche Anzahl mal unendlich von der ersten Ordnung wird, d. h. es ist $\int Y\,dx$ eine rationale Function von x und s, also

$$(5.) \qquad \int Y\,dx = P + Rs,$$

wo P und R rationale Functionen von x sind. Da aber Y selbst, wie leicht zu sehen, von der Form $Z.s$ ist, wo Z eine rationale Function von x ist, so

ergiebt die Differentiation der Gleichung (5.)

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0.$$

Die Differentialgleichung (3.) ist daher gleichbedeutend mit dieser Gleichung:

$$(6.) \qquad \beta_p \frac{\partial^p y}{\partial u^p} + \beta_{p-1} \frac{\partial^{p-1} y}{\partial u^{p-1}} + \cdots + \beta_0 y = \frac{\partial}{\partial x}(R.s),$$

wo R eine rationale Function von x bedeutet. Sind die Grössen β so bestimmt, dass die Differentialgleichung (3.) durch sämmtliche Periodicitätsmoduln befriedigt wird, so bewirken dieselben auch, dass die linke Seite der Gleichung (6.) der Differentialquotient einer mit s multiplicirten rationalen Function von x werde, und umgekehrt.

Um daher die Anzahl p der linear unabhängigen Periodicitätsmoduln und damit die Ordnung der Differentialgleichung (1.) zu bestimmen, wird die niedrigste Ordnungszahl p aufgesucht, für welche die Gleichung (6.) bestehen kann. Zu diesem Ende ist eine Reduction der Integrale $\int \frac{f(x)}{s} dx$ auf eine gewisse endliche Anzahl einfacher Integrale erforderlich.

9.

Zur Reduction der Integrale algebraischer Functionen der Form $\int \frac{f(x)}{s} dx$, worin $f(x)$ eine beliebige rationale Function von x bedeutet, bedienen wir uns eines Verfahrens, welches mit demjenigen übereinstimmt, welches Herr *Weierstrass* in seinen Vorlesungen zur Reduction der elliptischen Integrale anwendet. — Dasselbe beruht auf der Formel, aus welcher *Jacobi* den Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument bei den Integralen dritter Gattung hergeleitet hat (Bd. 32, pag. 185 dieses Journals).

Es werde der Kürze wegen $\varphi(x)$ statt $\varphi(x, u)$ geschrieben, und man setze:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{x-t} \frac{\sqrt{\varphi(t)}}{\sqrt{\varphi(x)}}, \qquad \psi(t,x) = \frac{1}{t-x} \frac{\sqrt{\varphi(x)}}{\sqrt{\varphi(t)}},$$

so ist

$$(1.) \qquad \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial \psi(t,x)}{\partial x} = \frac{B}{\sqrt{\varphi(t)\varphi(x)}},$$

wo

$$B = \frac{1}{(x-t)^2}[\varphi(t) - \varphi(x) - \varphi'(x)(t-x) - \tfrac{1}{2}(t-x)(\varphi'(t) - \varphi'(x))],$$

indem

$$\varphi'(x) = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}$$

ist, eine ganze rationale Function von x und t und zwar in Bezug auf beide vom Grade $n-2$ wird. Man setze daher

$$B = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_{n-2} x^{n-2},$$

wo die Coefficienten A rational aus den Coefficienten von $\varphi(x)$ gebildet werden. Integrirt man die Gleichung (1.) nach t, so dass die Integrale für einen Werth x_1 verschwinden, so erhält man

$$(2.)\quad \frac{1}{x-t}\frac{\sqrt{\varphi(t)}}{\sqrt{\varphi(x)}} - \frac{1}{x-x_1}\frac{\sqrt{\varphi(x_1)}}{\sqrt{\varphi(x)}} = \frac{\partial}{\partial x}\int_{x_1}^{t} \frac{\sqrt{\varphi(x)}}{(t-x)\sqrt{\varphi(t)}}\,dt + \frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}}\sum_0^{n-2} A_\alpha x^\alpha \int_{x_1}^{t} \frac{A_\alpha\,dt}{\sqrt{\varphi(t)}}.$$

Ist $\psi(x)$ irgend eine Function von x, so bedeuten

$$[\psi(x)]_{(x-a)^n} \quad \text{und} \quad [\psi(x)]_{\frac{1}{x^n}}$$

resp. die Coefficienten von $(x-a)^n$ und x^{-n} in den Entwicklungen von $\psi(x)$ nach steigenden Potenzen von $x-a$ und nach fallenden Potenzen von x.

Dividirt man die Gleichung (2.) durch $\sqrt{\varphi(t)}$, multiplicirt sie mit einer rationalen Function $g(t)$, die für $t=x_1$ unendlich wird, so erhält man:

$$(3.)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}}\left[\frac{g(t)}{x-t}\right]_{(t-x_1)^{-1}} \\ &= \frac{\sqrt{\varphi(x_1)}}{(x-x_1)\sqrt{\varphi(x)}}\left[\frac{g(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{(t-x_1)^{-1}} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{g(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\int_{x_1}^{t}\frac{\sqrt{\varphi(x)}}{(t-x)}\frac{dt}{\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{(t-x_1)^{-1}} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}}\sum_0^{n-2} x^\alpha \left[\frac{g(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\int_{x_1}^{t}\frac{A_\alpha\,dt}{\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{(t-x_1)^{-1}}. \end{aligned}\right.$$

Entwickelt man beide Seiten der Gleichung (1.) nach fallenden Potenzen von t und integrirt derart, dass man den Integralen keine Constante hinzufügt, so erhält man

$$(4.)\quad \frac{1}{x-t}\frac{\sqrt{\varphi(t)}}{\sqrt{\varphi(x)}} = \frac{\partial}{\partial x}\int \frac{1}{t-x}\frac{\sqrt{\varphi(x)}}{\sqrt{\varphi(t)}}\,dt + \frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}}\sum_0^{n-2} x^\alpha \int \frac{A_\alpha}{\sqrt{\varphi(t)}}\,dt.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $g(t)$ und dividirt durch $\sqrt{\varphi(t)}$, so folgt

$$(5.)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}}\left[\frac{g(t)}{(t-x)}\right]_{\frac{1}{t}} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{g(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\int\frac{\sqrt{\varphi(x)}}{(t-x)\sqrt{\varphi(t)}}\,dt\right]_{\frac{1}{t}} - \frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}}\sum_0^{n-2} x^\alpha\left[\frac{g(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\int\frac{A_\alpha\,dt}{\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{\frac{1}{t}}. \end{aligned}\right.$$

Sind überhaupt $x_1, x_2, \ldots x_m$ die Werthe, für welche $g(t)$ unendlich wird, so ist

$$(6.) \qquad g(x) = \left[\frac{g(t)}{t-x}\right]_{\frac{1}{t}} + \sum_1^m{}_b \left[\frac{g(t)}{x-t}\right]_{(t-x_b)^{-1}}.$$

Bildet man daher die der Gleichung (3.) ähnlichen Gleichungen für $x_2, x_3, \ldots x_m$, und addirt die m Gleichungen zur Gleichung (5.), so folgt

$$(7.) \qquad \frac{g(x)}{\sqrt{\varphi(x)}} = \sum_1^m{}_b C_b \frac{\sqrt{\varphi(x_b)}}{(x-x_b)\sqrt{\varphi(x)}} + \sum_0^{n-2}{}_a \frac{\mathfrak{R}_a x^a}{\sqrt{\varphi(x)}} + \frac{\partial}{\partial x}\left(X(x)\sqrt{\varphi(x)}\right),$$

wo

$$(8.) \quad \begin{cases} C_b = \left[\dfrac{g(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{(t-x_b)^{-1}}, \\ \mathfrak{R}_a = \displaystyle\sum_1^m{}_b \left[\frac{g(t)}{\sqrt{\varphi(t)}} \int_{x_b}^{t} \frac{A_a\, dt}{\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{(t-x_b)^{-1}} - \left[\frac{g(t)}{\sqrt{\varphi(t)}} \int \frac{A_a\, dt}{\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{\frac{1}{t}}, \\ X(x) = \displaystyle\sum_1^m{}_b \left[\frac{g(t)}{\sqrt{\varphi(t)}} \int_{x_b}^{t} \frac{dt}{\sqrt{\varphi(t)}\,(t-x)}\right]_{(t-x_b)^{-1}} - \left[\frac{g(t)}{\sqrt{\varphi(t)}} \int \frac{dt}{(t-x)\sqrt{\varphi(t)}}\right]_{\frac{1}{t}}. \end{cases}$$

Ist x_b eine der Wurzeln der Gleichung $\varphi(t) = 0$, so ist $C_b = 0$. Betrachten wir daher nur solche rationale Functionen $g(x)$, die nur für die Wurzeln $a_1, a_2, \ldots a_n$ dieser Gleichung unendlich werden, so verwandelt sich die Gleichung (7.) in:

$$(9.) \qquad \frac{g(x)}{\sqrt{\varphi(x)}} = \sum_0^{n-2}{}_a \frac{\mathfrak{R}_a x^a}{\sqrt{\varphi(x)}} + \frac{\partial}{\partial x}\left(X(x)\sqrt{\varphi(x)}\right),$$

wo in (8.) statt $x_1, x_2, \ldots x_m$ Wurzeln der Gleichung $\varphi(t) = 0$ zu setzen sind. Es ist zu ersehen, dass die Grössen C_b, $\mathfrak{R}_a$ und die Coefficienten von $X(x)$ in Gleichung (8.) sich rational aus den Coefficienten von $\varphi(x)$ und den Constanten in $g(x)$ zusammensetzen.

10.

Zu dieser Reduction ist für unseren Gebrauch noch der Nachweis hinzuzufügen, dass in der Gleichung (7.) voriger Nummer die Coefficienten C_b und $\mathfrak{R}_a$ einzeln verschwinden müssen, wenn $\frac{g(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}$ der Differentialquotient einer rationalen Function von x und $\sqrt{\varphi(x)}$ sein soll.

Sind $x_1, x_2, \ldots x_i$ die von $a_1, a_2, \ldots a_n$ verschiedenen Werthe, für welche $g(x)$ unendlich wird, und setzt man

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_i) = \Pi(x)$$

und

$$\sum_1^i{}_b \frac{C_b\sqrt{\varphi(x_b)}}{(x-x_b)} = \frac{Z(x)}{\Pi(x)}, \qquad \sum_0^{n-2}{}_a \mathfrak{K}_a x^a = G(x),$$

so müsste, wenn $\frac{g(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}$ der Differentialquotient einer rationalen Function von x und $\sqrt{\varphi(x)}$ sein soll,

$$\left[\frac{Z(x)}{\Pi(x)} + G(x)\right]\frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}} = \frac{\partial}{\partial x}\left[Q(x).\sqrt{\varphi(x)}\right]$$

sein, was sich ähnlich wie in No. 8 ergiebt; hieraus aber folgt:

$$(1.) \qquad \frac{Z(x)+\Pi(x)G(x)}{\Pi(x)} = Q'(x)\varphi(x) + \tfrac{1}{2}Q(x)\varphi'(x),$$

wenn die Ableitungen durch Accente bezeichnet werden. — Da nun $Z(x)$ und $G(x)$ ganze rationale Functionen sind, so kann die linke Seite, folglich auch die rechte Seite der Gleichung (1.) für keinen endlichen Werth von x mehr als von der ersten Ordnung unendlich werden. Hieraus ergiebt sich aber, dass $Q(x)$ nur für die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x)=0$ unendlich werden kann, dass demnach $Z(x)+\Pi(x)G(x)$, folglich $Z(x)$ durch $\Pi(x)$ theilbar ist; dieses erfordert aber, dass $Z(x)$ identisch verschwindet, d. h.

$$C_1 = C_2 = \cdots = C_i = 0.$$

Die Gleichung (1.) geht daher über in:

$$(2.) \qquad G(x) = Q'(x)\varphi(x) + \tfrac{1}{2}Q(x)\varphi'(x).$$

Es ergiebt sich leicht, dass $Q(x)$ für keinen endlichen Werth unendlich werden kann, ohne dass auch für denselben Werth die rechte Seite der Gleichung (2.) unendlich wird, dass also $Q(x)$ eine ganze rationale Function ist. Bezeichnet man den Grad derselben mit μ, so ist der Grad der rechten Seite der Gleichung (2.) gleich $\mu+n-1$, da die Summe der Coefficienten der höchsten Potenzen in den beiden Summanden derselben nicht Null sein kann. Nun ist aber der Grad von $G(x)$ der Voraussetzung nach der $(n-2)^{\text{te}}$, daher erfordert die Gleichung (2.), dass $Q(x)$, also auch $G(x)$ identisch verschwinde, d. h. $\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_2 = \cdots = \mathfrak{K}_{n-2} = 0$.

11.

Es sei wieder, wie in No. 2—8,

$$y = \frac{f(x)}{\sqrt{\varphi(x,u)}},$$

wo $f(x)$ eine beliebige ganze rationale Function von x und u bedeutet, so ist auf y und jede partielle Ableitung von y nach u die Gleichung (9.) in No. 9 anwendbar. Man hat demnach für jeden Werth von α

$$(1.) \qquad \frac{\partial^\alpha y}{\partial u^\alpha} = \sum_0^{n-2}{}_\beta \frac{\mathfrak{R}_{\alpha\beta} x^\beta}{\sqrt{\varphi(x,u)}} + \frac{\partial}{\partial x}[X_\alpha(x)\sqrt{\varphi(x,u)}],$$

wo

$$(2.) \quad \begin{cases} \mathfrak{R}_{\alpha\beta} = \sum_1^n{}_\gamma \left[\frac{\partial^\alpha y}{\partial u^\alpha}\int_{a_\gamma}^{t} \frac{A_\beta\, dt}{\sqrt{\varphi(t,u)}}\right]_{(t-a_\gamma)^{-1}} - \left[\frac{\partial^\alpha y}{\partial u^\alpha}\int \frac{A_\beta\, dt}{\sqrt{\varphi(t,u)}}\right]_{\frac{1}{t}}, \\ X_\alpha(x) = \sum_1^n{}_\gamma \left[\frac{\partial^\alpha y}{\partial u^\alpha}\int_{a_\gamma}^{t} \frac{dt}{(t-x)\sqrt{\varphi(t,u)}}\right]_{(t-a_\gamma)^{-1}} - \left[\frac{\partial^\alpha y}{\partial u^\alpha}\int \frac{dt}{(t-x)\sqrt{\varphi(t,u)}}\right]_{\frac{1}{t}}; \end{cases}$$

unter y die Function $\frac{f(t)}{\sqrt{\varphi(t,u)}}$ verstanden. Die Grössen $\mathfrak{R}_{\alpha\beta}$ und die Coefficienten von $X(x)$ sind rational aus den Coefficienten von $f(x)$ und $\varphi(x,u)$ zusammengesetzt, also rationale Functionen von u.

Es seien $\beta_{n-1}, \beta_{n-2}, \ldots \beta_1, \beta_0$ unbestimmte Grössen, und bilden wir die Function

$$Y = \beta_{n-1}\frac{\partial^{n-1} y}{\partial u^{n-1}} + \beta_{n-2}\frac{\partial^{n-2} y}{\partial u^{n-2}} + \cdots + \beta_1 \frac{\partial y}{\partial u} + \beta_0 y,$$

so ergiebt die Gleichung (1.)

$$(3.) \qquad Y = \sum_0^{n-2}{}_\beta \frac{\mathfrak{R}_\beta^{(0)} x^\beta}{\sqrt{\varphi(x,u)}} + \frac{\partial}{\partial x}[X^{(0)}(x)\sqrt{\varphi(x,u)}],$$

wo

$$(4.) \quad \begin{cases} \mathfrak{R}_\beta^{(0)} = \beta_{n-1}\mathfrak{R}_{n-1,\beta} + \beta_{n-2}\mathfrak{R}_{n-2,\beta} + \cdots + \beta_0 \mathfrak{R}_{0,\beta}, \\ X^{(0)}(x) = \beta_{n-1}X_{n-1}(x) + \beta_{n-2}X_{n-2}(x) + \cdots + \beta_0 X_0(x). \end{cases}$$

Soll Y der Differentialquotient einer rationalen Function von x und s sein, so hat man nach voriger Nummer $n-1$ Gleichungen zu erfüllen, nämlich

$$(5.) \qquad \mathfrak{R}_0^{(0)} = 0, \quad \mathfrak{R}_1^{(0)} = 0, \quad \ldots \quad \mathfrak{R}_{n-2}^{(0)} = 0.$$

Im Allgemeinen, wenn nicht die Coefficienten von $f(x)$ und $\varphi(x,u)$ besonderen Bedingungen unterworfen sind, werden sich aus diesem Systeme von Glei-

chungen bestimmte Werthe der Verhältnisse der Grössen $\beta_{n-1}, \beta_{n-2}, \ldots \beta_1, \beta_0$ ergeben. Hieraus ergiebt sich nicht nur, dass die Ordnung p der Differentialgleichung (3.) in No. 8, welcher sämmtliche Periodicitätsmoduln genügen, im Allgemeinen gleich $n-1$ ist, diese Differentialgleichung also im Allgemeinen die Form:

$$(6.) \qquad \beta_{n-1}\frac{d^{n-1}\eta}{du^{n-1}}+\beta_{n-2}\frac{d^{n-2}\eta}{du^{n-2}}+\cdots+\beta_0\eta = 0$$

hat, sondern die Gleichungen (5.) können auch zur Bestimmung der Coefficienten derselben dienen. Im Allgemeinen sind also alle $n-1$ Periodicitätsmoduln linear unabhängig, d. h. im Allgemeinen findet keine Gleichung der Gestalt:

$$c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_{n-1}\eta_{n-1} = 0$$

mit von u unabhängigen Coefficienten c in einem endlichen Theile der u-Ebene statt.

Für einen geradzahligen Werth von n ist bekanntlich

$$(7.) \qquad \eta_1-\eta_2+\eta_3-\eta_4+\cdots+\eta_{n-1} = 2\pi i\varepsilon,$$

wo ε den Coefficienten von $\frac{1}{x}$ in der Entwickelung von y nach fallenden Potenzen von x ist (s. Puiseux in *Liouville*'s Journal de Mathém. t. XV und XVI §. 47 und 51). Die Differentialgleichung (6.) hat also in diesem Falle ein Integral ε, welches eine algebraische Function von u ist. — Ist ε von u unabhängig, so muss $\beta_0 = 0$ sich ergeben. — Ist $\varepsilon = 0$, so muss sich die Ordnung der Differentialgleichung (6.) um eine Einheit erniedrigen; setzt man in diesem Falle in den Gleichungen (5.) $\beta_{n-1} = 0$, so müssen die $n-1$ Gleichungen zwischen den $n-1$ Unbekannten $\beta_{n-2}, \beta_{n-3}, \ldots \beta_0$ mit einander verträglich bleiben.

Wenn überhaupt zwischen den Coefficienten von $f(x)$ und $\varphi(x, u)$ derartige besondere Relationen stattfinden, dass man $\beta_{n-1}=\beta_{n-2}=\cdots=\beta_{p-1}=0$ in den Gleichungen (5.) annehmen darf, ohne dass die $n-1$ Gleichungen mit einander unverträglich werden, sondern vielmehr alsdann p von ihnen die Verhältnisse der Grössen $\beta_p, \beta_{p-1}, \ldots \beta_0$ bestimmen, so dass β_p von Null verschieden und die übrigen $n-p-1$ Gleichungen eine Folge dieser p werden, so wird die Differentialgleichung, welcher sämmtliche Periodicitätsmoduln genügen, genau der p^{ten} Ordnung, nämlich:

$$(8.) \qquad \beta_p\frac{d^p\eta}{du^p}+\beta_{p-1}\frac{d^{p-1}\eta}{du^{p-1}}+\cdots+\beta_0\eta = 0.$$

Es sind alsdann p der Periodicitätsmoduln linear unabhängig, während die übrigen sich als lineare homogene Functionen derselben mit von u unabhängigen Coefficienten darstellen lassen.

12.

Es sei die Differentialgleichung niedrigster Ordnung, welcher sämmtliche Periodicitätsmoduln genügen,

$$(1.) \qquad \beta_p \frac{d^p \eta}{du^p} + \beta_{p-1} \frac{d^{p-1}\eta}{du^{p-1}} + \cdots + \beta_0 \eta = 0,$$

so sind die Grössen $\frac{\beta_{p-1}}{\beta_p}, \frac{\beta_{p-2}}{\beta_p}, \ldots \frac{\beta_0}{\beta_p}$ rationale Functionen von u, da die Coefficienten der Gleichungen (5.) in No. 11 sich rational aus den Coefficienten von $f(x)$ und $\varphi(x, u)$ zusammensetzen.

Die singulären Punkte der Differentialgleichung (1.) oder diejenigen Punkte, für welche eine oder mehrere der Grössen $\frac{\beta_{p-1}}{\beta_p}, \frac{\beta_{p-2}}{\beta_p}, \ldots \frac{\beta_0}{\beta_p}$ unendlich werden, zerfallen in wesentliche und ausserwesentliche (A. B. 68 No. 8). Die ersteren sind die Verzweigungspunkte der Fläche S, die letzteren hangen von der Beschaffenheit der Function $f(x)$ ab. Dieses ergiebt sich daraus, dass die Integrale der Differentialgleichung (1.) überall ausser in den Verzweigungspunkten der Fläche S eindeutig, endlich und continuirlich sind (nach No. 3).

Da aber nach No. 6 die Integrale in einem Verzweigungspunkte b der Fläche S und im Unendlichen nur so unstetig werden, dass sie resp. mit bestimmten Potenzen von $u-b$ und von u multiplicirt nicht mehr unendlich sind, so ergiebt sich (A. B. 66 No. 4 und B. 68 No. 3), wenn man die sämmtlichen singulären Punkte mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\varrho$ bezeichnet und

$$\psi = (u-\alpha_1)(u-\alpha_2)\ldots(u-\alpha_\varrho)$$

setzt:

$$(2.) \qquad \frac{\beta_{p-i}}{\beta_p} = \frac{F_{(\varrho-1)i}(u)}{\psi^i},$$

wo mit $F_a(u)$ eine ganze rationale Function von u, höchstens vom Grade a bezeichnet wird.

13.

Nach der vorigen Nummer hat die Differentialgleichung, welcher sämmtliche Periodicitätsmoduln genügen, wenn sie von der Ordnung p ist, die Gestalt:

$$(1.) \qquad \frac{d^p \eta}{du^p} + \frac{F_{\varrho-1}(u)}{\psi} \frac{d^{p-1}\eta}{du^{p-1}} + \frac{F_{2(\varrho-1)}(u)}{\psi^2} \frac{d^{p-2}\eta}{du^{p-2}} + \cdots + \frac{F_{p(\varrho-1)}(u)}{\psi^p} \eta = 0.$$

Die determinirende Fundamentalgleichung derselben (A. B. 68 No. 4) in Bezug auf einen der wesentlich singulären Punkte α ist, wenn man

$$F_{\alpha(\varrho-1)}(u)\frac{(u-\alpha)^\alpha}{\psi^\alpha} = P_\alpha(u)$$

setzt:

$$(2.)\quad \begin{cases} r(r-1)(r-2)\dots(r-p+1) \\ +P_1(\alpha)r(r-1)\dots(r-p+2)+P_2(\alpha)r(r-1)\dots(r-p+3)+\dots+P_p(\alpha)=0. \end{cases}$$

Theilt man die Wurzeln dieser Gleichung in Gruppen, derart dass in jeder Gruppe (R) nur solche sich befinden, deren Differenz eine ganze Zahl oder Null ist; und ist r diejenige Wurzel einer solchen Gruppe, deren reeller Theil nicht von dem reellen Theile einer anderen Wurzel derselben Gruppe übertroffen wird, so giebt es ein Integral der Differentialgleichung (1.) der Form

$$(3.)\qquad v = (u-\alpha)^r\chi(u),$$

wo $\chi(u)$ in der Umgebung von α eindeutig, endlich und continuirlich und in α von Null verschieden ist (A. B. 66 No. 4 und 5, B. 68 No. 4 Satz IV).

Es seien $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_p$ die linear unabhängigen Periodicitätsmoduln, so bilden sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (1.); man kann also p Constanten $c_1, c_2, \dots c_p$ so bestimmen, dass

$$(4.)\qquad v = c_1\eta_1+c_2\eta_2+\dots+c_p\eta_p.$$

Nach einer gewissen Anzahl s von Umläufen von u um α kehren die sämmtlichen Werthe $a_1, a_2, \dots a_n$ in sich selbst zurück. Bezeichnen wir die zur Darstellung von $\sqrt{\varphi(x,u)}$ dienende Fläche für einen bestimmten Werth von u in der Umgebung von α mit $T^{(0)}$, so wird jedenfalls die Form der nach $t=2s$ Umdrehungen entstandenen Fläche (nach No. 1 und 5) mit $T^{(0)}$ identisch sein. Der Definition der Periodicitätsmoduln als Functionen von u (in No. 2) gemäss werden alsdann $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_p$ nach $2t$ Umdrehungen von u um α um das Doppelte des Zuwachses derselben nach t Umdrehungen vermehrt. Es möge η_α nach t Umdrehungen in η'_α übergehen, so geht η_α nach $2t$ Umdrehungen in $\eta_\alpha+2(\eta'_\alpha-\eta_\alpha)=2\eta'_\alpha-\eta_\alpha$ über. Bezeichnet man $e^{2r\pi i}$ mit ξ, so ist nach (3.) und (4.)

$$(5.)\quad \begin{cases} \sum_1^p{}_\alpha c_\alpha\eta'_\alpha = \xi^t\sum_1^p{}_\alpha c_\alpha\eta_\alpha \\ 2\sum_1^p{}_\alpha c_\alpha\eta'_\alpha - \sum_1^p{}_\alpha c_\alpha\eta_\alpha = \xi^{2t}\sum_1^p{}_\alpha c_\alpha\eta_\alpha. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\xi^{2t}-2\xi^t+1=0,$$

d. h. $\xi^t=1$, oder rt eine reale ganze Zahl.

Hieraus ergiebt sich, dass die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (2.) *rationale* Zahlen sind.

Die determinirende Fundamentalgleichung in Bezug auf den singulären Punkt α ist der in (A. B. 66 No. 3 Gl. (6.)) definirten Fundamentalgleichung vom p^{ten} Grade zugeordnet, derart, dass das $2\pi i$fache der Wurzeln der ersteren die Logarithmen der Wurzeln der letzteren bilden. (A. B. 68 No. 4) Hieraus ergiebt sich, dass die Wurzeln der zum singulären Punkt α gehörigen Fundamentalgleichung (A. B. 66 No. 3 Gl. (6.)) sämmtlich *Wurzeln der Einheit* sind.

14.

Die Form der Integrale der Differentialgleichung (1.) in voriger Nummer, in der Umgebung eines wesentlich singulären Punktes α haben wir (vergl. A. B. 66 No. 3, B. 68 No. 4 Satz IV) folgendermassen festgestellt. Ist r diejenige Wurzel der Gleichung (2.) der vorigen Nummer, deren reeller Theil nicht von dem reellen Theile einer anderen Wurzel, die sich mit ihr in ein und derselben Gruppe (R) befindet, übertroffen wird; und nimmt man an, dass diese Gruppe überhaupt λ Wurzeln enthält, so giebt es eine zugeordnete Gruppe von λ Integralen, von der Beschaffenheit:

$$(1.) \qquad v_\mathfrak{a} = (u-\alpha)^r \sum_{1}^{\mathfrak{a}}{}_{\mathfrak{b}} \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} [\log(u-\alpha)]^{\mathfrak{b}-1}$$

$\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots \lambda$, wo $\varphi_{\mathfrak{a}1}, \varphi_{\mathfrak{a}^2}, \ldots \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}}$ in der Umgebung von α eindeutige, endliche und continuirliche Functionen von u sind, die nicht sämmtlich für $u=\alpha$ verschwinden.

Zwischen diesen Integralen findet die Beziehung statt:

$$(2.) \qquad v'_\mathfrak{a} = w_{\mathfrak{a}1} v_1 + w_{\mathfrak{a}2} v_2 + \cdots + w_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}-1} v_{\mathfrak{a}-1} + e^{2r\pi i} v_\mathfrak{a},$$

wo $w_{\mathfrak{a}1}, w_{\mathfrak{a}2}, \ldots w_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}-1}$ Constanten, und $f(u)'$ den Werth der Function $f(u)$ nach einem Umlaufe von u um α darstellt.

Die Gesammtheit der den verschiedenen Wurzelgruppen (R) zugehörigen Integralgruppen v bildet ein Fundamentalsystem.

Bezeichnet man dieses Fundamentalsystem mit $v_1, v_2, \ldots v_p$, so lässt sich jeder Periodicitätsmodul $\eta_\mathfrak{a}$ auf die Gestalt bringen:

$$(3.) \qquad \eta_\mathfrak{a} = c_{\mathfrak{a}1} v_1 + c_{\mathfrak{a}2} v_2 + \cdots + c_{\mathfrak{a}p} v_p,$$

wo die Grössen c von u unabhängig sind.

Nach einem Umlaufe von u um α verwandelt sich die Gleichung (3.) in

$$(4.) \qquad \eta'_\mathfrak{a} = c_{\mathfrak{a}1} v'_1 + c_{\mathfrak{a}2} v'_2 + \cdots + c_{\mathfrak{a}p} v'_p .$$

An die Stelle von η_a' lässt sich (vergl. No. 5 und 11) eine lineare homogene Function mit constanten Coefficienten der Grössen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$ und folglich auch der Grössen $v_1, v_2, \ldots v_p$ setzen. Andererseits lassen sich $v_1', v_2', \ldots v_p'$ mit Hülfe der Gleichung (2.) ebenfalls als lineare homogene Functionen mit constanten Coefficienten der Grössen $v_1, v_2, \ldots v_p$ darstellen. Die Vergleichung der Coefficienten resp. von $v_1, v_2, \ldots v_p$ auf beiden Seiten der so umgewandelten Gleichungen (4.) liefert p^2 lineare homogene Gleichungen für die p^2 unbekannten Grössen $c_{a1}, c_{a2}, \ldots c_{ap}$.

Sind daher die Integrale v bestimmt, wodurch die Grössen w_{ab} ebenfalls bestimmt sind, so ist im Allgemeinen die Darstellung jedes Periodicitätsmoduls durch $v_1, v_2, \ldots v_p$ durch die Gleichung (3.) bis auf eine Constante gegeben. Die letztere wird mit Hülfe des Werthes, den η_a oder η_a mit einer bestimmten Potenz von $u-\alpha$ multiplicirt für $u=\alpha$ annimmt.

Ein ähnliches Verfahren gilt für die Bestimmung der Form der Periodicitätsmoduln in der Umgebung von $u=\infty$. Man hat zu dem Ende (vergl. A. B. 66 No. 3) in der Differentialgleichung (1.) der vorigen Nummer $u=\frac{1}{t}$ zu setzen und die Integrale in der Umgebung von $t=0$ in Betracht zu ziehen.

15.

Die wirkliche Bestimmung der Coefficienten der Differentialgleichung, welcher die Periodicitätsmoduln genügen, mit Hülfe der Gleichungen (5.) in No. 11 wird jedoch meistentheils umständlicher sein als ein directes Verfahren, welches sich unmittelbar an die Gleichung (6.) in No. 8 anschliesst.

Es werden nämlich n Grössen $\beta_{n-1}, \beta_{n-2}, \ldots \beta_0$ bestimmt, derart dass die Gleichung

$$(1.) \qquad \beta_{n-1}\frac{\partial^{n-1}y}{\partial u^{n-1}}+\beta_{n-2}\frac{\partial^{n-2}y}{\partial u^{n-2}}+\cdots+\beta_0 y = \frac{\partial}{\partial x}[F(x)\sqrt{\varphi(x,u)}],$$

wo $F(x)$ eine ebenfalls noch unbekannte rationale Function von x bedeutet, befriedigt wird. Es sei β_p die erste der Grössen $\beta_{n-1}, \beta_{n-2}, \ldots \beta_0$, von β_{n-1} an gerechnet, welche dieser Bestimmung gemäss nicht Null sein darf, so ist die Ordnung der Differentialgleichung, welcher die Periodicitätsmoduln genügen, genau gleich p, und diese Differentialgleichung lautet:

$$(2.) \qquad \beta_p\frac{d^p\eta}{du^p}+\beta_{p-1}\frac{d^{p-1}\eta}{du^{p-1}}+\cdots+\beta_0\eta = 0.$$

Zur wirklichen Bestimmung der Grössen β werden die Differentiationen von

y nach u in Gleichung (1.) ausgeführt, dadurch nimmt die linke Seite derselben die Gestalt $G(x).\varphi(x,u)^{-\frac{2n-1}{2}}$ an, wo $G(x)$ eine ganze rationale Function von x im Allgemeinen vom Grade $m+(n-1)n$ bedeutet, in welcher die Grössen β_{p-1}, β_{p-2}, ... β_0 linear enthalten sind und m der Grad von $f(x)$ ist. — Die rationale Function $F(x)$ kann nur für die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x,u)=0$ unendlich werden. Es sei daher

$$F(x) = \frac{r(x)}{\varphi(x,u)^{n-1}},$$

so ergiebt sich:

$$(3.) \qquad G(x) = \frac{\partial r(x)}{\partial x}\varphi(x,u) - \frac{(2n-3)}{2}\frac{\partial \varphi(x,u)}{\partial x} r(x).$$

Es ist $r(x)$ eine ganze rationale Function, im Allgemeinen vom Grade $m+(n-1)^2$; dieses ergiebt sich ähnlich wie in No. 10. — Die Vergleichung gleich hoher Potenzen von x auf beiden Seiten der Gleichung (3.) liefert $m+n(n-1)+1$ lineare homogene Gleichungen ersten Grades zur Bestimmung der Verhältnisse der n Grössen β und der $m+(n-1)^2+1$ Coefficienten von $r(x)$.

16.

Es werde jetzt der besondere Fall betrachtet, dass $f(x)$ von u unabhängig und

$$\varphi(x,u) = A_0(x-k_1)(x-k_2)\ldots(x-k_{n-1})(x-u) = \psi(x)(x-u),$$

wo A_0 und k_1, k_2, ... k_{n-1} von u unabhängig sind.

Es ist alsdann

$$(1.) \qquad \frac{\partial^a y}{\partial u^a} = \sigma_a (x-u)^{-\frac{2a+1}{2}} \psi(x)^{-\frac{1}{2}}.f(x),$$

wo

$$\sigma_a = \frac{1.3.5\ldots(2a-1)}{2^a}.$$

Setzt man daher

$$(2.) \qquad \beta_{n-1}\frac{\partial^{n-1} y}{\partial u^{n-1}} + \beta_{n-2}\frac{\partial^{n-2} y}{\partial u^{n-2}} + \cdots + \beta_0 y = G(x)(x-u)^{-\frac{2n-1}{2}} \psi(x)^{-\frac{1}{2}}.f(x),$$

so ist

$$(3.) \quad G(x) = \beta_{n-1}\sigma_{n-1} + \beta_{n-2}\sigma_{n-2}(x-u) + \beta_{n-3}\sigma_{n-3}(x-u)^2 + \cdots + \beta_0(x-u)^{n-1}.$$

Nun soll (s. Gl. (1.) vor. No.)

$$(4.) \qquad G(x)(x-u)^{-\frac{2n-1}{2}} \psi(x)^{-\frac{1}{2}} f(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left[F(x)\sqrt{\varphi(x,u)}\right]$$

sein. Setzt man

$$F(x) = r(x)(x-u)^{-(n-1)},$$

so geht die rechte Seite über in:

$$(x-u)^{-\frac{2n-1}{2}}\psi(x)^{-\frac{1}{2}}[r'(x)\varphi(x,u)+\tfrac{1}{2}r(x)\big((x-u)\psi'(x)-(2n-3)\psi(x)\big)],$$

wo

$$r'(x)=\frac{\partial r(x)}{\partial x}, \qquad \psi'(x)=\frac{d\psi(x)}{dx},$$

daher ist

$$(5.) \qquad G(x)f(x)=r'(x)\varphi(x,u)+\tfrac{1}{2}r(x)[(x-u)\psi'(x)-(2n-3)\psi(x)].$$

Der Grad μ der ganzen rationalen Function $r(x)$ wird folgendermassen ermittelt. Wir setzen:

$$r(x) = R_0x^\mu+R_1x^{\mu-1}+\cdots+R_\mu,$$
$$\varphi(x) = A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n,$$
$$(x-u)\psi'(x)-(2n-3)\psi(x) = B_0x^{n-1}+B_1x^{n-2}+\cdots+B_{n-1},$$

so erhält man

$$G(x)f(x) = \sum_1^{n+\mu} C_\mathfrak{a}x^{n+\mu-\mathfrak{a}},$$

wo für $\mathfrak{a}<\mu$ und $\mathfrak{a}<n$

$$(6.) \qquad C_\mathfrak{a} = \sum_0^{\mathfrak{a}-1}\mathfrak{b}\{(\mu-\mathfrak{b})R_\mathfrak{b}A_{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-1}+\tfrac{1}{2}B_{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-1}R_\mathfrak{b}\}.$$

Da

$$B_0 = -(n-2)A_0,$$

so ist

$$(7.) \qquad C_1 = R_0A_0\Big[\mu-\frac{n-2}{2}\Big]$$

und der Coefficient von $R_{\mathfrak{a}-1}$ in $C_\mathfrak{a}$ gleich

$$(8.) \qquad \Big[\mu-\frac{n-2}{2}-\mathfrak{a}+1\Big]A_0.$$

Ist n ungerade, so ist C_1 stets von Null verschieden; man darf also μ nicht grösser als m wählen. Da aber zur Bestimmung der Grössen β und der Coefficienten von $r(x)$ die durch Vergleichung gleich hoher Potenzen von x auf beiden Seiten der Gleichung (5.) herzustellenden $m+n$ Gleichungen zu erfüllen sind, so darf auch im Allgemeinen μ nicht kleiner als m gewählt werden.

Ist n gerade, so sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1) $m>\frac{n-2}{2}$, so muss im Allgemeinen $\mu=m$ angenommen werden.

2) $m = \frac{n-2}{2}$. Es ist wieder $\mu = m$ zu nehmen. Allein aus Gleichung (7.) folgt alsdann, dass die rechte Seite der Gleichung (5.) vom Grade $m+n-2$, dass also nach Gleichung (3.) $\beta_0 = 0$. Es bleiben alsdann noch $m+n-1$ Gleichungen für die $n-1$ Grössen $\beta_{n-1}, \beta_{n-2}, \ldots \beta_1$ und die $m+1$ Coefficienten $R_0, R_1, \ldots R_m$.

3) $m < \frac{n-2}{2}$. Man nehme $\mu = \frac{n-2}{2}$. Es ist alsdann $C_1 = 0$ (Gl. (7.)). Bezeichnet man $\mu - m$ mit δ, so sind in den Gleichungen

$$(9.) \qquad C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \quad \ldots \quad C_\delta = 0$$

nach (8.) die Coefficienten von $R_1, R_2, \ldots R_{\delta-1}$ resp. $-A_0, -2A_0, \ldots -(\delta-1)A_0$ von Null verschieden, daher geben die Gleichungen (9.) die Grössen R_1, $R_2, \ldots R_{\delta-1}$ durch R_0 ausgedrückt. Es bleibt auf der rechten Seite der Gleichung (5.) noch ein Ausdruck des $(n+m-1)^{\text{ten}}$ Grades, und es sind noch $m+n$ Gleichungen zwischen den n Grössen β und den $m+2$ Grössen R_0, $R_\delta, R_{\delta+1}, \ldots R_\mu$. Man kann daher noch eine Gleichung hinzufügen, welche ausdrückt, dass der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (5.) durch $x-u$ theilbar ist, nämlich

$$(10.) \qquad r(u) = 0,$$

woraus sich ergiebt:

$\beta_{n-1} = 0$, d. h. in diesem Falle ist die Differentialgleichung, welcher die Periodicitätsmoduln genügen, nicht höherer als $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Die wirkliche Bestimmung der Grössen β aus der Gleichung (5.) wird am zweckmässigsten folgendermassen ausgeführt. Die Coefficienten von $r(x)$ werden so bestimmt, dass die rechte Seite der Gleichung (5.) durch $f(x)$, und im Falle eines geradzahligen n, und zugleich $m < \frac{n-2}{2}$, ausserdem durch $x-u$ theilbar sei. — Setzt man alsdann die ganze rationale Function von x

$$(11.) \qquad \frac{r'(x)\varphi(x,u) + \frac{1}{2}r(x)[(x-u)\psi'(x) - (2n-3)\psi(x)]}{f(x)} = \Pi(x),$$

so ergiebt sich aus den Gleichungen (3.) und (5.)

$$(12.) \qquad 1.2.3\ldots(i-1).\sigma_{n-i}\beta_{n-i} = \Pi^{(i-1)}(u)$$

für $i = 1, 2, \ldots n$, wo $\Pi^{(i-1)}(x)$ die $(i-1)^{\text{te}}$ Ableitung von $\Pi(x)$ nach x und $\Pi^{(0)}(x)$ die Function $\Pi(x)$ selber bezeichnet.

17.

Es sei k eine der Grössen $k_1, k_2, \ldots k_{n-1}$ der vorigen Nummer und $f(x)$ durch $(x-k)^\lambda$ theilbar, so folgt aus Gleichung (5.) voriger Nummer, dass

$$(1.)\quad \begin{cases} R(x) &= r'(x)\varphi(x,u)+\frac{1}{2}r(x)[(x-u)\psi'(x)-(2n-3)\psi(x)] \\ &= r'(x)\varphi(x,u)+r(x)[\frac{1}{2}\varphi'(x,u)-(n-1)\psi(x)] \end{cases}$$

den Factor $(x-k)^\lambda$ enthält, dass also die Gleichungen

$$(2.)\quad R(k)=0,\quad R^{(1)}(k)=0,\quad \ldots\quad R^{(\lambda-1)}(k)=0,$$

wo die Ableitungen nach x durch obere Accente bezeichnet sind, erfüllt werden müssen. Aus den beiden Gleichungen (1.) und (2.) folgt aber successive:

$$(3.)\quad r(k)=0,\quad r'(k)=0,\quad \ldots\quad r^{(\lambda-1)}(k)=0.$$

Es ist also $r(x)$ gleichzeitig mit $f(x)$ durch $(x-k)^\lambda$ theilbar.

Es sei nunmehr

$$(4.)\quad f(x) = f_1(x)\cdot\chi(x),$$

wo $\chi(x)$ nur aus Potenzen von Factoren von $\psi(x)$ zusammengesetzt ist, $f_1(x)$ aber keinen solchen Factor enthält, so ist $r(x)$ durch $\chi(x)$ theilbar. Setzt man aber

$$(5.)\quad r(x) = \varrho(x)\cdot\chi(x),$$

so verwandelt sich die Function $\Pi(x)$ der vorigen Nummer in

$$(6.)\quad \Pi(x) = \frac{\varrho'(x)\varphi(x,u)+\varrho(x)\left[\frac{d\log\chi(x)}{dx}\varphi(x,u)+\frac{1}{2}\varphi'(x,u)-(n-1)\psi(x)\right]}{f_1(x)},$$

wobei zu bemerken, dass $\frac{d\log\chi(x)}{dx}\cdot\varphi(x,u)$ eine ganze rationale Function von x ist.

18.

Ist insbesondere $f_1(x)=1$, so erhält man aus Gleichung (6.) voriger Nummer

$$(1.)\quad \Pi(x)=\varrho'(x)\varphi(x,u)+\varrho(x)\left[\frac{d\log\chi(x)}{dx}\varphi(x,u)+\frac{1}{2}\varphi'(x,u)-(n-1)\psi(x)\right].$$

(*A.*) Ist n eine ungerade Zahl, so folgt aus No. 16, dass $\varrho(x)$ von x unabhängig ist. Ist n gerade und m (der Grad von $\chi(x)$) $\geqq \frac{n-2}{2}$, so ist $\varrho(x)$ wiederum von x unabhängig. In beiden Fällen also verwandelt sich die Gleichung (1.) in

$$(1^a.)\quad \Pi(x) = \varrho_0\left[\frac{d\log\chi(x)}{dx}\varphi(x,u)+\frac{1}{2}\varphi'(x,u)-(n-1)\psi(x)\right],$$

wo ϱ_0 von x unabhängig.

(*B.*) Ist n gerade und $m < \frac{n-2}{2}$, so setze man nach No. 16

$$(2.) \quad \begin{cases} \varrho(x) = (x-u)\varrho_1(x) & \text{und} \\ \Pi(x) = (x-u)\Pi_1(x), \end{cases}$$

wo

$$(3.) \quad \Pi_1(x) = \varrho_1'(x)\varphi(x,u) + \varrho_1(x)\left[\frac{d\log\chi(x)}{dx}\varphi(x,u) + \tfrac{1}{2}\varphi'(x,u) - (n-2)\psi(x)\right].$$

Es sei

$$(4.) \quad \begin{cases} \varrho_1(x) = \varepsilon_0 x^\nu + \varepsilon_1 x^{\nu-1} + \cdots + \varepsilon_\nu, \\ \dfrac{d\log\chi(x)}{dx}\varphi(x,u) + \tfrac{1}{2}\varphi'(x,u) - (n-2)\psi(x) = \gamma_0 x^{n-1} + \gamma_1 x^{n-2} + \cdots + \gamma_{n-1}, \\ \Pi_1(x) = \sum_1^{\nu+n} {}_\mathfrak{a} C_\mathfrak{a} x^{n+\nu-\mathfrak{a}}, \end{cases}$$

so ist für $\mathfrak{a} < n$ und $\mathfrak{a} < \nu$

$$(5.) \quad C_\mathfrak{a} = \sum_0^{\mathfrak{a}-1} {}_\mathfrak{b}[\gamma_\mathfrak{b} + (\nu - \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + 1)A_\mathfrak{b}]\varepsilon_{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-1}.$$

Insbesondere ist $\gamma_0 = \left\{m - \left(\frac{n-4}{2}\right)\right\}A_0$, also

$$(6.) \quad C_1 = (\gamma_0 + \nu A_0)\varepsilon_0 = \left[\nu + m - \frac{n-4}{2}\right]A_0\varepsilon_0.$$

In unserem Falle geht die Gleichung (5.) in No. 16, wenn man

$$(7.) \quad G(x) = (x-u)G_1(x)$$

setzt, in

$$(8.) \quad G_1(x) = \Pi_1(x)$$

über. Da aber $G_1(x)$ vom Grade $n-2$, so darf der Grad von $\Pi_1(x)$ nicht höher als $n-2$ sein, demnach muss sein

$$\nu + m - \frac{n-4}{2} = 0,$$

oder wenn man $\frac{n-2}{2} - m$ gleich δ setzt,

$$(9.) \quad \nu = \delta - 1.$$

Nun bestimme man die Coefficienten ε durch folgende Gleichungen

$$(10.) \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \quad \ldots \quad C_\delta = 0.$$

Da in diesen Gleichungen die Coefficienten von $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{\delta-1}$ resp. $-A_0$, $-2A_0, \ldots -(\delta-1)A_0$ sind, so werden durch dieselben $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{\delta-1}$ homogen durch ε_0 ausgedrückt. Es wird hierdurch $\Pi_1(x)$ vom Grade $n-2$, wie

es sein muss. Die Gleichung (8.) ergiebt alsdann

$$(11.) \qquad 1.2.3\ldots(i-2)\,.\,\sigma_{n-i}\beta_{n-i} = \Pi_1^{(i-2)}(u)$$

für $i = 2, 3, \ldots n$, (s. Gl. (12.) No. 16), da β_{n-1} verschwindet.

19.

Ist z. B. n ungerade und $\chi(x) = 1$, so geht die Gleichung (1^a.) voriger Nummer über in:

$$(1.) \qquad \Pi(x) = \varrho_0\left[\tfrac{1}{2}\varphi'(x,u) - (n-1)\,\psi(x)\right].$$

Nun ist

$$\varphi^{(\mathfrak{a})}(x,u) = \frac{\partial^{\mathfrak{a}}\varphi(x,u)}{\partial x^{\mathfrak{a}}} = (x-u)\,\frac{d^{\mathfrak{a}}\psi(x)}{dx^{\mathfrak{a}}} + \mathfrak{a}\,\frac{d^{\mathfrak{a}-1}\psi(x)}{dx^{\mathfrak{a}-1}} = (x-u)\,\psi^{(\mathfrak{a})}(x) + \mathfrak{a}\psi^{(\mathfrak{a}-1)}(x),$$

demnach

$$(2.) \qquad \Pi^{(i-1)}(u) = \frac{i-2n+2}{2}\,\psi^{(i-1)}(u)\,.\,\varrho_0,$$

also, wenn man setzt:

$$(3.) \qquad \frac{i-2n+2}{2\sigma_{n-i}.1.2\ldots(i-1)} = \tau_{n-i},$$

nach Gleichung (12.) No. 16

$$(4.) \qquad \beta_{n-i} = \tau_{n-i}\psi^{(i-1)}(u)\,.\,\varrho_0.$$

Für das *elliptische* Integral ist n gleich 3 zu setzen und

$$(5.) \qquad \psi(x) = x(x-1).$$

Aus Gleichung (4.) folgt

$$(6.) \qquad \beta_2 = -2u(u-1)\,\varrho_0, \quad \beta_1 = -2\,(2u-1)\,\varrho_0, \quad \beta_0 = -\tfrac{1}{2}\,\varrho_0.$$

Daher ist die Differentialgleichung, welcher die Periodicitätsmoduln genügen:

$$(7.) \qquad 2u(u-1)\,\frac{d^2\eta}{du^2} + 2\,(2u-1)\,\frac{d\eta}{du} + \tfrac{1}{2}\eta = 0.$$

Setzt man $u = \frac{1}{x^2}$ und $\eta = x\zeta$, so verwandelt sich die Gleichung (7.) in die von *Legendre* gefundene Differentialgleichung:

$$(7^a.) \qquad x(1-x^2)\,\frac{d^2\zeta}{dx^2} + (1-3x^2)\,\frac{d\zeta}{dx} - x\zeta = 0.$$

Für die hyperelliptischen Integrale erster Gattung ist $n = 5$, und

$$(8.) \qquad \psi(x) = x(1-x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x).$$

Aus Gleichung (4.) ergiebt sich

$$(9.) \qquad \begin{cases} \beta_4 = -\tfrac{8}{15}\,\psi(u)\,\varrho_0, \quad \beta_3 = -\tfrac{8}{3}\,\psi'(u)\,\varrho_0, \quad \beta_2 = -\tfrac{5}{3}\,\psi^{(2)}(u)\,\varrho_0, \\ \beta_1 = -\tfrac{2}{3}\,\psi^{(3)}(u)\,\varrho_0, \quad \beta_0 = -\tfrac{1}{16}\,\psi^{(4)}(u). \end{cases}$$

Daher ist die Differentialgleichung der Periodicitätsmoduln:

$$(10.)\quad \psi(u)\frac{d^4\eta}{du^4}+3\psi'(u)\frac{d^3\eta}{du^3}+\tfrac{2}{8}\tfrac{5}{}\psi^{(2)}(u)\frac{d^2\eta}{du^2}+\tfrac{5}{4}\psi^{(3)}(u)\frac{d\eta}{du}+\tfrac{1}{1}\tfrac{5}{2}\tfrac{5}{8}\psi^{(4)}(u)\eta=0.$$

Transformirt man diese Differentialgleichung durch die Substitution $u=\frac{1}{z^2}$, $\eta=z\zeta$, so erhält man eine Differentialgleichung für ζ, die mit derjenigen übereinstimmt, die sich als Resultat der Elimination ergeben würde eines Systems von vier gleichzeitigen Differentialgleichungen, welches mein Freund *Koenigsberger* in den Mathematischen Annalen von *Clebsch* und *Neumann* Bd. 1, Heft 2 veröffentlicht hat.

20.

Es werden jetzt die allgemeineren Voraussetzungen der No. 16 wieder aufgenommen. Die Ordnung der Differentialgleichung der Periodicitätsmoduln wird niedriger als die $(n-1)^{\text{te}}$, wenn $\Pi(x)$ durch eine Potenz von $x-u$ theilbar ist. — Es sei daher

$$(1.)\qquad \Pi(x)=(x-u)^{\lambda}\Pi_2(x),$$

wo $\Pi_2(x)$ für $x=u$ nicht mehr verschwindet, so ist auch

$$(2.)\qquad r(x)=\varrho_2(x)(x-u)^{\lambda},$$

wo $\varrho_2(x)$ für $x=u$ nicht mehr verschwindet. Dieses ergiebt sich ähnlich wie in No. 17 für eine Potenz von $x-k$. Es ist alsdann nach No. 16 Gl. (11.) und No. 17 Gl. (1.)

$$(3.)\qquad \Pi_2(x)=\frac{\varrho_2'(x)\varphi(x,u)+\varrho_2(x)[\frac{1}{2}\varphi'(u,x)-(n-\lambda-1)\psi(x)]}{f(x)}.$$

Nach Gl. (12.) in No. 16 ist daher

$$(4.)\qquad \beta_{n-1}=\beta_{n-2}=\cdots=\beta_{n-\lambda}=0,$$

während $\beta_{n-\lambda-1}$ von Null verschieden ist. Setzen wir zur Abkürzung

$$n-\lambda-1=p,$$

so ist die Differentialgleichung der Periodicitätsmoduln:

$$(5.)\qquad \beta_p\frac{d^p\eta}{du^p}+\beta_{p-1}\frac{d^{p-1}\eta}{du^{p-1}}+\cdots+\beta_0\eta=0,$$

wo nach Gleichung (12.) in No. 16

$$1.2.3\ldots(i+\lambda).\sigma_{p-i}\beta_{p-i}=\Pi^{(i+\lambda)}(u)=\frac{(i+\lambda)(i+\lambda-1)\ldots(i+1)}{1.2.3\ldots\lambda}\cdot\Pi_2^{(i)}(u).1.2\ldots\lambda,$$

also

$$(6.) \qquad \sigma_{p-i}.1.2.3\ldots i.\beta_{p-i} = \Pi_2^{(i)}(u)$$

$i = 1, 2, \ldots p$ und

$$(6^a.) \qquad \beta_p.\sigma_p = \Pi_2(u).$$

Die Grössen β sind, abgesehen von einem gemeinsamen Factor, ganze rationale Functionen von u, demnach sind die Quotienten $\frac{\beta_{p-1}}{\beta_p}, \frac{\beta_{p-2}}{\beta_p}, \ldots \frac{\beta_0}{\beta_p}$ nur für diejenigen Werthe von u unendlich, für welche β_p verschwindet, d. h. die singulären Punkte der Differentialgleichung (5.) sind *sämmtlich* Wurzeln der Gleichung $\Pi_2(u) = 0$. Die unter ihnen befindlichen wesentlich singulären Punkte sind $k_1, k_2, \ldots k_{n-1}$. Aus Gleichung (6^a.) und (3.) folgt:

$$(7.) \qquad \sigma_p.\beta_p = -\frac{(2n-2\lambda-3)}{2}\frac{\psi(u)\varrho_2(u)}{f(u)}.$$

Ist k eine der Grössen $k_1, k_2, \ldots k_{n-1}$ und $f(x)$ genau durch $(x-k)^\tau$ theilbar, so ist (nach No. 17) $r(x)$, folglich auch $\varrho_2(x)$ genau durch $(x-k)^\tau$ theilbar. Im Allgemeinen wird alsdann $\frac{\varrho_2(u)}{f(u)}$ für $u = k$ nicht mehr verschwinden, und *so lange dieses stattfindet*, jeder der Ausdrücke $\frac{\beta_{p-1}}{\beta_p}(u-k)$ für $u = k$ nicht unendlich sein.

Nun ist:

$$(8.) \qquad \frac{\beta_{p-1}}{\beta_p} = \frac{\sigma_p}{\sigma_{p-1}}\frac{\Pi_2^{(1)}(u)}{\Pi_2(u)} = \frac{\sigma_p}{\sigma_{p-1}}\left[\frac{2n-2\lambda-5}{2n-2\lambda-3}\frac{\varrho_2'(u)}{\varrho_2(u)} + \frac{2n-2\lambda-4}{2n-2\lambda-3}\frac{\psi'(u)}{\psi(u)} - \frac{f'(u)}{f(u)}\right].$$

Es ist

$$(9.) \qquad \begin{cases} \lim \frac{f'(u)}{f(u)}(u-k) = \tau \text{ für } u = k, \\ \text{und so lange } \frac{\varrho_2(u)}{f(u)} \text{ für } u = k \text{ nicht verschwindet,} \\ \lim \frac{\varrho_2'(u)}{\varrho_2(u)}(u-k) = \tau \text{ für } u = k, \\ \text{endlich} \\ \lim \frac{\psi'(u)}{\psi(u)}(u-k) = 1 \text{ für } u = k, \end{cases}$$

folglich nach Gleichung (8.)

$$(10.) \qquad \lim \frac{\beta_{p-1}}{\beta_p}(u-k) = \frac{2p-2\tau-2}{2p-1}\frac{\sigma_p}{\sigma_{p-1}} = \frac{2p-2\tau-2}{2} = p-\tau-1.$$

Da ferner

$$\lim \frac{\beta_{p-i}}{\beta_p}(u-k)^2 = 0 \text{ für } u = k, \quad i = 1, 2, \ldots p,$$

so ist die zum singulären Punkte k zugehörige determinirende Fundamentalgleichung (s. No. 13 Gl. (2.))

$$r(r-1)(r-2)\dots(r-p+1)+(p-\tau-1)r(r-1)\dots(r-p+2) = 0$$

oder

$$(11.) \qquad r(r-1)(r-2)\dots(r-p+2)(r-\tau) = 0.$$

Die Wurzeln derselben sind $0, 1, 2, \dots p-2, \tau$, und bilden demnach eine einzige Gruppe.

Die zu derselben (A. B. 68 No. 4 und No. 7) gehörige Integralgruppe, welche mit $v_1, v_2, \dots v_p$ bezeichnet werden möge, bildet ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (5.). In No. 14 ist gezeigt worden, wie man die Periodicitätsmoduln durch dasselbe in der Umgebung von $u=k$ darstellen kann. Ebenso haben wir dort angeführt, wie die Darstellung der Periodicitätsmoduln in der Umgebung von $u=\infty$ vorzunehmen ist.

21.

Zum Schluss wollen wir für den Fall des elliptischen Integrals $z=\int \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-u)}}$ die Integralgruppen, welche den zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen entsprechen, und die Darstellung der Periodicitätsmoduln durch dieselben geben.

Die Differentialgleichung der Periodicitätsmoduln ist (Gl. (7.) No. 19)

$$(1.) \qquad 2u(u-1)\frac{d^2\eta}{du^2}+2(2u-1)\frac{d\eta}{du}+\tfrac{1}{2}\eta = 0.$$

Die beiden singulären Punkte derselben, die zugleich wesentlich sind, sind $u=0$ und $u=1$.

Für beide ist die determinirende Fundamentalgleichung (Gl. (11.) No. 20, wo $p=n-1=2$ und $\tau=0$ zu setzen ist)

$$(2.) \qquad r^2 = 0.$$

1) Die Darstellung für den singulären Punkt $u=0$.

Setzt man in die Differentialgleichung (1.)

$$\eta = \sum_0^\infty{}_\alpha c_\alpha u^\alpha,$$

so ergiebt sich die Relation:

$$(3.) \qquad (\alpha+1)^2 c_{\alpha+1} = (\alpha+\tfrac{1}{2})^2 c_\alpha$$

und hieraus (nach A. B. 66 No. 5 oder B. 68 No. 4 und 7) das Integral

$$(4.) \qquad v_{01} = 1 + \sum_{1}^{\infty}{}_{\mathfrak{b}} \left(\frac{1.3.5 \ldots (2\mathfrak{b}-1)}{2.4.6 \ldots 2\mathfrak{b}} \right)^2 u^{\mathfrak{b}}.$$

Substituirt man in die Differentialgleichung (1.)

$$(5.) \qquad \eta = v_{01} \int \zeta_0 \, du,$$

so ergiebt sich

$$(6.) \qquad \zeta_0 = \frac{C}{u(u-1)v_{01}^2} = -\frac{C}{u} + C.G_0(u),$$

wo

$$G_0(u) = \frac{1 + v_{01}^2 (u-1)}{v_{01}^2 \, u(u-1)}$$

in der Umgebung von $u=0$ eindeutig, endlich und continuirlich, also in eine Reihe mit ganzen positiven Potenzen von u entwickelbar ist.

Aus Gleichung (5.) und (6.) ergiebt sich das particuläre Integral der Differentialgleichung (1.)

$$(7.) \qquad v_{02} = H_0(u) . v_{01} - v_{01} \log u,$$

wo

$$H_0(u) = 4 \log 2 + \int_0^u G_0(u) \, du$$

gesetzt ist, also eine in der Umgebung $u=0$ eindeutige, endliche und continuirliche Function darstellt. Nach A. B. 66 No. 2 bilden v_{01} und v_{02} ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (1.). —

Sind unter Beibehaltung der Bezeichnungen der No. 7 die beiden Periodicitätsmoduln

$$(8.) \qquad \eta_1 = (u, 0), \quad \eta_2 = (0, 1),$$

so setze man also (vergl. No. 14)

$$(9.) \qquad \begin{cases} \eta_1 = c_{11} v_{01} + c_{12} v_{02}, \\ \eta_2 = c_{21} v_{01} + c_{22} v_{02}. \end{cases}$$

Es ist alsdann nach Gleichung (4.) und (7.)

$$(10.) \qquad \begin{cases} \eta_1' = (u, 0)' = (c_{11} - c_{12} . 2\pi i) \, v_{01} + c_{12} v_{02}, \\ \eta_2' = (0, 1)' = (c_{21} - c_{22} . 2\pi i) \, v_{01} + c_{22} v_{02}. \end{cases}$$

Es ist aber nach Gleichung (4.) und (4^a.) in No. 7

$$(11.) \qquad \begin{cases} (u, 0)' = (u, 0) = c_{11} v_{01} + c_{12} v_{02}, \\ (0, 1)' = 2(u, 0) + (0, 1) = (2c_{11} + c_{21}) v_{01} + (2c_{12} + c_{22}) v_{02}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (10.) und (11.) ergiebt sich durch Vergleichung der Coefficienten von v_{01} und v_{02}

$$c_{12} = 0, \qquad c_{22} = -\frac{1}{\pi i} c_{11}.$$

Demnach ist

$$(12.) \qquad \begin{cases} \eta_1 = c_{11} v_{01}, \\ \eta_2 = c_{21} v_{01} - \dfrac{1}{\pi i} c_{11} v_{02}. \end{cases}$$

Um c_{11} und c_{21} zu bestimmen, erwäge man, dass

$$(13.) \qquad \begin{cases} \eta_1 = \displaystyle\int_u^0 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-u)}}, \\ \eta_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-u)}}. \end{cases}$$

Durch die Substitution $x = u\omega$ erhält man

$$\eta_1 = \int_1^0 \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(\omega-1)(u\omega-1)}},$$

also für $u = 0$,

$$\eta_1 = \int_1^0 \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(1-\omega)}} = -\pi.$$

Da nun v_{01} für $u = 0$ gleich Eins wird, so ergiebt die Gleichung (12.)

$$(14.) \qquad c_{11} = -\pi.$$

Ferner ist

$$\eta_2 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-u)}} = A_0 + B_0,$$

wo

$$A_0 = \int_0^1 \frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x(x-1)(x-u)}} dx, \qquad B_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(u-x)}}.$$

Es ist aber

$$B_0 = \frac{2}{i} \log[\sqrt{u-1} + i] + i \log u$$

und für $u = 0$

$$A_0 = \frac{2}{i} \log 2.$$

Es ist demnach $\eta_2 - i \log u$ für $u = 0$ endlich und gleich $\frac{4}{i} \log 2 + \pi$. Setzt man für η_2 den Werth aus Gleichung (12.) mit Rücksicht auf Gleichung (7.) und (14.), so folgt

$$\eta_2 - i \log u = c_{21} v_{01} - i v_{02} - i \log u = c_{21} v_{01} - i H_0(u) v_{01} + i v_{01} \log u - i \log u.$$

Letzterer Ausdruck wird für $u=0$ gleich $c_{21}-iH_0(0)=c_{21}-4i\log 2$. Hieraus folgt, dass $c_{21}=\pi$, so dass die Gleichungen (12.) übergehen in:

$$(15.)\qquad \begin{cases} \eta_1 = -\pi v_{01}, \\ \eta_2 = \pi v_{01} - i v_{02}. \end{cases}$$

2) Die Darstellung für den singulären Punkt $u=1$.

Man findet auf ähnliche Weise wie im vorigen Falle ein Fundamentalsystem v_{11}, v_{12}:

$$(16.)\qquad v_{11} = 1+\sum_1^\infty{}_{\mathfrak{b}}(-1)^{\mathfrak{b}}\left(\frac{1.3.5\ldots 2\mathfrak{b}-1}{2.4.6\ldots 2\mathfrak{b}}\right)^2\cdot(u-1)^{\mathfrak{b}},$$

$$v_{12} = H_1(u)v_{11}+v_{11}\log(u-1),$$

wo

$$H_1(u) = -4\log 2+\int_1^u \frac{1-v_{11}^2 u}{u(u-1)v_{11}^2}\,du$$

eine in der Umgebung von $u=1$ eindeutige, endliche und continuirliche Function ist. Setzt man

$$(17.)\qquad \begin{cases} \eta_1 = d_{11}v_{11}+d_{12}v_{12}, \\ \eta_2 = d_{21}v_{11}+d_{22}v_{12}, \end{cases}$$

so folgt aus den Gleichungen (16.), dass nach einem Umlaufe um $u=1$

$$(18.)\qquad \begin{cases} \eta_1' = (u,0)' = (d_{11}+2\pi i d_{12})v_{11}+d_{12}v_{12}, \\ \eta_2' = (0,1)' = (d_{21}+2\pi i d_{22})v_{11}+d_{22}v_{12}. \end{cases}$$

Andererseits ist nach No. 7 Gleichung (3.) und (3^b.)

$$(19.)\qquad \begin{cases} (u,0)' = -(u,0)-2(0,1) = -(d_{11}+2d_{21})v_{11}-(d_{12}+2d_{22})v_{12}, \\ (0,1)' = 2(u,0)+3(0,1) = (2d_{11}+3d_{21})v_{11}+(2d_{12}+3d_{22})v_{22}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (18.) und (19.) folgt:

$$(20.)\qquad \begin{cases} d_{22} = -d_{12}, \\ d_{21} = -d_{11}-\pi i d_{12}. \end{cases}$$

Es ist ferner

$$\eta_1 = \int_u^0 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-u)}} = A_1+B_1,$$

wo

$$A_1 = \int_u^0 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x-1)(x-u)}}\,dx, \qquad B_1 = \int_u^0 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-u)}}.$$

Man findet aber

$$B_1 = \pi i-2\log(\sqrt{u}+1)+\log(u-1)$$

und für $u=1$

$$A_1 = -2\log 2.$$

Demnach ist $\eta_1 - \log(u-1)$ für $u=1$ gleich $\pi i - 4\log 2$. Andererseits ist

$$\eta_1 - \log(u-1) = d_{11}v_{11} + d_{12}H_1(u)v_{11} + d_{12}v_{11}\log(u-1) - \log(u-1);$$

es folgt mithin, da v_{11} für $u=1$ gleich Eins wird,

$$(21.) \qquad d_{12} = 1,$$

$d_{11} + H_1(0) = d_{11} - 4\log 2 = \pi i - 4\log 2$, also

$$(22.) \qquad d_{11} = \pi i.$$

Es ist also nach den Gleichungen (17.), (20.), (21.), (22.)

$$(23.) \qquad \begin{cases} \eta_1 = \pi i v_{11} + v_{12}, \\ \eta_2 = -2\pi i v_{11} - v_{12}. \end{cases}$$

3) Die Darstellung in der Umgebung von $u=\infty$.

Man substituire in die Differentialgleichung (1.)

$$u = \frac{1}{t},$$

so erhält man

$$(24.) \qquad 2t^2(1-t)\frac{d^2\eta}{dt^2} - 2t^2\frac{d\eta}{dt} + \tfrac{1}{2}\eta = 0.$$

Die zu $t=0$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung ist:

$$r(r-1) + \tfrac{1}{4} = 0$$

oder

$$(25.) \qquad (r-\tfrac{1}{2})^2 = 0.$$

Setzt man in die Differentialgleichung

$$\eta = t^{\frac{1}{2}}\sum_0^\infty{}_\alpha e_\alpha t^\alpha,$$

so ergiebt sich

$$(26.) \qquad e_{\alpha+1} = \left(\frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}\right)^2 e_\alpha.$$

Hieraus ergiebt sich (A. B. 66 No. 5) das Integral $v_{\infty 1}$ der Differentialgleichung (1.)

$$(27.) \qquad v_{\infty 1} = \left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1 + \sum_1^\infty{}_\alpha\left(\frac{1.3.5\ldots 2\alpha-1}{2.4.6\ldots 2\alpha}\right)^2\left(\frac{1}{u}\right)^\alpha\right].$$

Substituirt man in die Differentialgleichung (24.)

$$\eta = v_{\infty 1}\int \zeta\, dt,$$

wo in $v_{\infty 1}$ in Gleichung (27.) $\frac{1}{u}$ durch t ersetzt ist, so findet sich

$$(28.) \qquad \zeta = \frac{C}{v_{\infty 1}^2(1-t)},$$

wo C von t unabhängig ist. — Setzt man

$$H_\infty(u) = -4\log 2 + \int_0^t \frac{t + v_{\infty 1}^2 (t-1)}{v_{\infty 1}^2 (1-t).t}\, dt,$$

so ist $H_\infty(u)$ eine in der Umgebung von $t=0$, d. h von $u=\infty$ eindeutige, continuirliche und endliche Function, und es ergiebt sich als ein zweites particuläres Integral der Differentialgleichung (1.)

$$(29.) \qquad v_{\infty 2} = v_{\infty 1} H_\infty(u) - v_{\infty 1} \log u.$$

Da $v_{\infty 1}$ und $v_{\infty 2}$ ein Fundamentalsystem bilden, so setze man

$$(30.) \qquad \begin{cases} \eta_1 = e_{11} v_{\infty 1} + e_{12} v_{\infty 2}, \\ \eta_2 = e_{21} v_{\infty 1} + e_{22} v_{\infty 2}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (27.) und (29.) folgt, dass nach einem Umlaufe von u um ∞

$$(31.) \qquad \begin{cases} \eta_1' = -(e_{11} + e_{12}.2\pi i) v_{\infty 1} - e_{12} v_{\infty 2}, \\ \eta_2' = -(e_{21} + e_{22}.2\pi i) v_{\infty 1} - e_{22} v_{\infty 2}. \end{cases}$$

Andererseits folgt aus No. 7 Gl. (5^a.) und (6.)

$$(32.) \qquad \begin{cases} \eta_1' = 2\eta_2 - \eta_1 = (-e_{11} + 2e_{21}) v_{\infty 1} + (-e_{12} + 2e_{22}) v_{\infty 2}, \\ \eta_2' = -\eta_2 \qquad = -e_{21} v_{\infty 1} - e_{22} v_{\infty 2}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (31.) und (32.) ergiebt sich

$$(33.) \qquad \begin{cases} e_{22} = 0, \\ e_{21} = -\pi i\, e_{12}. \end{cases}$$

Nun ist

$$\eta_1 = \int_u^0 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-u)}} = t^{\frac{1}{2}} \int_1^0 \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(\omega-1)(\omega-t)}},$$

wie sich aus den Substitutionen $x = \omega u$ und $u = \frac{1}{t}$ ergiebt.

Setzt man

$$\int_1^0 \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(\omega-1)(\omega-t)}} = A_\infty + B_\infty,$$

wo

$$A_\infty = \int_1^0 \frac{1-\sqrt{1-\omega}}{\sqrt{\omega(\omega-1)(\omega-t)}}\, d\omega, \qquad B_\infty = \int_1^0 \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(t-\omega)}},$$

so ergiebt sich

$$B_\infty = 2i \log[\sqrt{t-1} + i] - i \log t,$$

und für $t=0$

$$A_\infty = 2i \log 2.$$

Es ist demnach $\eta_1 t^{-\frac{1}{2}} + i \log t$ für $t=0$ gleich $-\pi + 4i \log 2$.

Andererseits ist nach den Gleichungen (29.) und (30.)

$$\eta_1 t^{-\frac{1}{2}} + i \log t = [e_{11} + e_{12} H_\infty(u)] v_{\infty 1} . t^{-\frac{1}{2}} - e_{12} t^{-\frac{1}{2}} . v_{\infty 1} \log(u) + i \log t,$$

also ist

$$(34.) \qquad e_{12} = -i,$$

und für $t = 0$

$$\eta_1 t^{-\frac{1}{2}} + i \log t = e_{11} - i H_\infty(\infty) = e_{11} + 4i \log 2,$$

also

$$(35.) \qquad e_{11} = -\pi.$$

Aus den Gleichungen (30.), (33.), (34.), (35.) folgt:

$$(36.) \qquad \begin{cases} \eta_1 = -\pi v_{\infty 1} - i v_{\infty 2}, \\ \eta_2 = -\pi v_{\infty 1}. \end{cases}$$

Wir bemerken noch, da die Substitutionen

$$u = \frac{1}{k^2}, \quad x = z^2$$

das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-u)}}$ in $2k \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$ überführt, so ist, wenn

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad K'i = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

gesetzt wird,

$$(37.) \qquad K = -\frac{1}{2k} \eta_2 = \frac{\pi}{2k} v_{\infty 1},$$

$$K'i = \frac{1}{2k}(\eta_1 - \eta_2) = -\frac{i}{2k} v_{\infty 2},$$

also

$$(38.) \qquad K' = -\frac{1}{2k} v_{\infty 2}.$$

Die beiden letzteren Formeln enthalten die bekannten Reihenentwickelungen für K und K'.

Greifswald, den 10. Juli 1869.

Ueber eine rationale Verbindung der Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale.

(Von Herrn *L. Fuchs* in Greifswald.)

Die von *Legendre* entdeckte Relation zwischen den Periodicitätsmoduln der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung (Traité des fonct. ell. T. I, ch. XII) besagt, dass eine gewisse rationale Verbindung derselben den Werth $\frac{\pi}{2}$ hat. Von diesem Werthe abgesehen, lehrt die *Legendre*sche Relation, dass diese Verbindung von dem Modul unabhängig ist. — Stellt man sich nun allgemein die Aufgabe, solche rationale Verbindungen der Periodicitätsmoduln der zur Gleichung $s^2 = \varphi(x)$ gehörigen hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung zu bestimmen, die von den Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ unabhängig sind, so lässt die *Legendre*sche Relation Verallgemeinerungen verschiedener Art zu. Es giebt aber unter diesen nur eine, welche den besonderen Zweck erfüllt, für die Darstellung der hyperelliptischen Functionen genau dieselbe Anwendung zu erlauben, wie die *Legendre*sche bei den elliptischen Functionen, nämlich das von Herrn *Weierstrass* für die Integrale n^{ter} Ordnung aufgestellte System von $2n^2 - n$ Relationen (Programm des Braunsberger Gymnasiums Jahr 1848—49, und Bd. 47, pag. 302 dieses Journals). Sieht man aber von diesem Zwecke ab, so ist auch die von *Haedenkamp* (Bd. 22, p. 148 ff. dieses Journals) nach Andeutungen *Jacobi*s entwickelte Relation bemerkenswerth, besonders wenn man die dabei auftretende Verbindung der Periodicitätsmoduln in Form einer Determinante darstellt. Allein die Entwickelung von *Haedenkamp* leidet, abgesehen von einigen darin enthaltenen Irrthümern, an dem Mangel, dass sie nicht für complexe Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ und für complexe Integrationswege gültig bleibt. — Bei meinen Untersuchungen über die Differentialgleichungen, welchen die Periodicitätsmoduln der *Abel*schen Integrale genügen, bin ich naturgemäss zur Aufsuchung solcher Verbindungen der Periodicitätsmoduln geführt worden, deren Werth von den Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ unabhängig ist, und habe dabei unter anderem einen Determinantenausdruck erhalten, welchen ich im Wesentlichen mit dem in der *Haedenkamp*schen Abhandlung pag. 187 Gleichung (10.) befindlichen vielfachen

Integral übereinstimmend fand. Ich glaube, dass die betreffenden Entwickelungen nicht bloss deshalb von Interesse sind, weil sie zu der angegebenen Relation ohne jede Beschränkung führen und eine bemerkenswerthe Anwendung dieser Differentialgleichungen enthalten, sondern auch weil dadurch diese sonst vereinzelt dastehende Relation mit der Theorie der Periodicitätsmoduln in Verbindung gebracht und der obige Gesichtspunkt für die Verallgemeinerung der *Legendre*schen Relation erläutert wird.

1.

Es sei

$$\varphi(x) = (x-u)(x-k_1)(x-k_2)\dots(x-k_{n-1}),$$

wo $k_1, k_2, \dots k_{n-1}$ von u unabhängige und von einander verschiedene Grössen sind, und es werde

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x-u}$$

und

$$y = \frac{\psi(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}$$

gesetzt. Die Periodicitätsmoduln des Integrals $\int y\,dx$ seien wie in No. 2 der vorangehenden Abhandlung definirt, und zwar werden die zwischen den Grenzen u und k_1, k_1 und k_2, k_2 und k_3, $\dots$ k_{n-2} und k_{n-1} genommenen Integrale resp. mit $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_{n-1}$ bezeichnet.

Die Differentialgleichung, welcher dieselben als Functionen von u genügen, sei

$$(1.) \qquad \beta_{n-1}\frac{d^{n-1}\eta}{du^{n-1}} + \beta_{n-2}\frac{d^{n-2}\eta}{du^{n-2}} + \dots + \beta_0\eta = 0,$$

so ist, wenn man setzt:

$$(2.) \qquad \Pi(x) = \tfrac{1}{2}\varrho[3(x-u)\psi'(x) - (2n-3)\psi(x)],$$

wo mit ϱ eine von x unabhängige Grösse und mit $\psi'(x)$ die Ableitung von $\psi(x)$ nach x bezeichnet ist, und

$$(3.) \qquad \sigma_\lambda = \frac{1.3.5\dots 2\lambda-1}{2^\lambda},$$

nach No. 18 Gl. (1^a.) und No. 16 Gl. (12.) der vorangehenden Abhandlung

$$(4.) \qquad \begin{cases} \sigma_{n-1}\beta_{n-1} = \Pi(u), \\ 1.2.3\dots(i-1)\,\sigma_{n-i}\beta_{n-i} = \Pi^{(i-1)}(u) \quad \text{für} \quad i = 2, 3, \dots n, \end{cases}$$

wo $\Pi^{(i-1)}(x)$ die $(i-1)^{\text{te}}$ Ableitung von $\Pi(x)$ nach x ist. Diese Gleichungen geben:

$$(5.)\quad \begin{cases} \sigma_{n-1}\beta_{n-1} = -\dfrac{2n-3}{2}\psi(u).\varrho, \\ \sigma_{n-2}\beta_{n-2} = -\dfrac{2n-6}{2}\psi'(u).\varrho, \\ 1.2.\sigma_{n-3}\beta_{n-3} = -\dfrac{2n-9}{2}\psi^{(2)}(u).\varrho, \\ \vdots \\ 1.2\ldots(n-1)\sigma_0\beta_0 = -\dfrac{2n-3n}{2}\psi^{(n-1)}(u).\varrho, \end{cases}$$

wo die Ableitungen von $\psi(x)$ durch obere Indices angedeutet sind.

Setzt man

$$\frac{d^\lambda \eta_a}{du^\lambda} = \eta_a^{(\lambda)}$$

und die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \eta_1^{(n-2)} & \eta_1^{(n-3)} & \ldots & \eta_1 \\ \eta_2^{(n-2)} & \eta_2^{(n-3)} & \ldots & \eta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \eta_{n-1}^{(n-2)} & \eta_{n-1}^{(n-3)} & \ldots & \eta_{n-1} \end{vmatrix} = \Delta,$$

so ist, da die Differentialgleichung für die Perioden in unserem Falle nicht niedrigerer Ordnung als der $(n-1)^{\text{ten}}$ sein kann (s. d. vor. Abh. No. 15 u. 18), Δ von Null verschieden, daher führt die Gleichung

$$\frac{d\log\Delta}{du} = -\frac{\beta_{n-2}}{\beta_{n-1}}$$

nach den Gleichungen (5.) zu der folgenden:

$$(6.)\quad \Delta = \frac{C}{\psi(u)^{n-3}},$$

wo C eine von Null verschiedene von u unabhängige Grösse ist. —

2.

Es ist

$$(1.)\quad \frac{\partial^\lambda y}{\partial u^\lambda} = \sigma_\lambda (x-u)^{-\frac{2\lambda+1}{2}}\psi(x)^{\frac{1}{2}}.$$

Setzt man andererseits

$$(2.)\quad \frac{\partial^\lambda y}{\partial u^\lambda} = f_\lambda(x)\varphi(x)^{-\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial x}[r_\lambda(x)(x-u)^{-\frac{2\lambda-1}{2}}\psi(x)^{\frac{1}{2}}],$$

so lässt sich (s. d. vorangehende Abh. No. 11) $r_\lambda(x)$ als ganze rationale Function von x derart bestimmen, dass $f_\lambda(x)$ eine ganze rationale Function höchstens vom Grade $n-2$ wird. Aus Gleichung (1.) und (2.) folgt:

$$(3.)\quad \sigma_\lambda\psi(x) = f_\lambda(x)(x-u)^\lambda + r_\lambda'(x)\varphi(x) + \tfrac{1}{2}r_\lambda(x)[-(2\lambda-1)\psi(x) + (x-u)\psi'(x)],$$

wo

$$r'_\lambda(x) = \frac{\partial r_\lambda(x)}{\partial x}.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich leicht, dass $r_\lambda(x)$ höchstens vom Grade $\lambda-1$ ist. Es sei daher

$$(4.) \qquad r_\lambda(x) = \sum_0^{\lambda-1}{}_\alpha \gamma_{\lambda\alpha}(x-u)^\alpha,$$

so lassen sich die Coefficienten $\gamma_{\lambda\alpha}$ ohne Kenntniss der Function $f_\lambda(x)$ bestimmen, wenn man in die Gleichung (3.) und ihre $\lambda-1$ ersten Ableitungen $x=u$ substituirt. Insbesondere ist

$$(5.) \qquad \gamma_{\lambda 0} = -\frac{2\sigma_\lambda}{2\lambda-1}.$$

Ferner ergiebt die Vergleichung der Coefficienten der höchsten Potenz von x in der aus

$$(1^a.) \qquad y = f_0(x)\varphi(x)^{-\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial x}[r_0(x)\varphi(x)^{\frac{1}{2}}]$$

folgenden Gleichung

$$(3^a.) \qquad \psi(x) = f_0(x) + r'_0(x)\varphi(x) + \tfrac{1}{2} r_0(x)\varphi'(x):$$

$$(5^a.) \qquad r_0(x) = \frac{2}{n}.$$

Ist $r_\lambda(x)$ bestimmt, alsdann ergiebt sich aus den Gleichungen (3.) und $(3^a.)$

$$(6.) \qquad \frac{f_\lambda(k_\alpha)}{\psi'(k_\alpha)} = -\tfrac{1}{2}\frac{r_\lambda(k_\alpha)}{(k_\alpha-u)^{\lambda-1}}$$

für $\alpha = 1, 2, \ldots n-1$, wodurch $f_\lambda(x)$ ebenfalls bekannt ist. Für unseren Zweck ist jedoch die vollständige Bestimmung nicht nöthig.

3.

Bezeichnet man die zu den Integrationsgrenzen u und k_1, k_1 und k_2, k_2 und k_3, $\ldots$ k_{n-2} und k_{n-1} gehörigen Periodicitätsmoduln des Integrals $\int \frac{x^\alpha dx}{\sqrt{\varphi(x)}}$ resp. mit $\eta_{\alpha 1}, \eta_{\alpha 2}, \eta_{\alpha 3}, \ldots \eta_{\alpha\, n-1}$, und setzt

$$(1.) \qquad f_\lambda(x) = \sum_0^{n-2}{}_\beta f_{\lambda\beta} x^\beta,$$

so folgt aus den Gleichungen (1.) und $(1^a.)$ voriger Nummer nach der vorangehenden Abh. No. 4 und 8, dass für jedes λ:

$$(2.) \qquad \frac{d^\lambda \eta_{\alpha\beta}}{du^\lambda} = \sum_0^{n-2}{}_\alpha f_{\lambda\alpha}\eta_{\alpha\beta}$$

für $\beta = 1, 2, \ldots n-1$.

Setzt man daher die Determinante

$$\begin{vmatrix} f_{n-2\,0} & f_{n-2\,1} & \cdots & f_{n-2\,n-2} \\ f_{n-3\,0} & f_{n-3\,1} & \cdots & f_{n-3\,n-2} \\ \vdots & & & \\ f_{0\,0} & f_{0\,1} & \cdots & f_{0\,n-2} \end{vmatrix} = F$$

und die Determinante

$$\begin{vmatrix} \eta_{0\,1} & \eta_{0\,2} & \cdots & \eta_{0\,n-1} \\ \eta_{1\,1} & \eta_{1\,2} & \cdots & \eta_{1\,n-1} \\ \vdots & & & \\ \eta_{n-2\,1} & \eta_{n-2\,2} & \cdots & \eta_{n-2\,n-1} \end{vmatrix} = H,$$

so folgt aus Gleichung (2.):

$$(3.) \qquad \Delta = F.H.$$

Setzt man

$$(4.) \qquad \frac{\psi(x)}{x-k_a} = \psi_a(x) = \sum_0^{n-2} {}_b \psi_{ab} x^b,$$

so folgt aus der Gleichung:

$$f_\lambda(x) = \sum_1^{n-1} {}_a \frac{f_\lambda(k_a)}{\psi'(k_a)} \psi_a(x),$$

$$f_{\lambda b} = \sum_1^{n-1} {}_a \frac{f_\lambda(k_a)}{\psi'(k_a)} \psi_{ab}$$

oder nach Gleichung (6.) in voriger Nummer

$$(5.) \qquad f_{\lambda b} = -\tfrac{1}{2} \sum_1^{n-1} {}_a \frac{r_\lambda(k_a)}{(k_a-u)^{\lambda-1}} \psi_{ab}.$$

Bezeichnet man

$$\frac{r_\lambda(k_a)}{(k_a-u)^{\lambda-1}} \text{ mit } r_{\lambda a}$$

und die Determinante

$$\begin{vmatrix} r_{n-2\,1} & r_{n-2\,2} & \cdots & r_{n-2\,n-1} \\ r_{n-3\,1} & r_{n-3\,2} & \cdots & r_{n-3\,n-1} \\ \vdots & & & \\ r_{0\,1} & r_{0\,2} & \cdots & r_{0\,n-1} \end{vmatrix} \text{ mit } R,$$

die Determinante

$$\begin{vmatrix} \psi_{1\,0} & \psi_{1\,1} & \cdots & \psi_{1\,n-2} \\ \psi_{2\,0} & \psi_{2\,1} & \cdots & \psi_{2\,n-2} \\ \vdots & & & \\ \psi_{n-1\,0} & \psi_{n-1\,1} & \cdots & \psi_{n-1\,n-2} \end{vmatrix} \text{ mit } \Psi,$$

so ergiebt die Gleichung (5.):

$$(6.) \qquad F = (-\tfrac{1}{2})^{n-1} R . \Psi .$$

Setzt man

$$\frac{\gamma_{\lambda 0}}{(k_\alpha - u)^{\lambda-1}} = \gamma_\lambda^{(\alpha)},$$

so liefert eine einfache Transformation die Gleichung

$$R = \begin{vmatrix} \gamma_{n-2}^{(1)} & \gamma_{n-2}^{(2)} & \cdots & \gamma_{n-2}^{(n-1)} \\ \gamma_{n-3}^{(1)} & \gamma_{n-3}^{(2)} & \cdots & \gamma_{n-3}^{(n-1)} \\ \vdots & & & \\ \gamma_0^{(1)} & \gamma_0^{(2)} & \cdots & \gamma_0^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Es ist nun sofort zu sehen, dass $R\psi(u)^{n-3}$ gleich $\gamma_{n-20} \cdot \gamma_{n-30} \cdots \gamma_{00}$, mal dem Producte der Differenzen der Grössen $k_1 - u$, $k_2 - u$, $\ldots$ $k_{n-1} - u$, oder der Grössen k_1, k_2, $\ldots$ k_{n-1}. Das Quadrat des letzteren Productes ist aber $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \psi'(k_1) . \psi'(k_2) \ldots \psi'(k_{n-1})$. Es ist demnach

$$(7.) \qquad \psi(u)^{n-3} R = \gamma_{n-20} \cdot \gamma_{n-30} \cdots \gamma_{00} \cdot \sqrt{(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} . \psi'(k_1) . \psi'(k_2) \ldots \psi'(k_{n-1})},$$

folglich nach den Gleichungen (5.) und (5ª.) voriger Nummer $\psi(u)^{n-3} R$ von u unabhängig. Aus der Gleichung (6.) in No. 1 folgt, dass auch

$\frac{\Delta}{R}$, und weil Ψ von u unabhängig ist, ebenfalls

$\frac{\Delta}{F}$, d. h. H von u unabhängig.

Da aber H^2 in Bezug auf die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ symmetrisch ist, so ergiebt sich, *dass H überhaupt von den Wurzeln dieser Gleichung unabhängig ist.*

Die Determinante H ist diejenige, in welche sich das vielfache Integral in der Abhandlung von *Haedenkamp* Gleichung (10.) S. 187 umformen lässt.

4.

Da die Determinante H die Eigenschaft besitzt, von den Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ unabhängig zu sein, *so können wir zur Bestimmung derselben für $\varphi(x)$ eine beliebige ganze rationale Function n^{ten} Grades mit ungleichen Linearfactoren wählen.*

Am zweckmässigsten scheint es zu sein,

$$(1.) \qquad \varphi(x) = x^n - 1$$

zu nehmen. Ist α eine primitive Wurzel der Gleichung

$$(2.) \qquad x^n = 1,$$

so kann man setzen

$$(3.) \qquad \eta_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \int_{\alpha^{\mathfrak{b}-1}}^{\alpha^{\mathfrak{b}}} \frac{x^{\mathfrak{a}}\,dx}{\sqrt{x^n-1}}$$

für $\mathfrak{b} = 1, 2, \ldots n-1$.

Nun ist

$$(4.) \qquad \int_{\alpha^{\mathfrak{b}-1}}^{\alpha^{\mathfrak{b}}} \frac{x^{\mathfrak{a}}\,dx}{\sqrt{x^n-1}} = \alpha^{(\mathfrak{b}-1)(\mathfrak{a}+1)} \int_1^{\alpha} \frac{x^{\mathfrak{a}}\,dx}{\sqrt{x^n-1}},$$

wie sich durch die Substitution von $\alpha^{\mathfrak{b}-1}x$ für x ergiebt. Ferner ist

$$(5.) \qquad \int_1^{\alpha} \frac{x^{\mathfrak{a}}\,dx}{\sqrt{x^n-1}} = \int_0^{\alpha} \frac{x^{\mathfrak{a}}\,dx}{\sqrt{x^n-1}} - \int_0^{1} \frac{x^{\mathfrak{a}}\,dx}{\sqrt{x^n-1}} = (\alpha^{\mathfrak{a}+1}-1) \int_0^{1} \frac{x^{\mathfrak{a}}\,dx}{\sqrt{x^n-1}},$$

wie aus der Substitution von $x\alpha$ für x folgt.

Demnach ist

$$(6.) \qquad H = \delta . \prod_{\mathfrak{a}} (\alpha^{\mathfrak{a}+1}-1) \int_0^{1} \frac{x^{\mathfrak{a}}\,dx}{\sqrt{x^n-1}},$$

wo

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \ldots & \alpha^{(n-2).1} \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \ldots & \alpha^{(n-2).2} \\ 1 & \alpha^3 & \alpha^6 & \ldots & \alpha^{(n-2).3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & \alpha^{n-1} & \alpha^{2(n-1)} & \ldots & \alpha^{(n-2).(n-1)} \end{vmatrix}$$

und das Product $\prod_{\mathfrak{a}}$ sich auf alle Werthe von $\mathfrak{a}$ von 0 bis $n-2$ bezieht. — Es ergiebt sich leicht daraus, dass δ gleich dem Product der Differenzen der Wurzeln der Gleichung $\frac{x^n-1}{x-1} = 0$ ist, dass

für ein ungerades n

$$(7.) \qquad \delta = \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} . n^{n-2}},$$

für ein gerades n

$$(7^a.) \qquad \delta = \sqrt{(-1)^{\frac{n-2}{2}} . n^{n-2}}.$$

Ferner ist bekanntlich

$$(8.) \qquad \prod_{\mathfrak{a}} (\alpha^{\mathfrak{a}+1}-1) = (-1)^{n-1} . n,$$

endlich (s. *Legendre* Traité des fonct. ell. T. II, Ch. II, éq. (*s*))

$$(9.)\qquad \int_0^1 \frac{x^{\mathfrak{b}-1}dx}{\sqrt{x^n-1}} \cdot \int_0^1 \frac{x^{n-\mathfrak{b}-1}dx}{\sqrt{x^n-1}} = -\frac{2\pi}{n}\,\frac{\operatorname{cotg}\frac{\mathfrak{b}\pi}{n}}{n-2\mathfrak{b}},$$

und wenn n gerade und $\mathfrak{b}=\frac{n}{2}$, so ist

$$(9^a.)\qquad \int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{2}}dx}{\sqrt{x^n-1}} = -\frac{\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Demnach ist

für ein ungerades n

$$\Pi_{\mathfrak{a}}\int_0^1 \frac{x^{\mathfrak{a}}dx}{\sqrt{x^n-1}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}\cdot\operatorname{cotg}\frac{2\pi}{n}\cdots\operatorname{cotg}\frac{n-1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}}{(n-2)(n-4)\ldots3.1},$$

für ein gerades n

$$\Pi_{\mathfrak{a}}\int_0^1 \frac{x^{\mathfrak{a}}dx}{\sqrt{x^n-1}} = (-1)^{\frac{n+1}{2}}\cdot\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{\frac{n-2}{2}}\cdot\frac{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}\operatorname{cotg}\frac{2\pi}{n}\cdots\operatorname{cotg}\frac{n-2}{2}\cdot\frac{\pi}{n}}{(n-2)(n-4)\ldots2}\cdot\frac{\pi}{n},$$

oder

für ein ungerades n

$$(10.)\qquad \Pi_{\mathfrak{a}}\int_0^1 \frac{x^{\mathfrak{a}}dx}{\sqrt{x^n-1}} = \frac{\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}{(n-2)(n-4)\ldots3.1},$$

für ein gerades n

$$(10^a.)\qquad \Pi_{\mathfrak{a}}\int_0^1 \frac{x^{\mathfrak{a}}dx}{\sqrt{x^n-1}} = \frac{-\sqrt{-1}\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{\frac{n-2}{2}}\cdot\frac{\pi}{n}}{(n-2)(n-4)\ldots2}.$$

Aus den Gleichungen (6.), (7.), (8.), (10.), (10^a.) folgt

für ein ungerades n

$$(11.)\qquad H = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{4}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{(n-2)(n-4)\ldots3.1},$$

für ein gerades n

$$(11^a.)\quad H = \frac{(-1)^{\frac{n}{4}}(2\pi)^{\frac{n}{2}-1}.\pi}{(n-2)(n-4)\ldots2}\ *).$$

---

*) In der mehrfach angeführten Gleichung (10.) Seite 187 der *Haedenkamp*schen Arbeit ist in dem vielfachen Integrale der durch die Transformation eingeführte Factor $\frac{1}{2^{n-1}}$ weggelassen, und auf die imaginären Werthe, welche die Einzelintegrale inner-

Für $n=3$ ergiebt sich

$$(l.) \qquad H = 2\pi\sqrt{-1}.$$

Diese Gleichung stimmt mit der *Legendre*schen überein. Denn nimmt man

$$\varphi(x) = x(x-1)(x-u),$$

so ist die Gleichung $(l.)$ gleichbedeutend mit:

$$(l'.) \qquad \begin{vmatrix} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} & \int_1^u \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} \\ \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}} & \int_1^u \frac{x\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}} \end{vmatrix} = 2\pi i.$$

Setzt man

$$x = y^2, \quad u = \frac{1}{k^2},$$

$$\Delta y = \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}$$

$$\int_0^1 \frac{dy}{\Delta y} = K, \quad \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dy}{\Delta y} = K'i,$$

$$\int_0^1 \frac{k^2y^2dy}{\Delta y} = J, \quad \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{k^2y^2dy}{\Delta y} = J'i,$$

so geht die Gleichung $(l'.)$ über in

$$(l''.) \qquad KJ'-K'J = \frac{\pi}{2},$$

welches die *Legendre*sche Relation ist.

---

halb der angegebenen Grenzen, selbst wenn diese reell sind, annehmen können, nicht Rücksicht genommen worden. Daher ist auch der daraus gefolgerte auf derselben Seite befindliche Werth des Doppelintegrals, für $n=3$, nicht richtig, derselbe ist vielmehr, wie im Texte oben angegeben, gleich $2\pi\sqrt{-1}$.

Greifswald, den 12. August 1869.

Ueber quadratische, trigonale und bitrigonale Reste.

(Von Herrn *Stern* in Göttingen.)

Im 69sten Bande pag. 370 dieses Journals habe ich einige Eigenschaften der Zahlen erörtert, welche ich trigonale und bitrigonale Reste genannt habe. Trigonale Reste und bitrigonale Reste sind die Zahlen, welche man erhält, wenn man bezüglich in $\frac{x(x+1)}{2}$ oder in $x(x+1)$ allmählich statt x die Zahlen $1, 2, \ldots \frac{p-1}{2}$ substituirt, wo p eine Primzahl bedeutet und die kleinsten positiven Reste der so entstehenden Zahlen nach dem Modul p nimmt. Im Folgenden sollen weitere Eigenschaften dieser Reste erörtert werden. Ich werde aber zunächst eine Anzahl Sätze zusammenstellen, welche sich auf quadratische Reste beziehen, und von welchen ich später Gebrauch machen werde. Im nächstfolgenden Paragraphen sollen daher unter Resten und Nichtresten ausschliesslich *quadratische* verstanden werden.

1.

a) Ist p eine Primzahl, und bezeichnet man durch r' und n' bezüglich die Reste und Nichtreste, welche zwischen 0 und $\frac{p}{4}$ liegen, und durch R' und N' bezüglich die Reste und Nichtreste, welche zwischen 0 und $\frac{p}{2}$ liegen, so ist $r' = n' = \frac{p-3}{8}$, wenn $p = 8q+3$; ist dagegen $p = 8q+7$, so ist $r' - n' = R' - N'$, d. h. es liegen zwischen $\frac{p}{4}$ und $\frac{p}{2}$ soviel Reste als Nichtreste, und hieraus folgt dann unmittelbar, dass zwischen $\frac{p}{2}$ und $\frac{3p}{4}$ ebensoviel Reste liegen als zwischen $\frac{p}{4}$ und $\frac{p}{2}$.

Diese Sätze hat schon Herr *Lebesgue* (Journ. de Mathém. T. 7) bewiesen, man kann sie aber viel einfacher ableiten *). Ist nämlich $p = 8q+3$,

*) wie dies inzwischen auch Herr *Götting* in diesem Journale Bd. 70, p. 363 gethan hat. Anm. d. Verf., October 1869.

also 2 ein Nichtrest, so liegen zwischen 0 und p ebensoviel *gerade* Nichtreste als Reste zwischen 0 und $\frac{p}{2}$, d. h. als Nichtreste zwischen $\frac{p}{2}$ und p. Zieht man auf beiden Seiten die geraden Nichtreste zwischen $\frac{p}{2}$ und p ab, so folgt, dass zwischen 0 und $\frac{p}{2}$ ebensoviel *gerade* Nichtreste liegen als *ungerade* Nichtreste zwischen $\frac{p}{2}$ und p, d. h. als *gerade* Reste zwischen 0 und $\frac{p}{2}$ oder, was dasselbe sagt, zwischen 0 und $\frac{p}{4}$ liegen ebensoviel Reste als Nichtreste.

Ist $p = 8q+7$, so liegen zwischen 0 und $\frac{p}{2}$ ebensoviel *ungerade* Nichtreste als *gerade* Reste zwischen $\frac{p}{2}$ und p, zugleich liegen, da 2 ein Rest ist, zwischen 0 und p soviel *gerade* Nichtreste als Nichtreste zwischen 0 und $\frac{p}{2}$. Zieht man beiderseits die geraden Nichtreste zwischen 0 und $\frac{p}{2}$ ab, so folgt, dass zwischen $\frac{p}{2}$ und p soviel *gerade* Nichtreste liegen als *ungerade* Nichtreste zwischen 0 und $\frac{p}{2}$. Zwischen $\frac{p}{2}$ und p liegen also ebensoviel gerade Reste als gerade Nichtreste, d. h. zwischen $\frac{p}{4}$ und $\frac{p}{2}$ liegen soviel Reste als Nichtreste.

Man kann an den letzteren Fall noch folgende Bemerkung knüpfen. Da zwischen 0 und $\frac{p}{2}$ soviel ungerade Nichtreste liegen als gerade Nichtreste zwischen $\frac{p}{2}$ und p, d. h. als Nichtreste zwischen $\frac{p}{4}$ und $\frac{p}{2}$, so folgt, wenn man auf beiden Seiten die ungeraden Nichtreste zwischen $\frac{p}{4}$ und $\frac{p}{2}$ abzieht, dass zwischen 0 und $\frac{p}{4}$ ebensoviel ungerade Nichtreste liegen als gerade Nichtreste zwischen $\frac{p}{4}$ und $\frac{p}{2}$, d. h. als Nichtreste zwischen $\frac{p}{8}$ und $\frac{p}{4}$. Geht man so weiter, so findet man allgemein, dass zwischen 0 und $\frac{p}{2^m}$ ebensoviel ungerade Nichtreste liegen als Nichtreste zwischen $\frac{p}{2^{m+1}}$ und $\frac{p}{2^m}$. Ebenso findet man, dass zwischen 0 und $\frac{p}{2^m}$ ebensoviel ungerade Reste liegen als Reste zwischen $\frac{p}{2^{m+1}}$ und $\frac{p}{2^m}$. Und da der Beweis nur darauf beruht, dass 2 ein Rest ist, dagegen es gleichgültig ist, ob -1 ein Rest oder Nichtrest ist, so gilt dieser Satz auch, wenn $p = 8q+1$. Man sieht leicht, dass dieser Satz sich noch verallgemeinern lässt. Ist nämlich $q < p$ und q ein Rest von p,

so liegen zwischen 0 und $\frac{p}{q^m}$ ebensoviel nicht durch q theilbare Reste als Reste zwischen $\frac{p}{q^{m+1}}$ und $\frac{p}{q^m}$, und ebenso ist es bei den Nichtresten.

Ist $p = 4n+1$, so ist, wie schon *Dirichlet* bewiesen hat, (Bd. 18, p. 270 dieses Journals)

$$r' > n'$$

oder, da $n' = n - r'$, $2r' > n$ und daher $r' > \frac{p-1}{8}$.

Ist $p = 4n+3$, so folgt aus *Dirichlets* Formeln (a. a. O. p. 265)

$$R' > N'.$$

Ist mithin $p = 8q+7$, so ist auch wieder $r' > n'$ oder $2r' > n$; ist aber $p = 8q+3$, also, wie oben gezeigt wurde, $r' = n'$, so ist $2r' = n$.

Es folgt hieraus, dass in keinem Falle $2r' - n$ *negativ* ist.

b) Man bezeichne durch G_1, G_2, G_3, G_4 bezüglich die Anzahl der *geraden* Reste zwischen 0 und $\frac{p}{4}$, $\frac{p}{4}$ und $\frac{p}{2}$, $\frac{p}{2}$ und $\frac{3p}{4}$, $\frac{3p}{4}$ und p, durch U_1, U_2, U_3, U_4 bezüglich die Anzahl der *ungeraden* Reste zwischen diesen Grenzen, durch g_1, g_2, g_3, g_4 bezüglich die Anzahl der geraden Nichtreste und durch u_1, u_2, u_3, u_4 bezüglich die Anzahl der ungeraden Nichtreste zwischen diesen Grenzen. Ist $p = 4n+1$, so hat man

$$G_1 + G_2 + g_1 + g_2 = \frac{p-1}{4},$$

$$G_1 + G_2 + U_1 + U_2 = \frac{p-1}{4},$$

also $g_1 + g_2 = U_1 + U_2$; ebenso findet man $G_1 + G_2 = u_1 + u_2$.

Ist nun $p = 8q+1$, so ist die Anzahl der geraden Reste und der geraden Nichtreste zwischen 0 und $\frac{p}{2}$ bezüglich gleich der Anzahl der Reste und der Nichtreste zwischen 0 und $\frac{p}{4}$, d. h.

$$G_1 + G_2 = G_1 + U_1; \quad g_1 + g_2 = g_1 + u_1,$$

mithin

$$G_2 = U_1; \qquad g_2 = u_1.$$

Nun folgt aus *Dirichlets* Untersuchungen (a. a. O. p. 267), dass $G_1 + U_1 > g_1 + u_1$, wenn $p = 4n+1$, also auch $G_1 + G_2 > g_1 + g_2$, d. h.

$$G_1 + G_2 > U_1 + U_2,$$

es giebt also, wenn $p = 8n+1$, zwischen 0 und $\frac{p}{2}$ mehr gerade als ungerade Reste, zugleich folgt $G_1 > U_2$.

Ist $p = 8q+5$, so ist die Anzahl der geraden Reste und der geraden Nichtreste, die zwischen 0 und $\frac{p}{2}$ liegen, bezüglich gleich der Anzahl der Nichtreste und der Anzahl der Reste zwischen 0 und $\frac{p}{4}$, also

$$G_1+G_2 = g_1+u_1 = u_1+u_2; \quad g_1+g_2 = G_1+U_1 = U_1+U_2,$$

mithin folgt aus $G_1+U_1 > g_1+u_1$, dass in diesem Falle $G_1+U_1 > G_1+G_2$ oder $U_1+U_2 > G_1+G_2$, d. h. wenn $p = 8q+5$, so giebt es zwischen 0 und $\frac{p}{2}$ mehr ungerade als gerade Reste. Zugleich folgt

$$U_2 = G_1; \; u_2 = g_1, \text{ mithin } U_1 > G_2.$$

c) Je nachdem $p = 8q+1$ oder $8q+5$, liegen aber auch zwischen 0 und $\frac{p}{4}$ mehr gerade als ungerade oder mehr ungerade als gerade Reste. Bezeichnet man nämlich durch A und B bezüglich die Anzahl der Reste und Nichtreste zwischen 0 und $\frac{p}{8}$ und durch A' und B' die Anzahl der Reste und Nichtreste zwischen $\frac{3p}{8}$ und $\frac{p}{2}$, so muss nach *Dirichlet* (a. a. O. p. 268) $A-B-A'+B'$ eine positive Grösse sein. Ist nun $p = 8q+1$, so ist

$$A = G_1; \quad B = g_1; \quad A' = G_4; \quad B' = g_4,$$

also

$$G_1+g_4 > g_1+G_4.$$

Es ist aber $g_4 = u_1$ und $G_4 = U_1$, mithin

$$G_1+u_1 > g_1+U_1.$$

Addirt man in diesem Ausdrucke auf beiden Seiten G_1+U_1, so hat man $2G_1+U_1+u_1 > 2U_1+g_1+G_1$. Nun ist $U_1+u_1 = G_1+g_1 = \frac{p-1}{8}$, also $G_1 > U_1$, und da $G_2 = U_1$, so folgt zugleich $G_1 > G_2$, d. h. wenn $p = 8q+1$, so liegen zwischen 0 und $\frac{p}{8}$ mehr Reste als zwischen $\frac{p}{8}$ und $\frac{p}{4}$. Ist $p = 8q+5$, so ist $A = g_1$; $B = G_1$; $A_1 = g_4$; $B_1 = G_4$, also

$$g_1+G_4 > G_1+g_4$$

oder

$$g_1+U_1 > G_1+u_1;$$

hieraus findet man wieder

$$2U_1+g_1+G_1 > 2G_1+U_1+u_1.$$

In diesem Falle ist aber $g_1+G_1 = \frac{p-5}{8}$, also $u_1+U_1 = \frac{p+3}{8}$, mithin $g_1+G_1 < u_1+U_1$ und daher $U_1 > G_1$. Aus $U_2 = G_1$ folgt zugleich $U_1 > U_2$, also auch $G_4 > G_3$,

d. h. wenn $p = 8q+5$, so sind zwischen $\frac{3p}{8}$ und $\frac{p}{2}$ mehr Nichtreste enthalten als zwischen $\frac{p}{4}$ und $\frac{3p}{8}$.

d) Ist $p = 8q+3$, also die Anzahl aller Reste $4q+1$, so ist die Anzahl der Reste zwischen 0 und $\frac{p}{4}$ und $\frac{3p}{4}$ und p der Anzahl der Reste und Nichtreste zwischen 0 und $\frac{p}{4}$ gleich, d. h. $= 2q$, die Anzahl der Reste zwischen $\frac{p}{4}$ und $\frac{3p}{4}$ ist also $2q+1$. Da nun, wie oben gezeigt wurde, $r' = n'$, d. h. zwischen 0 und $\frac{p}{4}$ sowohl q Reste als q Nichtreste liegen, so folgt, dass auch zwischen $\frac{3p}{4}$ und p sowohl q Reste als q Nichtreste enthalten sind. Auch versteht es sich von selbst, dass die Anzahl der Reste und Nichtreste zwischen $\frac{p}{4}$ und $\frac{p}{2}$ bezüglich der Anzahl der Nichtreste und Reste zwischen $\frac{p}{2}$ und $\frac{3p}{4}$ gleich ist.

Bezeichnet man nun die Anzahl der Reste zwischen 0 und $\frac{p}{8}$, $\frac{p}{8}$ und $\frac{p}{4}$, $\frac{p}{4}$ und $\frac{3p}{8}$, $\frac{3p}{8}$ und $\frac{p}{2}$ bezüglich durch $R\frac{p}{8}$, $R\frac{p}{4}$, $R\frac{3p}{8}$, $R\frac{p}{2}$ und ebenso die Nichtreste durch $N\frac{p}{8}$, $N\frac{p}{4}$, $N\frac{3p}{8}$, $N\frac{p}{2}$, so ist $G_2+U_2 = R\frac{3p}{8}+R\frac{p}{2}$, aber $U_2 = g_3 = R\frac{3p}{8}$, also $G_2 = R\frac{p}{2}$; ferner $U_3 = g_2 = R\frac{p}{4}$; ebenso $G_2 = N\frac{p}{4}$, also $N\frac{p}{4} = R\frac{p}{2}$ und $G_3 = N\frac{3p}{8}$, also $G_2+U_3 = G_2+g_2 = q$; $G_3+U_2 = G_3+g_3 = q+1$ und

$$U_3 - U_2 = G_3 - G_2 - 1.$$

Nun ist nach *Dirichlet* (a. a. O. p. 268) $R\frac{p}{4}+R\frac{3p}{8} > N\frac{p}{4}+N\frac{3p}{8}$, also $U_2+U_3 > G_2+G_3$. Man hat daher

$$U_2+U_3 = G_2+G_3+k,$$
$$U_3-U_2 = G_3-G_2-1,$$

also $U_2 = G_2+\frac{k+1}{2}$; $U_3 = G_3+\frac{k-1}{2}$, wo k die Hälfte der Anzahl der Formen mit dem Determinanten $-2p$ bedeutet und $U_2 > G_2$; $U_3 \gtrless G_3$. Auch ist $G_2+U_2+G_3+U_3 = 2q+1$, mithin

$$U_2+U_3 = q+\frac{k+1}{2}; \qquad G_2+G_3 = q-\frac{k-1}{2}.$$

Ferner ist $G_1+G_2=N\frac{p}{8}+N\frac{p}{4}=q$; U_1+U_2 der Anzahl der geraden Nichtreste zwischen $\frac{p}{2}$ und p gleich, d. h. $=R\frac{3p}{8}+R\frac{p}{2}=G_2+U_2$, also $U_1=G_2=N\frac{p}{4}$, aber $G_1+U_1=q=R\frac{p}{4}+N\frac{p}{4}$, mithin $G_1=R\frac{p}{4}$, nun ist auch $G_1=N\frac{p}{8}$, also $N\frac{p}{8}=R\frac{p}{4}$, und da $R\frac{p}{8}+N\frac{p}{8}=q=R\frac{p}{4}+N\frac{p}{4}$, so ist auch $R\frac{p}{8}=N\frac{p}{4}$. Auch ist $U_1=g_4=R\frac{p}{2}=R\frac{p}{8}$, und da auch $R\frac{p}{2}+N\frac{p}{2}=q$, so folgt $N\frac{p}{2}=N\frac{p}{8}$. Also auch $G_4=N\frac{p}{2}=N\frac{p}{8}$ und $U_4=g_1=R\frac{p}{8}$. Man hat demnach

$$U_1=R\frac{p}{8}, \qquad G_1=N\frac{p}{8},$$

$$U_2=R\frac{3p}{8}, \qquad G_2=R\frac{p}{8},$$

$$U_3=N\frac{p}{8}, \qquad G_3=N\frac{3p}{8},$$

$$U_4=R\frac{p}{8}, \qquad G_4=N\frac{p}{8}.$$

Da $U_2>G_2$, so ist mithin $R\frac{3p}{8}>R\frac{p}{8}$, d. h. wenn $p=8q+3$, so liegen zwischen $\frac{p}{4}$ und $\frac{3p}{8}$ immer mehr Reste als zwischen 0 und $\frac{p}{8}$.

e) Ist $p=8q+7$, so beweist man wie im vorhergehenden Falle, dass die Anzahl der Reste zwischen 0 und $\frac{p}{4}$ und zwischen $\frac{3p}{4}$ und p der Anzahl der Reste und Nichtreste zwischen 0 und $\frac{p}{4}$ gleich ist, also $=2q+1$, die Anzahl der Reste zwischen $\frac{p}{4}$ und $\frac{3p}{4}$ ist also $=2q+2$. Da nun in diesem Falle zwischen $\frac{p}{4}$ und $\frac{p}{2}$ gleich viel Reste und Nichtreste liegen, so folgt, dass zwischen $\frac{p}{2}$ und $\frac{3p}{4}$ ebensoviel Reste liegen als zwischen $\frac{p}{4}$ und $\frac{p}{2}$ und auch ebensoviel Nichtreste, also von jeder Gattung $q+1$. Man hat ferner $U_2=g_3=N\frac{3p}{8}$, $U_3=g_2=N\frac{p}{4}$, $G_2=R\frac{p}{4}$, $G_3=R\frac{3p}{8}$. Demnach $G_2+U_3=q+1$, $G_3+U_2=q+1$, aber auch $G_2+U_2=q+1=G_3+U_3$, also $G_2=G_3$ und $U_2=U_3$, mithin $R\frac{p}{4}=R\frac{3p}{8}$ und $N\frac{p}{4}=N\frac{3p}{8}$. Ferner $G_1=R\frac{p}{8}$, $U_1=g_4=N\frac{p}{2}$, $G_4=R\frac{p}{2}$. Nun ist

$$R\frac{3p}{8}+N\frac{3p}{8}=R\frac{p}{2}+N\frac{p}{2}=q+1,$$

zugleich

$$R\frac{3p}{8}+R\frac{p}{2} = N\frac{3p}{8}+N\frac{p}{2},$$

also $R\frac{3p}{8}=N\frac{p}{2}$, $N\frac{3p}{8}=R\frac{p}{2}$, mithin $U_1=R\frac{3p}{8}=G_2$ und $G_4=N\frac{3p}{8}=U_2$, ferner $U_4=g_1=N\frac{p}{8}$. Man hat demnach

$$G_1=R\frac{p}{8}, \qquad U_1=R\frac{p}{4},$$

$$G_2=R\frac{p}{4}, \qquad U_2=N\frac{p}{4},$$

$$G_3=R\frac{p}{4}, \qquad U_3=N\frac{p}{4},$$

$$G_4=N\frac{p}{4}, \qquad U_4=N\frac{p}{8}.$$

Aus *Dirichlets* Satz, dass $R\frac{p}{4}+R\frac{3p}{8}>N\frac{p}{4}+N\frac{3p}{8}$, folgt also hier $R\frac{p}{4}>N\frac{p}{4}$, d. h. $G_2>U_2$; $G_3>U_3$. Demnach $G_2=G_3>\frac{q+1}{2}$; $U_2=U_3<\frac{q+1}{2}$.

2.

Man bezeichne durch Σa und Σb bezüglich die Summe der quadratischen Reste und der quadratischen Nichtreste, durch $\Sigma\alpha$ und $\Sigma\beta$ bezüglich die Summe der bitrigonalen Reste und Nichtreste, durch $\Sigma\gamma$ und $\Sigma\delta$ bezüglich die Summe der trigonalen Reste und Nichtreste. Es ist also $\Sigma a+\Sigma b=\Sigma\alpha+\Sigma\beta=\Sigma\gamma+\Sigma\delta$. Man kann $\Sigma\alpha$ finden, indem man in $\left(\frac{p-1}{2}-x\right)\left(\frac{p+1}{2}-x\right)$ allmählich statt x die Werthe 0, 1, ... $\frac{p-3}{2}$ oder auch 0, 1, ... $\frac{p-1}{2}$ setzt und die Summe der kleinsten positiven Reste der so entstehenden Zahlen nach dem Modul p nimmt. Auf dieselbe Weise findet man Σa, indem man diese Werthe in x^2 substituirt. Bezeichnet man durch $W[h]$ den kleinsten positiven Rest der Zahl h nach dem Modul p und durch $\Sigma W[h]$ die Summe aller dieser Reste, welche zu den Werthen $h=0, 1, \ldots \frac{p-1}{2}$ gehören, so ist demnach

$$\Sigma\alpha = \Sigma W\left[\left(\frac{p-1}{2}-x\right)\left(\frac{p+1}{2}-x\right)\right]$$

und

$$\Sigma a = \Sigma W[x^2].$$

Da

$$W\left[\left(\frac{p-1}{2}-x\right)\left(\frac{p+1}{2}-x\right)\right]=W\left[\frac{p^2-1}{4}-px+x^2\right]=W\left[\frac{p^2-1}{4}+x^2\right]$$

und daher

$$\Sigma\alpha = \Sigma W\left[\frac{p^2-1}{4}+x^2\right],$$

so werden hier zwei Fälle zu unterscheiden sein, je nachdem $p=4n+1$ oder $p=4n+3$.

Ist $p=4n+1$, so ist $\frac{p^2-1}{4}=pn+n$, also $W\left[\frac{p^2-1}{4}+x^2\right]=W[x^2+n]$.

Ist nun $W[x^2]<3n+1$, so ist mithin $W[x^2+n]=W[x^2]+n$, ist dagegen $W[x^2]$ eine Zahl aus der Reihe $3n+1, \ldots 4n$, so ist $W[x^2+n]=W[x^2]+n-p$.

Bezeichnet man daher die Anzahl der quadratischen Reste, welche in der Reihe $3n+1, \ldots 4n$ oder, was dasselbe sagt, in der Reihe $1, 2, \ldots n$ vorkommen, wie in §. 1, durch r', so ist

$$(1.) \qquad \Sigma\alpha = \Sigma a+\frac{p+1}{2}n-r'p$$

und

$$(2.) \qquad 2\Sigma\alpha = 2\Sigma a+n-p(2r'-n).$$

Ist dagegen $p=4n+3$, so ist $\frac{p^2-1}{4}=pn+3n+2$, also $W\left[\frac{p^2-1}{4}+x^2\right]=W[x^2+3n+2]$, und dieses ist $=W[x^2]+3n+2$ oder $W[x^2]+3n+2-p$, je nachdem $W[x^2]$ eine der Zahlen $1, 2, \ldots n$ oder eine der Zahlen $n+1, \ldots 4n+2$ ist. Unter diesen letzteren Zahlen kommen aber $2n+1-r'$ quadratische Reste vor, mithin ist hier

$$(3.) \qquad \Sigma\alpha = \Sigma a+\frac{p+1}{2}(3n+2)-(2n+1-r')p$$

und

$$(4.) \qquad 2\Sigma\alpha = 2\Sigma a+3n+2+(2r'-n)p.$$

Die Formeln (2.) und (4.) verdanke ich meinem verstorbenen Freunde Dr. *Reiss*.

Bedenkt man, dass $2r'-n$ niemals negativ ist (§. 1, *a*), so ergiebt sich aus denselben sofort der Satz:

> Je nachdem $p=4n+1$ oder $=4n+3$, ist die Summe der bitrigonalen Reste kleiner oder grösser als die Summe der quadratischen Reste und mithin die Summe der bitrigonalen Nichtreste grösser oder kleiner als die Summe der quadratischen Nichtreste.

Ist $p = 4n+1$, so ist $\Sigma a = \frac{p-1}{4} \cdot p$, mithin nach Formel (1.)

$$(5.) \qquad \Sigma\alpha = (3p+1) \cdot \frac{p-1}{8} - r'p.$$

Ist $p = 8q+3$, so ist $2r' = n$ (§. 1, *a*), also nach Formel (4.)

$$(6.) \qquad \Sigma\alpha = \Sigma a + \frac{3p-1}{8}.$$

Ist $p = 8q+7$, so ist nach *Dirichlet* (a. a. O. p. 264, 265)

$$R' - N' = 2r' - n = \frac{\Sigma b - \Sigma a}{p},$$

also nach Formel (4.)

$$(7.) \quad \Sigma\alpha = \Sigma a + \frac{3p-1}{8} + \frac{\Sigma b - \Sigma a}{2} = \frac{3p-1}{8} + \frac{\Sigma b + \Sigma a}{2} = \frac{3p-1}{8} + \frac{p-1}{4} \cdot p.$$

In diesem Falle ist also $\Sigma\alpha$ gerade oder ungerade, je nachdem q ungerade oder gerade ist.

3.

Bezeichnet man, wie in meinem früheren Aufsatze, durch M den Rest von $\frac{p^2-1}{8}$ oder des Mittelgliedes der trigonalen Zahlen nach dem Modul p, so ist das Mittelglied der bitrigonalen Zahlen $\equiv 2M$, also der Rest von $2M$, welcher $\frac{p-1}{4}$ oder $\frac{3p-1}{4}$ ist, je nachdem $p = 4n+1$ oder $= 4n+3$, ein bitrigonaler Rest. Nun ist, wie dort bemerkt wurde (§. 2), $2M$ ein trigonaler Rest oder Nichtrest, je nachdem $p = 4n+1$ oder $= 4n+3$; unter denselben Voraussetzungen wird also $4M$ oder vielmehr $\frac{p-1}{2}$ ein bitrigonaler Rest oder Nichtrest sein. Auch ergiebt sich aus dem dort (§. 3) Bewiesenen, dass für $p = 4n+1$ die bitrigonalen Reste sich paarweise so zusammenstellen lassen, dass die Summe je zweier Reste, $2M$ und $4M$ ausgenommen, $\equiv 4M$ ist, und zwar geben je zwei bitrigonale Reste, welche kleiner als $\frac{p-1}{2}$ sind, die Summe $\frac{p-1}{2}$, während je zwei bitrigonale Reste, die grösser als $\frac{p-1}{2}$ sind, die Summe $p + \frac{p-1}{2}$ geben. Ist dagegen $p = 4n+3$ (abgesehen von der Zahl 3), so ist die Summe je eines bitrigonalen Restes und Nichtrestes $\equiv 4M$, den Nichtrest $4M$ und den Rest $2M$, d. h. den Nichtrest $\frac{p-1}{2}$ und den Rest

$\frac{3p-1}{4}$ ausgenommen, und zwar ist die Summe je eines Restes und Nichtrestes, welche kleiner als $\frac{p-1}{2}$ sind, gleich $\frac{p-1}{2}$, während die Summe je eines Restes und Nichtrestes, welche grösser als $\frac{p-1}{2}$ sind, $p+\frac{p-1}{2}$ ist.

Man bezeichne durch ϱ und ν bezüglich die Anzahl der bitrigonalen Reste und Nichtreste, welche kleiner als $\frac{p}{2}$ sind, so ist mithin, wenn $p=4n+1$,

$$\Sigma\alpha = \frac{p-1}{2}+\frac{p-1}{4}+\frac{\varrho-2}{2}\cdot\frac{p-1}{2}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{p-1}{2}-\varrho\right)\left(p+\frac{p-1}{2}\right)$$
$$= (3p+1)\cdot\frac{p-1}{8}-\varrho\,\frac{p}{2}.$$

Aus der Vergleichung dieses Ausdrucks mit Formel (5.) ergiebt sich $\varrho=2r'$ und $\nu=\frac{p-1}{2}-2r'=2n'$.

Die Anzahl der bitrigonalen Reste und Nichtreste zwischen 0 und $\frac{p}{2}$ ist also bezüglich doppelt so gross als die Anzahl der quadratischen Reste und Nichreste zwischen 0 und $\frac{p}{4}$.

4.

Man bezeichne durch B_1, B_2, B_3, B_4 bezüglich die Anzahl der bitrigonalen Reste, welche zwischen 0 und $\frac{p}{4}$, $\frac{p}{4}$ und $\frac{p}{2}$, $\frac{p}{2}$ und $\frac{3p}{4}$, $\frac{3p}{4}$ und p liegen, und durch b_1, b_2, b_3, b_4 bezüglich die Anzahl der bitrigonalen Nichtreste, welche zwischen diesen Grenzen liegen. Man hat also

$$(8.)\qquad \begin{cases} B_1+B_2+b_1+b_2 = \frac{p-1}{2}, \\ B_3+B_4+b_3+b_4 = \frac{p-1}{2}. \end{cases}$$

Da nun von zwei (ungleichen ganzen) Zahlen, deren Summe $\frac{p-1}{2}$ ist, die eine zwischen 0 und $\frac{p}{4}$, die andere zwischen $\frac{p}{4}$ und $\frac{p}{2}$ liegen muss, und ferner von zwei solchen Zahlen, die einzeln kleiner als p sind, und deren Summe $p+\frac{p-1}{2}$ ist, die eine zwischen $\frac{p}{2}$ und $\frac{3p}{4}$, die andere zwischen $\frac{3p}{4}$ und p liegen muss, so folgt aus dem Obigen, dass wenn $p=4n+3$, ebensoviel bitrigonale Reste zwischen $\frac{p}{4}$ und $\frac{p}{2}$ liegen, als bitrigonale Nichtreste

zwischen 0 und $\frac{p}{4}$, dagegen, weil auch $\frac{p-1}{2}$ zu den Nichtresten gehört, zwischen $\frac{p}{4}$ und $\frac{p}{2}$ ein Nichtrest mehr liegt als Reste zwischen 0 und $\frac{p}{4}$. Ferner, dass zwischen $\frac{p}{2}$ und $\frac{3p}{4}$ ebensoviel Nichtreste liegen, als Reste zwischen $\frac{3p}{4}$ und p, dagegen, weil $\frac{3p-1}{4}$ ein Rest ist, zwischen $\frac{p}{2}$ und $\frac{3p}{4}$ ein Rest mehr liegt, als Nichtreste zwischen $\frac{3p}{4}$ und p. Man hat also in diesem Falle

$$B_1 = b_2 - 1, \quad B_2 = b_1, \quad B_3 = b_4 + 1, \quad B_4 = b_3.$$

Aus diesen Gleichungen in Verbindung mit den Gleichungen (8.) folgt

$$B_1 + B_2 = \frac{p-3}{4}; \quad B_3 + B_4 = \frac{p+1}{4},$$

$$b_1 + b_2 = \frac{p+1}{4}; \quad b_3 + b_4 = \frac{p-3}{4}.$$

Ist $p = 4n+1$, so folgt aus denselben Gründen, da die bitrigonalen Reste, welche zwischen 0 und $\frac{p}{2}$ liegen, abgesehen von $\frac{p-1}{4}$ und $\frac{p-1}{2}$, paarweise zusammengestellt, die Summe $\frac{p-1}{2}$ geben, dass es ebensoviel bitrigonale Reste zwischen 0 und $\frac{p}{4}$ als zwischen $\frac{p}{4}$ und $\frac{p}{2}$ giebt, und dasselbe gilt von den bitrigonalen Nichtresten, welche kleiner als $\frac{p}{2}$ sind. Ferner folgt, dass zwischen $\frac{p}{2}$ und $\frac{3p}{4}$ und zwischen $\frac{3p}{4}$ und p sowohl gleichviel bitrigonale Reste als gleichviel bitrigonale Nichtreste liegen. Man hat daher

$$B_1 = B_2; \quad B_3 = B_4; \quad b_1 = b_2; \quad b_3 = b_4.$$

Nun wurde gefunden $B_1 + B_2 = 2r'$, $b_1 + b_2 = 2n'$; auch ist

$$B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = \frac{p-1}{2} = b_1 + b_2 + b_3 + b_4,$$

also

$$B_1 = r'; \quad B_2 = r'; \quad b_1 = n'; \quad b_2 = n';$$
$$B_3 = n'; \quad B_4 = n'; \quad b_3 = r'; \quad b_4 = r';$$

und, da $r' > n'$ (§. 1, *a*),

$$B_1 > b_1; \quad B_2 > b_2; \quad B_3 < b_3; \quad B_4 < b_4.$$

Da, wenn $p = 4n+3$, $R' > N'$ (§. 1, *a*) und zugleich $R' + N' = \frac{p-1}{2}$, also jeden-

falls $R' > \frac{p-1}{4}$, während $B_1+B_2=\frac{p-3}{4}$, so folgt, dass in diesem Falle zwischen den Grenzen 0 und $\frac{p}{2}$ mehr quadratische als bitrigonale Reste liegen.

5.

Man bemerke noch Folgendes. Ist $p=4n+1$, so müssen unter den bitrigonalen Resten, welche grösser als $\frac{p}{2}$ sind, ebensoviel gerade als ungerade vorkommen, und ebenso ist es bei den Nichtresten, da die Summe eines Paares $p+\frac{p-1}{2}$ ist. Die Anzahl der bitrigonalen Reste, die grösser als $\frac{p}{2}$ sind, ist aber $\frac{p-1}{2}-2r'$, also die Anzahl der geraden wie der ungeraden, die darunter vorkommen, $\frac{p-1}{4}-r'$ und die Anzahl der geraden wie der ungeraden Nichtreste, die grösser als $\frac{p}{2}$ sind, gleich r'.

Da ferner die bitrigonalen Reste, welche kleiner als $\frac{p}{2}$ sind, sich zu Paaren zusammenstellen lassen, deren Summe $\frac{p-1}{2}$, so müssen zwei gerade oder zwei ungerade zusammengestellt werden, es müssen also sowohl die geraden als ungeraden in gerader Zahl vorhanden sein, abgesehen von $2M$, welches $\equiv 2q$ oder $2q+1$ ist, und $4M$, welches $\equiv 4q$ oder $4q+2$ ist, je nachdem $p=8q+1$ oder $8q+5$. Es giebt also im ersten Falle eine gerade, im zweiten eine ungerade Anzahl gerader und ungerader bitrigonaler Reste, welche kleiner als $\frac{p}{2}$ sind.

Ist $p=4n+3$, so muss es ebensoviel gerade bitrigonale Reste als gerade Nichtreste geben, welche grösser als $\frac{p}{2}$ sind, da die Summe eines Restes und eines Nichtrestes gleich $p+\frac{p-1}{2}$ ist, und aus demselben Grunde auch ebensoviel ungerade Reste als ungerade Nichtreste, welche grösser als $\frac{p}{2}$ sind, abgesehen von dem Reste $\frac{3p-1}{4}$, welcher $6q+2$ oder $6q+5$, je nachdem $p=8q+3$ oder $8q+7$, also im ersten Falle zu den geraden, im zweiten zu den ungeraden gehört.

Da ferner die Reste und Nichtreste, welche kleiner als $\frac{p}{2}$ sind, sich so zu Paaren zusammenstellen lassen, dass die Summe eines Paares $\frac{p-1}{2}$ ist,

so muss es ebensoviel gerade bitrigonale Reste als ungerade bitrigonale Nichtreste und ebensoviel ungerade bitrigonale Reste als gerade bitrigonale Nichtreste zwischen 0 und $\frac{p}{2}$ geben, abgesehen von dem Nichtreste $\frac{p-1}{2}$, welcher jedenfalls zu den ungeraden gehört.

6.

Aus dem in §. 2 bewiesenen Satze, dass $\Sigma\alpha$ grösser oder kleiner als Σa, je nachdem $p=4n+3$ oder $4n+1$, ergiebt sich noch Folgendes. Zieht man sowohl von $\Sigma\alpha$ als von Σa die Summe der quadratischen Reste, welche zugleich bitrigonale Reste sind, ab, so ist mithin die Summe der bitrigonalen Reste, welche nicht quadratische Reste sind, grösser oder kleiner als die Summe der quadratischen Reste, welche nicht bitrigonale Reste sind, je nachdem $p=4n+3$ oder $4n+1$.

Es folgt ferner, dass $\Sigma\beta$ grösser oder kleiner als $\Sigma\alpha$, je nachdem p entweder in einer der Formen $4n+1$, $8q+3$ oder in der Form $8q+7$ enthalten ist.

Ist nämlich $p=4n+1$, so hat man, da dann $\Sigma a=\Sigma b$,

$$\Sigma\alpha+\Sigma\beta = 2\Sigma a.$$

Da nun $\Sigma\alpha<\Sigma a$, so ist $\Sigma\beta>\Sigma a>\Sigma\alpha$ und zwar, da $\Sigma\beta-\Sigma\alpha=2(\Sigma a-\Sigma\alpha)$, so folgt aus Formel (1.)

$$(9.)\qquad \Sigma\beta-\Sigma\alpha = 2r'p-(p+1)\cdot\frac{p-1}{4}$$

und zugleich, dass diese Differenz eine *gerade* Zahl ist. Ist $p=8q+3$, so hat man nach Formel (6.)

$$\Sigma\alpha = \Sigma a+\frac{3p-1}{8},$$

also

$$\Sigma\beta = \Sigma b-\frac{3p-1}{8}$$

und

$$\Sigma\beta-\Sigma\alpha = \Sigma b-\Sigma a-\frac{3p-1}{4}.$$

Nun ist, wenn man $\Sigma b-\Sigma a=sp$ setzt, nach *Dirichlet* (a. a. O. p. 270) s eine positive Zahl, also $\Sigma\beta>\Sigma\alpha$. Da zugleich $\Sigma a+\Sigma b=p\cdot\frac{p-1}{2}$ eine ungerade Zahl, also von den zwei Grössen Σa, Σb die eine gerade, die andere ungerade ist, so muss s ungerade sein; nun ist $\frac{3p-1}{4}$ gerade, also $\Sigma\beta-\Sigma\alpha$ *ungerade*.

Ist $p=8q+7$, so folgt aus (7.) in Verbindung mit $\Sigma\alpha+\Sigma\beta=p\cdot\frac{p-1}{2}$

$$\Sigma\alpha-\Sigma\beta = \frac{3p-1}{4},$$

also $\Sigma\alpha > \Sigma\beta$ und die Differenz eine *ungerade* Zahl.

7.

Für jede Primzahl p ist die Summe der quadratischen Reste kleiner als das Doppelte der Summe der bitrigonalen Reste.

Ist $p=4n+3$, so versteht sich dies von selbst, da $\Sigma a < \Sigma\alpha$.

Ist $p=4n+1$, so kann man statt der Summe der quadratischen Reste, die Summe der Reste der doppelten Quadrate nehmen, da $\Sigma a=\Sigma b$. Schreibt man nun die Reihe der ersten $\frac{p-1}{2}$ Bitrigonalzahlen und die Reihe der ersten $\frac{p-1}{2}$ doppelten Quadratzahlen unter einander

$$2,\quad 6,\quad 12,\quad 20,\quad \ldots$$
$$2,\quad 8,\quad 18,\quad 32,\quad \ldots,$$

so dass das allgemeine Glied der oberen Reihe $x(x+1)$ und das darunter stehende $2x^2$ ist, so ist die erste Zahl 2 in beiden Reihen dieselbe, man erhält aber jede folgende Zahl der unteren Reihe, indem man die darüber stehende der oberen Reihe und die dieser vorhergehende zusammen addirt. Bezeichnet man also die Reste der oberen Reihe, nach der Ordnung ihrer Glieder genommen, durch $A_1, A_2, \ldots A_{\frac{p-1}{2}}$, die der unteren durch $a_1, a_2, \ldots a_{\frac{p-1}{2}}$, so ist $a_1=A_1$. Dagegen, wenn $s>1$,

$$a_s = A_{s-1}+A_s-h_s p,$$

wo h_s gleich 1 oder gleich 0 ist.

Man hat also

$$\begin{aligned} a_1 &= A_1, \\ a_2 &= A_1+A_2-h_2 p, \\ a_3 &= A_2+A_3-h_3 p, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_{\frac{p-1}{2}} &= A_{\frac{p-3}{2}}+A_{\frac{p-1}{2}}-h_{\frac{p-1}{2}}\cdot p \end{aligned}$$

und

$$(10.)\qquad a_1+a_2+\cdots+a_{\frac{p-1}{2}} = 2(A_1+A_2+\cdots+A_{\frac{p-1}{2}})-A_{\frac{p-1}{2}}-lp,$$

wo $l = h_2 + h_3 + \cdots + h_{\frac{p-1}{2}}$, also l Null oder eine ganze positive Zahl, welche höchstens gleich $\frac{p-3}{2}$.

Schreibt man noch statt $A_{\frac{p-1}{2}}$ seinen Werth $\frac{p-1}{4}$, so hat man mithin

$$\Sigma a = 2\Sigma\alpha - \frac{p-1}{4} - lp,$$

womit der Satz für die Zahlen $4n+1$ bewiesen ist. Aus der letzten Gleichung folgt

$$2\Sigma\alpha = (p+1)\cdot\frac{p-1}{4} + lp.$$

Verbindet man dies mit der Gleichung (5.), so folgt

$$l = 2\left(\frac{p-1}{4} - r'\right) = 2n' = \nu \qquad (\S.\,3),$$

d. h. unter den $\frac{p-3}{2}$ Paaren A_1+A_2, A_2+A_3, ..., $A_{\frac{p-3}{2}}+A_{\frac{p-1}{2}}$ kommen so viele vor, welche grösser als p sind, als es bitrigonale Nichtreste giebt, die kleiner als $\frac{p}{2}$ sind.

Ist $p = 4n+3$, und man wiederholt die eben angestellte Betrachtung, so ist zu unterscheiden, ob $p = 8q+7$ oder $8q+3$. Im ersten Falle bleibt Alles wie früher, da 2 ein quadratischer Rest ist. Die Gleichung (10.) bleibt also unverändert, nur dass jetzt $A_{\frac{p-1}{2}} = \frac{3p-1}{4}$. Verbindet man die sich hieraus ergebende Gleichung

$$\Sigma a = 2\Sigma\alpha - \frac{3p-1}{4} - lp$$

mit der Gleichung (7.), so folgt

$$lp = \frac{p-1}{2}\cdot p - \Sigma a = \Sigma b.$$

Aus $R' - N' = \frac{\Sigma b - \Sigma a}{p}$ und $R' + N' = \frac{p-1}{2} = \frac{\Sigma b + \Sigma a}{p}$ folgt aber $R' = \frac{\Sigma b}{p}$, also

$$l = R'.$$

Ist $p = 8q+3$, so enthält die Reihe 2, 8, ... die quadratischen Nichtreste, und es folgt aus dem Obigen, dass man nun die Gleichung

$$\Sigma b = 2(A_1 + A_2 + \cdots + A_{\frac{p-1}{2}}) - A_{\frac{p-1}{2}} - lp$$

erhält. Setzt man wieder $\frac{3p-1}{4}$ statt $A_{\frac{p-1}{2}}$ und $p\cdot\frac{p-1}{2} - \Sigma a$ statt Σb, so

geht die letzte Gleichung in

$$\Sigma a - p\cdot\frac{p-1}{2}+\frac{3p-1}{4}-2\Sigma\alpha+lp$$

über. Verbindet man diese Gleichung mit Formel (6.), so findet man

$$3\Sigma a = p\cdot\frac{p-1}{2}+lp,$$

also

$$l=\frac{3\Sigma a}{p}-\frac{p-1}{2}=\frac{3\Sigma a-(\Sigma a+\Sigma b)}{p}=\frac{2\Sigma a-\Sigma b}{p}.$$

Nun ist $A_{\frac{p-3}{2}}=\frac{3p+1}{4}$, also $A_{\frac{p-3}{2}}+A_{\frac{p-1}{2}}>p$ und mithin l jedenfalls eine positive Zahl. Es ergiebt sich also aus dem Werthe von l, dass bei den Primzahlen von der Form $8q+3$ immer $\Sigma b<2\Sigma a$ ist.

Aus $\Sigma a+\Sigma b=\Sigma\alpha+\Sigma\beta$ und $\Sigma a<2\Sigma\alpha$ folgt auch noch

$$\Sigma a-\Sigma b<3\Sigma\alpha-\Sigma\beta.$$

Ist $p=4n+1$, so ist mithin $3\Sigma\alpha>\Sigma\beta$.

8.

Auf dieselbe Weise lässt sich zeigen, dass die Summe der quadratischen Reste einer Primzahl p auch kleiner als das Doppelte der Summe der *trigonalen* Reste ist.

Bezeichnet man nämlich durch $C_1, C_2, \ldots C_{\frac{p-1}{2}}$ die ersten $\frac{p-1}{2}$ trigonalen Reste, nach ihrer Ordnung und berücksichtigt die Formel

$$\frac{x(x+1)}{2}+\frac{(x+1)(x+2)}{2}=(x+1)^2,$$

so ergiebt sich, wenn man durch k_s eine Zahl bezeichnet, die gleich 1 oder gleich 0 ist,

$$\begin{aligned} a_1 &= C_1, \\ a_2 &= C_1+C_2-k_2\cdot p, \\ a_{\frac{p-1}{2}} &= C_{\frac{p-3}{2}}+C_{\frac{p-1}{2}}-k_{\frac{p-1}{2}}\cdot p, \end{aligned}$$

und man hat, wenn $\lambda=k_2+k_3+\cdots+k_{\frac{p-1}{2}}$, also $\lambda=0$ oder eine positive Zahl, die höchstens $\frac{p-3}{2}$ ist,

$$(10.)\qquad \Sigma a = 2\Sigma\gamma-C_{\frac{p-1}{2}}-\lambda p,$$

wo, je nachdem $p=8q+1$, $8q+5$, $8q+3$, $8q+7$, der Werth von $C_{\frac{p-1}{2}}=\frac{p-1}{8}$, $\frac{5p-1}{8}$, $\frac{3p-1}{8}$, $\frac{7p-1}{8}$ ist.

Hier findet man $\Sigma a - \Sigma b < 3\Sigma\gamma - \Sigma\delta$, mithin, wenn $p = 4n+1$, $3\Sigma\gamma > \Sigma\delta$.

9.

Nach der Bezeichnung des §. 2 ist, wenn x eine der Zahlen $1, 2, \ldots \frac{p-1}{2}$ bedeutet, $W[x(x+1)]$, entweder $W[x^2]+x$, oder $W[x^2]+x-p$, je nachdem $W[x^2]+x$ kleiner oder grösser als p ist. Bezeichnet k die Anzahl der Zahlen in der Reihe $1, 2, \ldots \frac{p-1}{2}$, für welche $W[x^2]+x$ grösser als p ist, also $W[x^2] > p-x$, so ist

$$\Sigma W[x(x+1)] = \Sigma\alpha = \Sigma a + \frac{p^2-1}{8} - kp.$$

Ist $p = 4n+1$, so verwandelt sich diese Formel in

$$\Sigma\alpha = (3p+1)\cdot\frac{p-1}{8} - kp.$$

Dieser Ausdruck, mit der Formel (5.) verglichen, giebt also

$$k = r'.$$

Ist $p = 8q+3$, so findet man aus Formel (6.)

$$kp = \frac{p^2-1}{8} - \frac{3p-1}{8},$$

also

$$k = \frac{p-3}{8} = r' = n'. \qquad (\S.\ 1)$$

Ist $p = 8q+7$, so folgt aus Formel (7.)

$$kp = \frac{p^2-1}{8} - \frac{3p-1}{8} - \frac{\Sigma b - \Sigma a}{2},$$

also

$$k = \frac{p-3}{8} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\Sigma b - \Sigma a}{p},$$

aber $\frac{p-3}{8} = \frac{1}{2}(r'+n')$ und $\frac{\Sigma b - \Sigma a}{p} = R' - N' = r' - n'$ (§. 1), demnach $k = n'$.

Man kann daher sagen: je nachdem $p = 4n+1$ oder $= 4n+3$, giebt es ebensoviel Zahlen x, welche kleiner als $\frac{p}{2}$ sind und die Eigenschaft haben, dass ihr quadratischer Rest grösser als $p-x$ ist, als es quadratische Reste oder quadratische Nichtreste giebt, die kleiner als $\frac{p}{4}$ sind.

Setzt man, wenn $p = 8q+7$, in dem gefundenen Werthe von k statt $\frac{p-3}{8}$ den Ausdruck $\frac{p-1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\Sigma a + \Sigma b}{p} - \frac{1}{4}$, so findet man

$$k = \frac{3\Sigma a - \Sigma b}{4p} - 1,$$

woraus sich ergiebt, dass für $p = 8q+7$, immer $3\Sigma a > \Sigma b$.

10.

Man bezeichne durch T_1, T_2, T_3, T_4 bezüglich die Anzahl der trigonalen Reste, welche zwischen 0 und $\frac{p}{4}$, $\frac{p}{4}$ und $\frac{p}{2}$, $\frac{p}{2}$ und $\frac{3p}{4}$, $\frac{3p}{4}$ und p enthalten sind, und durch t_1, t_2, t_3, t_4 bezüglich die Anzahl der trigonalen Nichtreste zwischen diesen Grenzen.

Nun erhält man die bitrigonalen Reste, welche zwischen 0 und $\frac{p}{2}$ liegen, indem man die T_1 trigonalen Reste zwischen 0 und $\frac{p}{4}$, und die T_3 trigonalen Reste zwischen $\frac{p}{2}$ und $\frac{3p}{4}$ mit 2 multiplicirt, und zwar erhält man aus T_1 die geraden, aus T_3 die ungeraden bitrigonalen Reste zwischen 0 und $\frac{p}{2}$. Ferner erhält man die bitrigonalen Reste, welche zwischen $\frac{p}{2}$ und p liegen, indem man die T_2 trigonalen Reste zwischen $\frac{p}{4}$ und $\frac{p}{2}$, und die T_4 trigonalen Reste zwischen $\frac{3p}{4}$ und p mit 2 multiplicirt, und zwar aus T_2 die geraden, aus T_4 die ungeraden bitrigonalen Reste. Ebenso ist es bei den Nichtresten.

Ist nun $p = 8q+1$, so folgt (§. 5), dass T_1 und T_3 *gerade* Zahlen sind, und ferner

$$T_1 + T_3 = B_1 + B_2 = 2r' \qquad (\S.\ 4).$$

Ferner

$$T_2 = T_4 = \frac{p-1}{4} - r' = n'.$$

Ist $p = 8q+5$, so sind T_1 und T_3 *ungerade* Zahlen, man hat aber wieder

$$T_1 + T_3 = 2r'; \quad T_2 = T_4 = n'.$$

Ebenso findet man in beiden Fällen

$$t_1 + t_3 = 2n'; \quad t_2 = t_4 = r'.$$

Aus $t_1 + T_1 = \frac{p-1}{4}$ folgt, dass jedenfalls t_1 und daher auch t_3 eine *gerade* Zahl ist.

Ist $p = 8q+3$, so folgt unmittelbar aus §. 5

$$T_1 = t_3 - 1, \quad T_2 = t_2 + 1, \quad T_3 = t_1, \quad T_4 = t_4.$$

Aus $T_2 + t_2 = \frac{p+1}{4}$ folgt mithin

$$T_2 = \frac{p+5}{8}, \qquad t_2 = \frac{p-3}{8}$$

und aus $T_4+t_4=\frac{p-3}{4}$

$$T_4=t_4=\frac{p-3}{8},$$

also da $T_1+T_2+T_3+T_4=\frac{p-1}{2}=t_1+t_2+t_3+t_4$,

$$T_1+T_3=\frac{p-3}{4}; \qquad t_1+t_3=\frac{p+1}{4}.$$

Ist $p=8q+7$, so hat man, wie im vorhergehenden Falle,

$$T_3=t_1; \qquad T_1=t_3-1,$$

ferner

$$T_2=t_2; \qquad T_4=t_4+1.$$

Hieraus ergiebt sich $T_2=T_4=\frac{p+1}{8}$; $t_2=\frac{p+1}{8}$; $t_4=\frac{p-7}{8}$ und wieder

$$T_1+T_3=\frac{p-3}{4}, \qquad t_1+t_3=\frac{p+1}{4}.$$

11.

Da $x(x+1)$ immer eine gerade Zahl ist, so ist, wenn $x(x+1)=mp+r$ und r gerade, auch m gerade, also $\frac{x(x+1)}{2}=\frac{mp}{2}+\frac{r}{2}$; ist dagegen r ungerade, also auch m, so ist $\frac{x(x+1)}{2}=\frac{m-1}{2}\cdot p+\frac{p+r}{2}$, d. h. der Rest von $\frac{x(x+1)}{2}$ ist $\frac{r}{2}$ oder $\frac{p+r}{2}$, je nachdem r gerade oder ungerade. Bezeichnet man daher durch u die Anzahl der ungeraden bitrigonalen Reste, so dass mithin $u=T_3+T_4$, so ist

$$(11.) \qquad \Sigma\gamma=\frac{\Sigma\alpha}{2}+\frac{up}{2}.$$

Da nun $\Sigma\gamma+\Sigma\delta=\Sigma\alpha+\Sigma\beta$, so folgt

$$(12.) \qquad \Sigma\delta-\Sigma\gamma=\Sigma\beta-up.$$

Aus (11.) ergiebt sich, dass $\Sigma\alpha$ und u zugleich gerade oder ungerade sind, also, wenn $p=8q+7$, nach Formel (7.) u gerade oder ungerade, je nachdem q ungerade oder gerade. Nun wurde bewiesen, dass in diesem Falle $T_4=q+1$, also muss T_3 immer gerade sein, mithin auch t_1, und da $T_1+T_3=2q+1$, so ist T_1 ungerade und daher t_3 gerade.

Ferner folgt aus (11.), da $\Sigma\alpha+\Sigma\beta=p\cdot\frac{p-1}{2}$, dass, für $p=4n+1$, $\Sigma\beta$ zugleich mit $\Sigma\alpha$ und also auch mit u gerade oder ungerade ist, dagegen,

für $p=4n+3$, $\Sigma\beta$ ungerade oder gerade, je nachdem u gerade oder ungerade. Aus (12.) folgt hiernach:

Je nachdem $p=4n+1$ oder $=4n+3$, ist $\Sigma\delta-\Sigma\gamma$ gerade oder ungerade.

12.

Ist $p=4n+1$, dann sind, wie ich in meinem früheren Aufsatze (§. 2 und §. 3) gezeigt habe, M und $2M$ trigonale Reste, und, abgesehen von diesen zweien, lassen sich die übrigen Reste immer paarweise so zusammenstellen, dass ihre Summe $\equiv 2M$, d. h. $=\frac{p-1}{4}$ oder $p+\frac{p-1}{4}$ ist. Ist $p=8q+1$, so ist $M=\frac{p-1}{8}$, dagegen ist $M=\frac{5p-1}{8}$, wenn $p=8q+5$; also liegt M im ersten Falle zwischen 0 und $\frac{p}{4}$, im zweiten zwischen $\frac{p}{2}$ und $\frac{3p}{4}$. Da $T_2=T_4$, so hat man daher, wenn $p=8q+1$,

$$\Sigma\gamma = \frac{p-1}{8}+\frac{p-1}{4}+\frac{T_1-2}{2}\cdot\frac{p-1}{4}+\left(T_2+\frac{T_3}{2}\right)\left(p+\frac{p-1}{4}\right)$$

und, wenn $p=8q+5$,

$$\Sigma\gamma = \frac{5p-1}{8}+\frac{p-1}{4}+\frac{T_1-1}{2}\cdot\frac{p-1}{4}+\left(T_2+\frac{T_3-1}{2}\right)\left(p+\frac{p-1}{4}\right).$$

Setzt man nun statt T_2 und T_1+T_3 die in (10.) gefundenen Werthe, so findet man in beiden Fällen

$$(13.)\qquad \Sigma\gamma = \frac{p+1}{2}\cdot\frac{p-1}{8}+\left(\frac{T_3}{2}+n'\right)p.$$

Demnach

$$(14.)\qquad \Sigma\delta = \frac{7p-1}{2}\cdot\frac{p-1}{8}-\left(\frac{T_3}{2}+n'\right)p$$

und

$$\Sigma\delta-\Sigma\gamma = (3p-1)\cdot\frac{p-1}{8}-(T_3+2n')\,p$$

oder auch

$$(15.)\qquad \Sigma\delta-\Sigma\gamma = (2r'-T_3)p-(p+1)\cdot\frac{p-1}{8}.$$

13.

Die Anzahl der ungeraden bitrigonalen Reste einer Primzahl p ist immer kleiner als $\frac{p}{4}$.

Sei zuerst $p = 4n+1$. In diesem Falle ist (§. 2)

$$W\left[\left(\frac{p-1}{2}-x\right)\left(\frac{p+1}{2}-x\right)\right] = W[x^2]+n \quad \text{oder} \quad = W[x^2]+n-p,$$

je nachdem $W[x^2]$ eine der Zahlen 0, 1, . . . $3n$, oder $3n+1$, . . . $4n$ ist. Man erhält also die sämmtlichen bitrigonalen Reste, indem man zu den quadratischen Resten der Zahlen 0, 1, . . . $\frac{p-3}{2}$ noch n addirt, wenn der quadratische Rest kleiner als $\frac{3p}{4}$, dagegen $n-p$ dazu addirt, wenn der quadratische Rest grösser als $\frac{3p}{4}$.

Ist nun n eine gerade Zahl, also $p = 8q+1$, so gehört n, welches ein quadratischer Rest ist, zu den geraden quadratischen Resten zwischen 0 und $\frac{p}{4}$, deren Zahl G_1 ist (§. 1, *b*). Indem man zu diesen G_1 quadratischen Resten n addirt, erhält man G_1 *gerade* bitrigonale Reste und ebenso, indem man zu den U_1 ungeraden quadratischen Resten, die zwischen 0 und $\frac{p}{4}$ liegen, n addirt, erhält man U_1 *ungerade* bitrigonale Reste. Nun entsprechen den U_1 ungeraden quadratischen Resten zwischen 0 und $\frac{p}{4}$ ebensoviel *gerade* quadratische Reste zwischen $\frac{3p}{4}$ und p, und indem man zu letzteren $n-p$ addirt, erhält man ebensoviel *ungerade* bitrigonale Reste. Den G_1-1 geraden quadratischen Resten, welche ausser n zwischen den Grenzen 0 und $\frac{p}{4}$ liegen, entsprechen G_1-1 *ungerade* quadratische Reste zwischen $\frac{3p}{4}$ und p, aus welchen man also wieder durch die Addition von $n-p$ ebensoviel *gerade* bitrigonale Reste erhält. Dem n selbst entspricht $p-n$, aus welchem sich durch die Addition von $n-p$ nur Null ergiebt.

Aus den quadratischen Resten zwischen 0 und $\frac{p}{4}$ und zwischen $\frac{3p}{4}$ und p entspringen mithin $2G_1-1$ gerade und $2U_1$ ungerade bitrigonale Reste; zu den geraden ist aber noch n selbst hinzuzufügen, welches durch die Addition von n zu Null entsteht, so dass man nun $2G_1$ gerade und $2U_1$ ungerade bitrigonale Reste hat. Da nun ferner zwischen $\frac{p}{4}$ und $\frac{3p}{4}$ ebensoviel gerade als ungerade quadratische Reste liegen, aus welchen mithin durch die Addition von n auch ebensoviel gerade als ungerade bitrigonale Reste entspringen und $G_1 > U_1$ (§. 1, *c*), so ist mithin bewiesen, dass, wenn $p = 8q+1$, mehr gerade

als ungerade bitrigonale Reste vorhanden sind. Nun ist die Anzahl aller bitrigonalen Reste gleich $\frac{p-1}{2}$, also die Anzahl der ungeraden kleiner als $\frac{p-1}{4}$.

Ist n ungerade und also $p = 8q+5$, so erhält man aus den G_1 geraden quadratischen Resten durch Hinzufügung von n ebensoviel *ungerade* bitrigonale Reste und aus den U_1 ungeraden quadratischen Resten ebensoviel *gerade* bitrigonale Reste. Ferner entsprechen den G_1 Resten ebensoviel ungerade quadratische Reste zwischen $\frac{3}{4}p$ und p und daher, durch Hinzufügung von $n-p$, ebensoviel *ungerade* bitrigonale Reste. Den U_1-1 ungeraden quadratischen Resten, welche ausser n zwischen 0 und $\frac{p}{4}$ liegen, entsprechen ebensoviel gerade quadratische Reste zwischen $\frac{3p}{4}$ und p und daher auch ebensoviel *gerade* bitrigonale Reste. Aus den quadratischen Resten zwischen 0 und $\frac{p}{4}$ und $\frac{3p}{4}$ und p entspringen also $2G_1$ ungerade und $2U_1-1$ gerade bitrigonale Reste, zu den ungeraden ist noch n selbst hinzuzufügen, so dass man $2G_1+1$ ungerade und $2U_1-1$ gerade hat. Nun ist in diesem Falle $G_1 < U_1$ (§. 1, *c*) und mithin $2G_1+1$ höchstens gleich $2U_1-1$. Da nun wieder aus den zwischen $\frac{p}{4}$ und $\frac{3p}{4}$ liegenden quadratischen Resten ebensoviel gerade als ungerade bitrigonale Reste entspringen, so folgt, dass es überhaupt, wenn $p = 8q+5$, nur höchstens ebensoviel ungerade als gerade bitrigonale Reste, also höchstens $\frac{p-1}{4}$ ungerade bitrigonale Reste giebt.

Ist $p = 4n+3$, so erhält man, wie aus §. 2 folgt, die bitrigonalen Reste aus den quadratischen, indem man zu den quadratischen Resten der Zahlen 0, 1, 2, ... $2n-1$, je nachdem diese Reste kleiner als $\frac{p}{4}$ oder grösser als $\frac{p+1}{4}$ sind, noch $3n+2$ oder $3n+2-p$ addirt (während der Rest $\frac{p+1}{4}$, wenn man $3n+2$ dazu addirt, auf Null führt).

Man kann dies aber in anderer Weise ausdrücken. Man bringe nämlich diese quadratischen Reste in drei Abtheilungen, indem man bezüglich zur 1sten, 2ten, 3ten Abtheilung die Reste rechnet, welche kleiner als $\frac{p}{4}$, zwischen $\frac{p}{4}$ und $\frac{3p}{4}$ oder zwischen $\frac{3p}{4}$ und p enthalten sind. Diejenigen unter den zwischen 0 und $\frac{p}{4}$ liegenden Zahlen 1, 2, ... n, welche quadratische Nichtreste sind, entsprechen den quadratischen Resten zwischen $\frac{3p}{4}$ und p, indem

jedem solchen Nichtreste α ein Rest $p-\alpha$ entspricht. Nun soll man, um aus $p-\alpha$ einen bitrigonalen Rest zu bilden, $3n+2-p$ dazu addiren. Statt dessen kann man $3n+2$ zu $-\alpha$ addiren. Man sieht demnach, dass man die bitrigonalen Reste, welche aus den zwischen $\frac{3p}{4}$ und p liegenden quadratischen Resten entspringen, erhält, indem man zu den mit negativen Zeichen genommenen quadratischen Nichtresten zwischen 0 und $\frac{p}{4}$ noch $3n+2$ addirt. Man kann daher sagen, man erhält die sämmtlichen bitrigonalen Reste, welche aus den zwischen 0 und $\frac{p}{4}$ liegenden quadratischen Resten (Null eingeschlossen) und den zwischen $\frac{3p}{4}$ und p liegenden entspringen, indem man zu den Zahlen $0, 1, \ldots n$, welche theils mit positiven theils mit negativen Zeichen zu nehmen sind, noch $3n+2$ addirt.

Sei nun $p=8q+7$, also n und $3n+2$ ungerade Zahlen. Indem man $3n+2$ zu den Zahlen $0, 1, 2, \ldots n$ addirt, mögen nun diese Zahlen mit dem positiven oder negativen Zeichen genommen werden, erhält man ebensoviel gerade als ungerade Zahlen, d. h. unter den bitrigonalen Resten, welche aus den quadratischen, die kleiner als $\frac{p}{4}$ sind (Null eingeschlossen), und den quadratischen zwischen $\frac{3p}{4}$ und p entspringen, giebt es *ebensoviel* gerade als ungerade. Hierzu kommen nun noch die bitrigonalen Reste, welche aus den zwischen $\frac{p}{4}$ und $\frac{3p}{4}$ liegenden quadratischen Resten entspringen; die Zahl der geraden quadratischen Reste zwischen diesen Grenzen ist G_2+G_3, von welchen jedoch der Rest $n+1=\frac{p+1}{4}$, der hier nicht in Betracht kommt, abgezogen werden muss, so dass nur G_2+G_3-1 gerade quadratische Reste übrig bleiben. Aus diesen entspringen, indem man die gerade Zahl $3n+2-p$ hinzuaddirt, ebensoviel *gerade* bitrigonale Reste, und ebenso entspringen aus den U_2+U_3 ungeraden quadratischen Resten zwischen diesen Grenzen ebensoviel ungerade bitrigonale Reste. Da nun, wenn $p=8q+7$, nach §. 1, *e*, $G_2>U_2$ und $G_3>U_3$ und daher $G_2+G_3-1>U_2+U_3$, so giebt es mehr gerade als ungerade bitrigonale Reste, die Zahl der letzteren ist also kleiner als $\frac{p}{4}$, d. h. es giebt höchstens $\frac{p-3}{4}$ ungerade bitrigonale Reste.

Ist $p=8q+3$, also n und $3n+2$ gerade Zahlen, so erhält man, indem man $3n+2$ zu den Zahlen $0, 1, 2, \ldots n$ addirt, eine gerade Zahl mehr als

ungerade, die Wiederholung der vorhergehenden Betrachtung zeigt daher, dass in diesem Falle aus den quadratischen Resten, welche kleiner als $\frac{p}{4}$ (Null eingeschlossen), und den quadratischen Resten zwischen $\frac{3p}{4}$ und p ein gerader bitrigonaler Rest mehr als ungerade entspringt. Aus den G_2+G_3 geraden quadratischen Resten zwischen $\frac{p}{4}$ und $\frac{3p}{4}$ entspringen durch Hinzufügung von $3n+2-p$ ebensoviel ungerade bitrigonale Reste, und aus den U_2+U_3-1 ungeraden quadratischen Resten zwischen diesen Grenzen, welche übrig bleiben, wenn man von dem nicht in Betracht kommenden Reste $n+1$ absieht, entspringen ebensoviel gerade bitrigonale Reste. Nun ist in diesem Falle (§. 1, *e*)

$$U_2+U_3-1 \gtreqless G_2+G_3.$$

Es giebt also jedenfalls mehr gerade bitrigonale Reste als ungerade, und daher ist die Anzahl der letzteren höchstens $\frac{p-3}{4}$. Fasst man alles Vorhergehende zusammen, so ist mithin der Satz bewiesen: die Anzahl der ungeraden bitrigonalen Reste ist kleiner als $\frac{p}{4}$. Mit anderen Worten: je nachdem $p=4n+1$ oder $4n+3$, ist die Anzahl der *ungeraden* bitrigonalen Reste $\lesseqgtr \frac{p-1}{4}$ oder $\lesseqgtr \frac{p-3}{4}$ und daher die Anzahl der *geraden* bitrigonalen Reste im ersten Falle $\gtreqless \frac{p-1}{4}$, im zweiten $\gtreqless \frac{p+1}{4}$. Man kann diesen Satz aber noch in anderer Gestalt aussprechen. Es wurde nämlich oben (§. 11) bemerkt, dass die Anzahl der trigonalen Reste, welche grösser als $\frac{p}{2}$ sind, der Anzahl der ungeraden bitrigonalen Reste und also die Anzahl der trigonalen Reste, welche kleiner als $\frac{p}{2}$ sind, der Anzahl der geraden bitrigonalen Reste gleich ist. Man hat daher auch den Satz:

Je nachdem $p=4n+1$ oder $=4n+3$, ist $T_3+T_4 \lesseqgtr \frac{p-1}{4}$ oder $\lesseqgtr \frac{p-3}{4}$ und $T_1+T_2 \gtreqless \frac{p-1}{4}$ oder $\gtreqless \frac{p+1}{4}$.

Berücksichtigt man die in §. 10 gefundenen Werthe von T_4, so folgt hieraus weiter, dass, wenn $p=4n+1$, T_3 nicht grösser als r' sein kann und also T_1 nicht kleiner als r', da $T_1+T_3=2r'$ (§. 10). Ist $p=8q+3$, so ist $T_3 \lesseqgtr \frac{p-3}{8}$, und ist $p=8q+7$, so ist $T_3 \lesseqgtr \frac{p-7}{8}$, also in beiden Fällen $T_3 \lesseqgtr q$ und $T_1 \gtreqless q$ im ersten und $\gtreqless q+1$ im zweiten Falle.

14.

Hieraus folgt weiter: *Die Summe der trigonalen Nichtreste jeder ungeraden Primzahl ist grösser als die Summe der trigonalen Reste.*

Ist nämlich $p = 4n+1$, so ist, da T_3 nicht grösser als r' sein kann, $2r' - T_3 \geqq r'$, aber $r' > \frac{p-1}{8}$ (§. 1, *a*) mithin, da $2r' - T_3$ eine ganze Zahl ist, mindestens $2r' - T_3 = \frac{p-1}{8} + 1$, also, nach Formel (15.), $\Sigma\delta - \Sigma\gamma$ positiv. Ist $p = 4n+3$, so ist zu unterscheiden zwischen $p = 8q+3$ und $p = 8q+7$. Im ersten Falle folgt aus Formel (12.), wenn man den in §. 6 gefundenen Werth $\Sigma\beta = \Sigma b - \frac{3p-1}{8}$ berücksichtigt,

$$\Sigma\delta - \Sigma\gamma = \Sigma b - \frac{3p-1}{8} - up.$$

Nun ist in diesem Falle, wie oben gezeigt wurde, höchstens $u = \frac{p-3}{4}$, also

$$\Sigma\delta - \Sigma\gamma \geqq \Sigma b - \frac{3p-1}{8} - \frac{p-3}{4} \cdot p,$$

aber da Σb ein Vielfaches von p und grösser als Σa, also mindestens $\frac{p+1}{4} \cdot p$ ist, so folgt

$$\Sigma\delta - \Sigma\gamma \geqq p - \frac{3p-1}{8},$$

also positiv.

Ist $p = 8q+7$, so ist (§. 6)

$$\Sigma\beta = \Sigma\alpha - \frac{3p-1}{4}$$

und nach Formel (7.)

$$\Sigma\beta = \frac{p-1}{4} \cdot p - \frac{3p-1}{8},$$

also nach Formel (12.)

$$\Sigma\delta - \Sigma\gamma = \frac{p-1}{4} \cdot p - \frac{3p-1}{8} - up,$$

mithin, da $u \leqq \frac{p-3}{4}$,

$$\Sigma\delta - \Sigma\gamma \geqq \frac{p+1}{8}, \text{ also positiv.}$$

Ist $p = 4n+1$, so ist $\Sigma\gamma + \Sigma\delta = \Sigma a + \Sigma b = 2\Sigma a$, nun ist $\Sigma\delta > \Sigma\gamma$, also $\Sigma\delta > \Sigma a$ und $\Sigma\gamma < \Sigma a$.

Aus den in §. 12 gefundenen Werthen von $\Sigma\gamma$ und $\Sigma\delta$ kann man aber die Differenz $\Sigma\delta - \Sigma a$ oder $\Sigma a - \Sigma\gamma$ noch genauer bestimmen. Man

hat nämlich

$$\Sigma a - \Sigma\gamma = p\cdot\frac{p-1}{4} - \frac{p+1}{2}\cdot\frac{p-1}{8} - \left(\frac{T_3}{2}+n'\right)p.$$

Nun ist T_3 höchstens gleich r', also da $\frac{r'+n'}{2} = \frac{p-1}{8}$, so ist

$$\Sigma a - \Sigma\gamma \geqq \frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-1}{8} - \frac{n'}{2}\cdot p,$$

aber $n' < \frac{p-1}{8}$, also höchstens $n' = \frac{p-5}{8}$, mithin

$$\Sigma a - \Sigma\gamma = \Sigma\delta - \Sigma a \geqq \frac{3p+1}{16}.$$

Ist $p = 4n+3$, so ist wieder $\Sigma\gamma + \Sigma\delta = \Sigma a + \Sigma b$, also da $\Sigma b > \Sigma a$,

$$\Sigma\delta > \Sigma a; \quad \Sigma\gamma < \Sigma b.$$

Ist $p = 4n+1$ und vergleicht man den Werth von $\Sigma\gamma$ mit Formel (5.), so ergiebt sich

$$\Sigma\gamma - \Sigma\alpha = \frac{T_3}{2}p - \frac{p+1}{2}\cdot\frac{p-1}{8}.$$

Da nun $\frac{T_3}{2}$ höchstens gleich $\frac{r'}{2}$ und r' nicht grösser als $\frac{p-1}{4}$ sein kann, so ist

$$\Sigma\gamma - \Sigma\alpha \leqq \left(\frac{p-1}{4}\right)^2.$$

Diese Differenz kann auch negativ sein.

Aus $\Sigma\delta > \Sigma\gamma$ folgt auch noch, dass immer $\Sigma\beta > up$.

15.

Ist $p = 8q+1$, so geht die Formel (10.) mit Berücksichtigung der Formel (13.) in

$$\lambda p = \left(T_3 + 2n' - \frac{p-1}{8}\right)p$$

oder

$$\lambda = T_3 + 2n' - q$$

über. Nun ist T_3 gerade (§. 10), also λ zugleich mit q gerade oder ungerade. Da $r'+n' = 2q$ und $T_3 \leqq r'$, so ist $\lambda \leqq r' + 2n' - q$, d. h. $\lambda \leqq n'+q$, und da $n' < q$ (§. 1, *a*), so ist $\lambda < 2q$.

Ist $p = 8q+5$, so findet man

$$\lambda = T_3 + 2n' - (q+1).$$

Nun ist T_3 in diesem Falle ungerade und höchstens r', mithin wieder λ zu-

gleich mit q gerade oder ungerade und, da $r'+n'=2q+1$, auch in diesem Falle $\lambda \leqq n'+q$, also da n' höchstens gleich q, so ist λ höchstens gleich $2q$.

Ist $p=8q+3$, so hat man zunächst nach Formel (10.)

$$\lambda p = 2\Sigma\gamma - \Sigma a - \frac{3p-1}{8}$$

und mit Rücksicht auf Formel (6.)

$$\lambda p = 2\Sigma\gamma - \Sigma\alpha$$

oder (nach Formel (11.))

$$\lambda = u = T_3 + T_4.$$

Nun ist in diesem Falle $T_4 = q$ (§. 10), also

$$\lambda = T_3 + q,$$

und da $T_3 \leqq q$, so ist $\lambda \leqq 2q$.

Ist $p=8q+7$, so ist $\lambda p = 2\Sigma\gamma - \Sigma a - \frac{7p-1}{8}$ oder (Formel (11.))

$$\lambda p = \Sigma\alpha - \Sigma a + up - \frac{7p-1}{8};$$

aber (Formel (7.)) $\Sigma\alpha - \Sigma a = \frac{3p-1}{8} + \frac{\Sigma b - \Sigma a}{2}$ und $\frac{\Sigma b - \Sigma a}{p} = 2r' - \frac{p-3}{4}$, mithin

$$\lambda = u + r' - \frac{p+1}{8},$$

oder da $T_4 = \frac{p+1}{8}$,

$$\lambda = T_3 + r',$$

also da $T_3 \lessgtr q$ und r' mindestens $= q+1$, so ist $\lambda < 2r'$.

Göttingen, im Februar 1869.

Ueber die Invarianten binärer Formen bei höheren Transformationen.

(Von Herrn *Gordan* zu Giessen.)

Die Theorie der linearen Transformation ganzer homogener Functionen ist seit langer Zeit Gegenstand der Untersuchungen der Mathematiker gewesen. Dagegen hat sich für höhere Transformationen bisher mehr das Bedürfniss gezeigt, als dass man sie auszuführen versucht hätte.

Man kann hierher die Untersuchungen rechnen, welche bei den algebraischen Gleichungen gemacht sind, indem man als neue Unbekannte eine ganze Function der ursprünglichen einführte; wie zum Beispiel Herr *Hermite* (Comptes Rendus tome 46 pag. 961) im Sinne der Invariantentheorie diese dazu benutzt, um bei der Transformation der Gleichungen vierten Grades die erste Invariante verschwinden zu machen. Aber vollständig treten die Eigenschaften einer solchen Transformation erst hervor, wenn man die neue Unbekannte als *Quotienten* zweier Functionen der ursprünglichen Variabeln einführt, oder allgemeiner, wenn man die homogenen neuen Variabeln proportional homogenen Functionen gleich hoher Ordnung der ursprünglichen Variabeln setzt. In diesem Sinne lässt sich die *Riemann*sche Transformation der Fundamentalgleichung einer Classe von *Abel*schen Functionen als höhere Transformation einer zweifach binären Form auffassen, und so haben Herr *Clebsch* und ich in unserer „Theorie der *Abel*schen Functionen“ dieselbe Transformation einer ternären Form dargestellt (vgl. auch *Cayley*, London Mathematical Society III.).

Man macht von diesem Gesichtspunkte aus sofort die Bemerkung, dass, wenn

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varrho y_1 &= \varphi_1(x_1, \ldots x_n), \\ \varrho y_2 &= \varphi_2(x_1, \ldots x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \varrho y_n &= \varphi_n(x_1, \ldots x_n) \end{aligned}$$

transformirt wird, die neue Form:

$$F(y_1, \ldots y_n)$$

zu Coefficienten simultane Invarianten von den Formen f, $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ hat, und dass also die Invarianten der neuen Form, welche sich aus diesen zusammensetzen, ebenfalls simultane Invarianten derselben sind. Die Theorie der höheren Transformationen tritt so mit der linearen Transformation in unmittelbare Verbindung.

Ich beabsichtige im Folgenden einen Beitrag zu der höheren Transformation binärer Formen zu liefern. Indem ich zunächst einige allgemeine Principien kurz auseinandersetze, wende ich sie auf die Transformation zweiter Ordnung an, führe diese bei Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades aus, indem ich die Werthe der Invarianten der transformirten Gleichung angebe, und benutze die höhere Transformation insbesondere bei den Gleichungen vierten Grades dazu, nach dem Beispiele des Herrn *Hermite*, eine oder die andere ihrer Invarianten verschwinden zu machen.

Erste Abtheilung.

Allgemeine Eigenschaften der Invarianten einer transformirten Form.

§. 1.

Transformation einer Gleichung.

Bekanntlich führt die Elimination der Variabeln x_1, x_2 aus den homogenen Gleichungen n^{ter} und $n_1{}^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(1.) \quad f = 0 \quad (\text{symbolisch } (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n = a_x^n = b_x^n \ldots),$$

$$(2.) \quad \varphi = \varphi_1 x_1^n + \varphi_2 x_1^{n-1} x_2 + \varphi_3 x_1^{n-2} x_2^2 \ldots \quad (\text{symbolisch } \varphi_x^n = \varphi_{1x}^n \ldots)$$

auf eine Resultante $R_{f\varphi}$, welche in den Coefficienten der Formen f und φ die Dimensionen n_1 und n besitzt; zerfallen die Ausdrücke f und φ in die Factoren:

$$(3.) \quad \varphi = \alpha_x \alpha'_x \alpha''_x \ldots \alpha_x^{(n_1)},$$

$$(4.) \quad f = (x x_1)(x x_2)(x x_3) \ldots (x x_n),$$

wobei (xx_i) einen Ausdruck der Form „$x_1(x_i)_2 - x_2(x_i)_1$“ bedeutet, so erhalten wir für $R_{f\varphi}$ bis auf constante Factoren die Werthe:

$$(5.) \qquad R_{f\varphi} = (a\alpha)^n (b\alpha')^n (c\alpha'')^n \ldots,$$

$$(6.) \qquad R_{f\varphi} = \varphi_x^{n_1} \varphi_{x_1}^{n_1} \varphi_{x_2}^{n_1} \ldots.$$

Die Wurzeln der Gleichung

$$f = 0,$$

die man eigentlich $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)_i$ nennen müsste, werde ich bisweilen kurz mit x_i bezeichnen.

Setzen wir nun statt der 2ten Form φ das Binom

$$z_1 l + z_2 m,$$

in welchem die Grössen z zwei neue Variable, die Formen:

$$(7.) \qquad l = l_1 x_1^{n_1} + l_2 x_1^{n_1-1} x_2 + l_3 x_1^{n_1-2} x_2^2 \ldots \qquad \text{(symbolisch } l_x^{n_1} = l_{1x}^{n_1} \ldots),$$

$$(8.) \qquad m = m_1 x_1^{n_1} + m_2 x_1^{n_1-1} x_2 + m_3 x_1^{n_1-2} x_2^2 \ldots \qquad \text{(symbolisch } m_x^{n_1} = m_{1x}^{n_1})$$

zwei beliebige Formen n_1^{ten} Grades bedeuten, so wird $R_{f\varphi}$ eine Form n^{ten} Grades in den Variabeln z.

Wir nennen diese Form, da sie aus der ursprünglichen Form f mittelst der Substitution:

$$-\frac{l}{m} = \frac{z_2}{z_1}$$

entsteht, die transformirte Form und bezeichnen sie symbolisch durch:

$$(9.) \qquad R_{f\varphi} = r_z^n.$$

Die Gleichung:

$$(10.) \qquad \varphi = z_1 l + z_2 m = 0$$

wird die Substitutionsgleichung, die Coefficienten der Formen l und m werden die Substitutionscoefficienten genannt.

Die Wurzeln der Gleichung

$$r_z^n = 0$$

werden aus denen von f gefunden, indem man in „$-\frac{l}{m}$“ die Wurzeln der gegebenen Gleichung einführt, also mittelst der Formel:

$$(11.) \qquad -\left(\frac{l}{m}\right)_i = z_i.$$

§. 2.

Thema der Abhandlung.

Wir bezeichnen die Invarianten der ursprünglichen Form durch J_f oder schlechthin J, die entsprechenden Invarianten der transformirten Form durch J_R und stellen uns in dieser Untersuchung die Aufgabe, *die Eigenschaften der Ausdrücke J_R zu studiren, insbesondere werden wir uns mit der Frage beschäftigen, wie sich die Invarianten J_R durch die einfachsten simultanen Invarianten der Formen f und φ darstellen lassen.*

§. 3.

Die Combinationen, in denen die Substitutionscoefficienten in den Invarianten der transformirten Form auftreten.

Die erste Frage, die sich unseren Blicken darbietet, geht dahin, in welchen Combinationen die Substitutionscoefficienten in den Invarianten J_R vorkommen.

Die Resultante $R_{f\varphi}$ ist in den Coefficienten der Form φ eine homogene Form n^{ten} Grades, wir können sie symbolisch darstellen durch:

$$R_{f\varphi} = (\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \alpha_3\varphi_3 \ldots)^n = \alpha_\varphi^n = \beta_\varphi^n \ldots .$$

Setzt man in dieser Formel für φ seinen Werth $z_1 l + z_2 m$, so wird

$$R_{f\varphi} = (z_1\alpha_l + z_2\alpha_m)^n .$$

Man erhält die Invarianten dieser Form aus denen der ursprünglichen f, indem man die Symbole a_1, a_2, b_1, b_2, ... durch die Symbole ersetzt α_l, α_m, β_l, β_m, ...

Herr *Clebsch* hat nun Bd. 59 dieses Journals p. 13 bewiesen, dass die Invarianten der Form f aus symbolischen Producten bestehen, deren Factoren die Form haben:

$$a_1 b_2 - b_1 a_2 .$$

Wenden wir diesen Satz auf unseren Fall an, so sehen wir, dass die Invarianten J_R aus Producten bestehen, deren Factoren die Form haben:

$$\alpha_l \beta_m - \beta_l \alpha_m ,$$

die Substitutionscoefficienten mithin in denselben Combinationen enthalten, wie die simultane Covariante

$$(1.) \qquad l(x)m(y) - m(x)l(y) = \theta(xy),$$

worin die Zeichen $l(x)$, $m(x)$, $l(y)$, $m(y)$ die Functionen l, m bedeuten, geschrieben mit den Variabeln x_1, x_2 oder y_1, y_2. Es ist daher symbolisch:

$$l(x) = l_x^{n_1}; \quad m(x) = m_x^{n_1}; \quad l(y) = l_y^{n_1}; \quad m(y) = m_y^{n_1}.$$

Die Invarianten J_R sind daher simultane Invarianten der Formen f und $\theta(xy)$.

§. 4.

Fortsetzung.

Die Formen l und m besitzen eine Reihe von simultanen Covarianten, welche linear für die Coefficienten jeder der beiden Formen sind, und welche alle die Form haben

$$(1.) \qquad \vartheta_\nu = (lm)^{2\nu+1} l_x^\mu m_x^\mu \qquad (\text{symbolisch } \vartheta_{x,\nu}^{2\mu}),$$

wobei wir

$$(2.) \qquad n_1 - 2\nu - 1 = \mu$$

gesetzt haben.

Man erhält alle diese Covarianten ϑ_ν, indem man für ν alle ganzzahligen Werthe setzt, welche kleiner als $\frac{n_1-1}{2}$ sind.

Wir behaupten nun, dass die Covariante $\theta(xy)$ stets in die Form gebracht werden kann:

$$(3.) \qquad \theta(xy) = \Sigma_\nu C_\nu (xy)^{2\nu+1} \vartheta_{x,\nu}^\mu \vartheta_{y,\nu}^\mu,$$

in welcher die Grössen C_ν numerische Constanten bedeuten.

Beweis.

Wir setzen in der Identität:

$$\vartheta_x^{2\mu} = (lm)^{2\nu+1} l_x^\mu m_x^\mu$$

$x + \lambda y$ statt x und erhalten die Formel:

$$\{\vartheta_{x,\nu} + \lambda \vartheta_{y,\nu}\}^{2\mu} = (lm)^{2\nu+1} \{l_x + \lambda l_y\}^\mu \{m_x + \lambda m_y\}^\mu$$

$$= (lm)^{2\nu+1} \left(l_x^\mu + \binom{\mu}{1} l_x^{\mu-1} l_y \lambda + \binom{\mu}{2} l_x^{\mu-2} l_y^2 \lambda^2 \ldots\right)$$

$$\times \left(\lambda^\mu m_y^\mu + \binom{\mu}{1} m_x m_y^{\mu-1} \lambda^{\mu-1} + \binom{\mu}{2} m_x^2 m_y^{\mu-2} \lambda^{\mu-2} \ldots\right).$$

Setzen wir auf beiden Seiten dieser Gleichung die Coefficienten von λ^μ einander gleich, so entsteht die Formel:

$$\binom{2\mu}{\mu} \vartheta_{x,\nu}^\mu \vartheta_{y,\nu}^\mu = (lm)^{2\nu+1} \left\{l_x^\mu m_y^\mu + \binom{\mu}{1}^2 l_x^{\mu-1} l_y m_y^{\mu-1} m_x + \binom{\mu}{2}^2 l_x^{\mu-2} l_y^2 m_y^{\mu-2} m_x^2 \ldots\right\}.$$

Führen wir nun für die Symbole $l_x m_y + m_x l_y$ und $l_x m_y - m_x l_y = (lm)(xy)$ die Bezeichnungen $2A$ und $2B$ ein, setzen wir also:

$$(4.) \qquad \begin{cases} l_x m_y = A + B, \\ l_y m_x = A - B, \end{cases}$$

so erhalten wir die Gleichung:

$$\binom{2\mu}{\mu} \vartheta^{\mu}_{x,\nu} \vartheta^{\mu}_{y,\nu}$$

$$= (lm)^{2\nu+1} \left\{ (A+B)^{\mu} + \binom{\mu}{1}^2 (A+B)^{\mu-1}(A-B) + \binom{\mu}{2}^2 (A+B)^{\mu-2}(A-B)^2 + \cdots \right\}.$$

Da in derselben sich die linke Seite nicht ändert, wenn man die Variabeln x und y vertauscht, so gilt das Nämliche von der rechten Seite; der eingeklammerte Ausdruck enthält daher nur gerade Potenzen des Symbols B.

Entwickelt man den Ausdruck auf der rechten Seite nach Potenzen von A und B, so nimmt die obige Formel die folgende Gestalt an:

$$\vartheta^{\mu}_{x,\nu} \vartheta^{\mu}_{y,\nu} = (lm)^{2\nu+1} \{ h_{\nu 0} A^{\mu} + h_{\nu 2} A^{\mu-2} B^2 + h_{\nu 4} A^{\mu-4} B^4 + \cdots \},$$

wo die Coefficienten $h_{\nu k}$ positive numerische Constanten bedeuten.

Multiplicirt man schliesslich mit dem Ausdruck $(xy)^{n_1-\mu} = (xy)^{2\nu+1}$ (s. Formel (2.)), so geht diese Formel, da: $(lm)(xy) = 2B$ (s. Formel (4.)) ist, in die folgende über:

$$(xy)^{2\nu+1} \vartheta^{\mu}_{x,\nu} \vartheta^{\mu}_{y,\nu} = g_{\nu 0} A^{\mu} B^{n_1-\mu} + g_{\nu 2} A^{\mu-2} B^{n_1-\mu+2} + g_{\nu 4} A^{\mu-4} B^{n_1-\mu+4} + \cdots,$$

wo wir $h_{\nu k} 2^{2\nu+1} = g_{\nu k}$ gesetzt haben.

Diese Formel gilt für jeden ganzzahligen Werth von ν, der kleiner ist als $\frac{n_1 - 1}{2}$; ist n_1 gerade, so kann man daher für ν die Werthe setzen:

$$\frac{n_1-2}{2}, \quad \frac{n_1-4}{2}, \quad \frac{n_1-6}{2}, \quad \ldots \quad 0;$$

ist es ungerade, die Werthe:

$$\frac{n_1-3}{2}, \quad \frac{n_1-5}{2}, \quad \frac{n_1-7}{2}, \quad \ldots \quad 0.$$

Somit erhalten wir für n_1 gerade die Formeln:

$$(xy)^{n_1-1} \vartheta_{x, \frac{n_1-2}{2}} \vartheta_{y, \frac{n_1-2}{2}} = g_{\frac{n_1-2}{2}, 0} A B^{n_1-1},$$

$$(xy)^{n_1-3} \vartheta^3_{x, \frac{n_1-4}{2}} \vartheta^3_{y, \frac{n_1-4}{2}} = g_{\frac{n_1-4}{2}, 0} A^3 B^{n_1-3} + g_{\frac{n_1-4}{2}, 2} A B^{n_1-1},$$

. . . . . .

$$(xy) \vartheta^{n_1-1}_{x,0} \vartheta^{n_1-1}_{y,0} = g_{00} A^{n_1-1} B + g_{02} A^{n_1-3} B^3 + \cdots;$$

für n_1 ungerade die Formeln:

$$(xy)^{n_1-2}\vartheta^2_{x,\frac{n_1-3}{2}}\vartheta^2_{y,\frac{n_1-3}{2}} = g_{\frac{n_1-3}{2},0}A^2B^{n_1-2}+g_{\frac{n_1-3}{2},2}B^{n_1},$$

$$(xy)^{n_1-4}\vartheta^4_{x,\frac{n_1-5}{2}}\vartheta^4_{y,\frac{n_1-5}{2}} = g_{\frac{n_1-5}{2},0}A^4B^{n_1-4}+g_{\frac{n_1-5}{2},2}A^2B^{n_1-2}+g_{\frac{n_1-5}{2},4}B^{n_1},$$

. . . . . .

$$(xy)\vartheta^{n_1-1}_{x,0}\vartheta^{n_1-1}_{y,0} = g_{00}A^{n_1-1}B+g_{02}A^{n_1-3}B^3+\cdots,$$

denen wir die Identität hinzufügen:

$$(xy)^{n_1}(lm)^{n_1} = 2^{n_1}B^{n_1} \qquad \text{(s. Formel (4.))}.$$

Diese beiden Formelsysteme zeigen, dass die Ausdrücke:

$$A^{n_1-(2\nu+1)}B^{2\nu+1}$$

für jeden Werth von ν in die Form gebracht werden können:

$$A^{n_1-(2\nu+1)}B^{2\nu+1} = \Sigma_i G_{i,\nu}\vartheta^{n_1-(2\nu+1)}_{x,i}\vartheta^{n_1-(2\nu+1)}_{y,i}(xy)^{2\nu+1},$$

wo wieder die Coefficienten $G_{i\nu}$ numerisch sind.

Die Function:

$$\theta(xy) = l_x^{n_1}m_y^{n_1}-m_x^{n_1}l_y^{n_1}$$

erhält, da:

$$\begin{aligned} l_x m_y &= A+B, \\ m_x l_y &= A-B \end{aligned} \qquad \text{(s. Formel (4.))}$$

ist, die Form:

$$\theta(xy) = (A+B)^{n_1}-(A-B)^{n_1} = 2\Sigma_\nu\binom{n}{2\nu+1}A^{n_1-(2\nu+1)}B^{2\nu+1},$$

$$\theta(xy) = \Sigma_i\Sigma_\nu 2G_{i\nu}\binom{n}{2\nu+1}\vartheta^{n_1-(2\nu+1)}_{x,\nu}\vartheta^{n_1-(2\nu+1)}_{y,\nu}(xy)^{2\nu+1},$$

und wenn man

$$2\binom{n}{2\nu+1}\Sigma_i G_{i\nu} = C_\nu$$

setzt, die Form:

$$\theta(xy) = \Sigma_\nu C_\nu\vartheta^{n_1-(2\nu+1)}_{x,\nu}\vartheta^{n_1-(2\nu+1)}_{y,\nu}(xy)^{2\nu+1},$$

w. z. b. w.

Der eben bewiesene Satz zeigt, dass sich die Coefficienten der Form θ linear aus den Coefficienten der Covarianten ϑ_ν zusammensetzen lassen. (Umgekehrt kann man beweisen, dass die Coefficienten der Formen ϑ_ν lineare Functionen von denen der Covariante $\theta(xy)$ sind.) Es gilt mithin der Satz:

Die Invarianten J_R sind simultane Invarianten von f und den Formen:

$$\vartheta_\nu = (lm)^{2\nu+1}l_x^{n_1-(2\nu+1)}m_x^{n_1-(2\nu+1)}.$$

§. 5.

Fall, in dem die Substitution linear wird.

Wir wollen uns nun mit dem Falle beschäftigen, wo die Substitution:

$$\varphi = z_1 l + z_2 m$$

in eine lineare übergeht, indem l und m einen Factor $(n_1-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\alpha = \alpha_x^{n_1-1}$$

gemeinsam haben.

In diesem Falle kann man

$$l = \alpha l'_x,$$
$$m = \alpha m'_x,$$
$$\varphi = \alpha\{z_1 l'_x + z_2 m'_x\}$$

setzen, und die Functionaldeterminante der Formen l und m, die wir mit ϑ bezeichnen:

$$(1.) \qquad \vartheta = l_x^{n_1-1} m_x^{n_1-1}(lm) \qquad (\text{symbolisch } \vartheta_x^{2n_2-2} = \vartheta_x'^{2n_2-2} \ldots)$$

erhält den Werth:

$$(2.) \qquad \vartheta = \frac{\alpha^2}{n_1}(l'm').$$

Ersetzt man nun in folgender Formel ((6.) des §. 1)

$$R_{f\varphi} = \Pi_i \varphi(x_i)$$

(in welcher das Product über alle die Werthe auszudehnen ist, welche die Form φ annimmt, wenn man in ihr für x alle Wurzeln von f setzt) die Form φ nach einander

erstens durch seinen Werth

$$\varphi = \alpha(z_1 l' + z_2 m'),$$

zweitens durch die lineare Form

$$z_1 l'_x + z_2 m'_x,$$

drittens durch die Form α und

viertens durch die Form ϑ, so ergeben sich die 4 Formeln:

$$R_{f\varphi} = \Pi_i \alpha(x_i)(z_1 l'_{x_i} + z_2 m'_{x_i}),$$
$$R_{f\, z_1 l + z_2 m} = \Pi_i (z_1 l'_{x_i} + z_2 m'_{x_i}),$$
$$R_{f\alpha} = \Pi_i \alpha(x_i),$$
$$R_{f\vartheta} = \left(\frac{(l'm')}{n_1}\right)^n \Pi_i \alpha(x_i)^2,$$

welche sich in die folgenden zusammenfassen lassen:

$$R_{f\varphi} = R_{fa} R_{z_1 l'_x + z_2 m'_x},$$

$$R_{f\vartheta} = \left(\frac{(l'm')}{n_1}\right)^n R_{fa}^2.$$

Die Formel für $R_{f\varphi}$ zeigt, dass die Invariante J_R, deren Grad in den Coefficienten durch ν bezeichnet werde, den Werth hat:

$$J_R = R_{fa}^{\nu} (l'm')^{\frac{n\nu}{2}} J_f = n_1^{\frac{n\nu}{2}} R_{f\vartheta}^{\frac{\nu}{2}} J_f.$$

Da diese Formel stets gilt, wenn die Formen l und m einen Factor $(n_1-1)^{\text{ten}}$ Grades gemein haben, *so ist der Ausdruck:*

$$(3.) \qquad R_{f\varphi} - n_1^{\frac{n\nu}{2}} R_{f\vartheta}^{\frac{\nu}{2}} J_f$$

eine lineare Function solcher Combinationen der Substitutionscoefficienten, welche verschwinden, wenn l und m einen Factor $(n_1-1)^{ter}$ Ordnung gemein haben.

§. 6.

Discriminante der transformirten Form.

Ich verlasse jetzt die allgemeinen Invarianten J_R und gehe zur Untersuchung der bekanntesten unter ihnen über, nämlich der Discriminante Δ_R.

Verschwindet dieselbe, so hat die transformirte Gleichung:

$$r_z^n = 0$$

zwei gleiche Wurzeln; es muss dann zwei Wurzeln x_i und x_k der Gleichung $f = 0$ geben, für welche die Brüche:

$$\left(\frac{l}{m}\right)_i \quad \text{und} \quad \left(\frac{l}{m}\right)_k$$

gleiche Werthe besitzen, für welche also

$$\theta(x_i x_k) = 0.$$

In §. 4, Formel (3.) habe ich gezeigt, dass diese Covariante die Form annehmen kann:

$$\theta(x_i x_k) = (x_i x_k) \Sigma_\nu C_\nu \vartheta_{x,\nu}^{n_1-(2\nu+1)} \vartheta_{y,\nu}^{n_1-(2\nu+1)} (x_i x_k)^{2\nu},$$

welche, wenn man

$$(1.) \qquad \Sigma_\nu C_\nu \vartheta_{x,\nu}^{n_1-(2\nu+1)} \vartheta_{y,\nu}^{n_1-(2\nu+1)} (xy)^{2\nu} = \theta'(xy)$$

setzt, in die folgende übergeht:

$$(2.) \qquad \theta(x_i x_k) = (x_i x_k) \theta'(x_i x_k).$$

Es sind also die beiden Fälle zu unterscheiden:

$$(x_i x_k) = 0,$$
$$\theta'(x_i x_k) = 0.$$

Im ersteren verschwindet die Discriminante von f

$$(3.) \qquad \Delta_f = \Pi_{ik}(x_i x_k)^2,$$

im letzteren das Product

$$(4.) \qquad \Phi = \Pi_{ik}\theta'(x_i x_k),$$

welches so wie das erste Product über alle Wurzelpaare $x_i x_k$ der Gleichung $f=0$ auszudehnen ist.

Die Ausdrücke Δ_f und Φ sind daher die einzigen, welche in Δ_R als Factoren vorkommen können und darin vorkommen müssen.

Δ_R hat mithin die Form

$$\Delta_R = C\Delta_f^{\mu}.\Phi^{\nu},$$

wo C eine numerische Constante bedeutet, und μ und ν zwei ganze Zahlen bedeuten, die sich durch eine einfache Abzählung bestimmen lassen.

In den Coefficienten der Formen f und θ hat nämlich die Invariante Δ_R die Dimensionen $2n_1(n-1)$ und $n(n-1)$, die Discriminante Δ_f die Dimensionen $2(n-1)$ und 0, das Product Φ endlich die Dimensionen $(n_1-1)(n-1)$ und $\frac{n(n-1)}{2}$.

Es gelten daher zur Bestimmung von μ und ν die Formeln:

$$2n_1(n-1) = (n-1)(n_1-1)\nu + 2(n-1)\mu,$$
$$n(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}\nu,$$

aus denen für μ und ν die Werthe folgen:

$$\mu = 1, \qquad \nu = 2.$$

Trägt man dieselben in obige Formel ein, so wird:

$$(5.) \qquad \Delta_R = C\Delta_f\Phi^2.$$

Man kann die Veränderlichen z_1, z_2 mit solchen Factoren multiplicirt denken, dass:

wie: $\Delta_f = \Pi_{ik}(x_i x_k)^2$, (vgl. Formel (3.))

so auch: $\Delta_R = \Pi_{ik}(z_i z_k)^2$

ist, wo die Producte über alle Wurzelpaare der Gleichung:

$$r_z^n = 0$$

auszudehnen sind.

Dann nimmt unsere Gleichung die Form an:

$$\Pi_{ik}(z_i z_k)^2 = C\Pi_{ik}(x_i x_k)^2 \Phi^2,$$

oder wenn man für Φ seinen Werth aus Formel (4.) setzt:

$$\Pi_{ik}(z_i z_k)^2 = C\Pi_{ik}(x_i x_k)^2 \theta'(x_i x_k)^2 = C\Pi_{ik}\{l(x_i)m(x_k) - m(x_i)l(x_k)\}^2.$$

Diese Formel wird identisch erfüllt, wenn man die Variabeln z_1 und z_2 durch die Functionen l und m ersetzt, denen sie nach der Formel:

$$\varphi = z_1 l + z_2 m = 0$$

proportional sind.

§. 7.

Benutzung der Resolvente Φ zur Auflösung der Gleichung $f = 0$.

Das Product Φ zerfällt, wenn man in demselben die Coefficienten von l und m als Variable betrachtet, in $\frac{n(n-1)}{2}$ Factoren $\theta'(x_i x_k)$, deren jeder einem Wurzelpaare $x_i x_k$ der Gleichung $f = 0$ entspricht.

Es giebt eine (unendlich grosse) Schaar von Formen l, m, für welche ein bestimmter Factor $\theta'(x_i x_k)$ verschwindet.

Ich stelle mir die Aufgabe, das Wurzelpaar $x_i x_k$ zu finden, wenn ein Formenpaar $l = L$, $m = M$ der betreffenden Schaar gegeben ist.

Bildet man zu diesem Zweck den Differentialquotienten $\Pi_{\varrho\sigma}(x_\varrho x_\sigma)$ von Φ nach einem Coefficienten von l:

$$\Pi_{\varrho\sigma}(x_\varrho x_\sigma)\frac{\partial\Phi}{\partial l_r} = \frac{\partial}{\partial l_r}\Pi_{\varrho\sigma}\{l(x_\varrho)m(x_\sigma) - m(x_\varrho)l(x_\sigma)\}$$

$$= \Sigma_{\varrho\sigma}\{(x_\varrho^r m(x_\sigma) - x_\sigma^r m(x_\varrho))\Pi_{\varrho'\sigma'}\theta(x_{\varrho'}x_{\sigma'})\},$$

(in welchem $\varrho'\sigma'$ alle Zahlen-Combinationen ausser $\varrho\sigma$ annehmen) und ersetzt hierin die Substitutionscoefficienten durch die Coefficienten der Formen L und M, so verschwinden alle die Glieder der Summe, in denen das Zahlenpaar $\varrho\sigma$ vom Zahlenpaar ik verschieden ist, so dass sich diese Summe auf das eine Glied reducirt, in dem $\varrho = i$, $\sigma = k$ ist; man erhält dann die Formel:

$$\Pi_{\varrho\sigma}(x_\varrho x_\sigma)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial l_r}\right)_{LM} = (x_i^r M(x_k) - x_k^r M(x_i))\Pi_{i'k'}\{L(x_{i'})M(x_{k'}) - M(x_{i'})L(x_{k'})\}),$$

wo für $i'k'$ alle Zahlenpaare gesetzt werden müssen, welche von ik verschieden sind.

Setzen wir hierin für r nach einander die Zahlen r, $r+1$, $r+2$ und eliminiren wir aus den so entstehenden Formeln die Ausdrücke:

$$\Pi_{\varrho\sigma}(x_\varrho x_\sigma); \qquad M(x_k)\Pi_{i'k'}(L(x_{i'})M(x_{k'})-M(x_{i'})L(x_{k'}));$$
$$M(x_i)\Pi_{i'k'}\{L(x_{i'})M(x_{k'})-M(x_{i'})L(x_{k'})\},$$

so erhalten wir:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial l_r}\right)_{LM} & x_i^r & x_k^r \\ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial l_{r+1}}\right)_{LM} & x_i^{r+1} & x_k^{r+1} \\ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial l_{r+2}}\right)_{LM} & x_i^{r+2} & x_k^{r+2} \end{vmatrix},$$

und wenn wir durch $x_i^r x_k^r(x_i-x_k)$ dividiren:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial l_r}\right)_{LM}(x_i x_k)-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial l_{r+1}}\right)_{LM}(x_i+x_k)+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial l_{r+2}}\right)_{LM}=0.$$

Setzen wir wieder $r+1$ statt r, so erhält man aus dieser und der obigen Formel leicht die quadratische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial l_r}\right)_{LM} & \left(\frac{\partial\Phi}{\partial l_{r+1}}\right)_{LM} & 1 \\ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial l_{r+1}}\right)_{LM} & \left(\frac{\partial\Phi}{\partial l_{r+2}}\right)_{LM} & x \\ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial l_{r+2}}\right)_{LM} & \left(\frac{\partial\Phi}{\partial l_{r+3}}\right)_{LM} & x^2 \end{vmatrix}=0,$$

deren Wurzeln x_i und x_k sind.

Gehören die Formen L_1, M_1 einer zweiten Schaar von θ-Formen an, etwa derjenigen, welche dem Wurzelpaare $x_i x_\lambda$ entspricht, wird also:

$$L_1(x_i)M_1(x_\lambda)-M_1(x_i)L_1(x_\lambda)=0,$$

so genügt die Wurzel x_i noch einer zweiten quadratischen Gleichung und lässt sich rational in den Coefficienten von L, M, L_1, M_1 ausdrücken, so dass wir den Satz bewiesen haben:

Die Wurzeln der Gleichung $f=0$ lassen sich darstellen als rationale Functionen der Coefficienten von irgend $\frac{n(n-1)}{2}$ Formenpaaren

$$L_1M_1;\ L_2M_2;\ L_3M_3;\ \ldots;\ L_{\frac{n(n-1)}{2}}M_{\frac{n(n-1)}{2}},$$

welche den verschiedenen Factoren des Productes Φ entsprechen.

§. 8.

Darstellung der Form Φ.

Wenn der Ausdruck Φ für irgend eine Substitution verschwindet, so muss einer seiner Factoren

$$l(x_i)\,m(x_k) - m(x_i)\,l(x_k)$$

verschwinden. Es lässt sich dann stets ein Grössenpaar z_1 und z_2 so bestimmen, dass der Ausdruck:

$$\varphi = z_1 l + z_2 m$$

die Wurzeln x_i, x_k mit f gemein hat.

Um den Ausdruck Φ direct zu finden, muss man daher z_1, z_2 aus den beiden Gleichungen eliminiren, welche aussagen, dass die Gleichung

$$\varphi = z_1 l + z_2 m = 0$$

zwei Wurzeln mit der Gleichung $f = 0$ gemein hat.

Zweiter Abschnitt.

Die Invarianten der transformirten Form bei quadratischen Substitutionen.

§. 9.

Darstellung der Resultante zweier Gleichungen mittelst ihrer symbolischen Coefficienten (*Clebsch*sche Formeln).

Im Falle $n_1 = 2$ werden viele Resultate einfacher, und es lassen sich viele Operationen ausführen, die wir im Allgemeinen nur andeuten konnten.

Um zu untersuchen, wie sich in diesem Falle die obigen Sätze und Formeln gestalten, beginnen wir mit der Aufstellung der transformirten Gleichung selbst. Herr *Clebsch* hat im 58. Bande dieses Journals pag. 273 ein Verfahren angegeben, wie man die Resultante $R_{f\varphi}$ der Gleichung $f = 0$ und der quadratischen Gleichung $\varphi = 0$ durch die symbolischen Coefficienten der Formen f und φ einfach darstellen kann. Da wir die Endformeln brauchen, so wollen wir hier seine Methode kurz wiederholen und nur in einigen un-

bedeutenden Punkten von ihr abweichen, um die Resultate in einer unserer Untersuchung angemessenen Form zu erhalten.

Die gegebenen Gleichungen sind:

$$f = 0$$

und

$$\varphi = \varphi_x^2 = \alpha_x \beta_x = 0 \qquad (\S.\ 1,\ \text{Formel}\ (3.)).$$

Aus der letzteren folgert man leicht die Identitäten

$$\begin{aligned}(a\varphi)^2(b\varphi_1)^2 &= (a\alpha)(a\beta)(b\alpha)(b\beta),\\ 2(a\varphi)(b\varphi) &= (a\alpha)(b\beta)+(b\alpha)(a\beta),\\ -2(ab)^2(\varphi_1\varphi_2)^2 &= \{(a\alpha)(b\beta)-(b\alpha)(a\beta)\}^2,\end{aligned}$$

welche zeigen, wie sich die symmetrischen Functionen der Symbole:

$$(a\alpha)(b\beta) \quad \text{und} \quad (b\alpha)(a\beta)$$

durch die symbolischen Coefficienten von f und φ ausdrücken lassen.

Man kann nun der Resultante ($\S.\ 1$, Formel (5.)) $R_{f\varphi} = (a\alpha)^n(b\beta)^n$ die Form geben:

$$R_{f\varphi} = \tfrac{1}{2}\{(a\alpha)^n(b\beta)^n+(b\alpha)^n(a\beta)^n\},$$

welche symmetrisch in den obigen Symbolen ist, also rational aus den Ausdrücken

$$(a\varphi)^2(b\varphi_1)^2, \qquad (a\varphi)(b\varphi), \qquad (ab)^2(\varphi\varphi_1)^2$$

zusammengesetzt werden kann.

Für die Fälle $n=2$, 3 und 4 werden die *Clebsch*schen Formeln, wenn wir, was wir in der Folge stets thun werden, die quadratische Invariante zweier beliebigen quadratischen Formen l und m

$$(1.) \qquad (lm)^2 = A_{lm}$$

setzen,

$$(2.)\quad \begin{cases} \text{für } n=2 & R_{f\varphi} = A_{f\varphi}^2 - A_{ff}A_{\varphi\varphi},\\ \text{für } n=3 & R_{f\varphi} = (a\varphi)(b\varphi)(a\varphi_1)^2(b\varphi_2)^2 - 2(ab)^2(a\varphi)(b\varphi)A_{\varphi\varphi},\\ \text{für } n=4 & R_{f\varphi} = \{(a\varphi)^2(a\varphi_1)^2\}^2 - 4A_{\varphi\varphi}(ab)^2(a\varphi)^2(b\varphi_1)^2 + 2(ab)^4A_{\varphi\varphi}^2. \end{cases}$$

§. 10.

Die Functionaldeterminante.

In §. 4 der ersten Abtheilung haben wir den Satz bewiesen, dass die Invarianten J_R simultane Invarianten der Formen:

$$f \quad \text{und} \quad \vartheta_\nu = (lm)^{2\nu+1} l_x^{n_1-(2\nu+1)} m_x^{n_1-(2\nu+1)}$$

sind; für $n_1 = 2$ gestaltet sich dieser Satz hier folgendermassen:

„*Die Invarianten J_R sind simultane Invarianten der Formen:*

$$f \quad \text{und} \quad (lm)\, l_x m_x .“$$

Dieser Satz lehrt uns, welche wichtige Stelle die Functionaldeterminante der quadratischen Formen l und m

$$(1.) \qquad \vartheta = l_x m_x (lm) \qquad (\text{symbolisch } \underset{x}{\vartheta^2} = \underset{x}{\vartheta_1^2} = \underset{x}{\vartheta_2^2} \ldots)$$

in unserer Untersuchung einnimmt.

Es sei uns daher gestattet, hier an einige Beziehungen zu erinnern, welche zwischen den quadratischen Formen:

$$l, \quad m \quad \text{und} \quad \vartheta$$

stattfinden; da dieselben bekannt sind, so genügt es, die Resultate anzuführen:

$$(2.) \qquad \begin{cases} A_{l\vartheta} = A_{m\vartheta} = 0, \\ A_{\varphi\vartheta} = (\vartheta\alpha)(\vartheta\beta) = 0, \\ -2\vartheta^2 = A_{ll} m^2 - 2A_{lm} lm + A_{mm} l^2, \\ A_{\vartheta\vartheta} = R_{lm} = \frac{1}{2}\{A_{ll} A_{mm} - A_{lm}^2\}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir ferner die Factoren von ϑ durch $(x\xi)$ und $(x\eta)$, so dass

$$(3.) \qquad \vartheta_x^2 = (x\xi)(x\eta),$$

so lassen sich die Formen l und m durch die Quadrate:

$$(4.) \qquad \frac{(x\xi)^2}{\sqrt{(\xi\eta)}} \quad \text{und} \quad \frac{(x\eta)^2}{\sqrt{(\xi\eta)}},$$

sowie φ durch das Binom:

$$(5.) \qquad \frac{z_1 (x\xi)^2}{\sqrt{(\xi\eta)}} + \frac{z_2 (x\eta)^2}{\sqrt{(\xi\eta)}}$$

ersetzen. Es wird dann:

$$(6.) \qquad \begin{cases} (\vartheta a)^2 = a_\xi a_\eta; \quad 2(\vartheta a)(\vartheta b) = a_\xi b_\eta + b_\xi a_\eta; \\ -2A_{\vartheta\vartheta} = (\xi\eta)^2 \qquad (\text{§. 9, Formel (1.)}); \\ R_{f\vartheta} = a_\xi^n b_\eta^n \qquad (\text{§. 1, Formel (5.)}). \end{cases}$$

§. 11.

Fall, wo die Resultante R_{lm} gleich Null ist.

Gehen wir zu dem folgenden Satze (§. 5, 1ste Abtheilung) über, welcher aussagt, dass der Ausdruck:

$$J_R - n_1^{\frac{n\nu}{2}} R_{f\vartheta}^{\frac{\nu}{2}} J_f$$

eine lineare Function solcher Combinationen von den Substitutionscoefficienten ist, welche verschwinden, wenn l und m einen Factor vom Grade n_1-1 gemein haben.

Da hier nur die Resultante $R_{lm}=A_{\vartheta\vartheta}$ diese Eigenschaft besitzt, so nimmt J_R die Form an

$$(7.) \qquad J_R = 2^{\frac{n\nu}{2}} R_{f\vartheta}^{\frac{\nu}{2}} J_f + AA_{\vartheta\vartheta}.$$

Für ein gerades n kann man leicht zeigen, dass, falls $A_{\vartheta\vartheta}$ verschwindet, die Resultante $R_{f\vartheta}=a_\xi^n b_\eta^n$ gleich dem Quadrat der simultanen Invariante:

$$(8.) \qquad Q=(a\vartheta)^2(a\vartheta_1)^2\ldots(a\vartheta_{\frac{n-1}{2}})^2 = a_\xi^{\frac{n}{2}} a_\eta^{\frac{n}{2}} \quad \text{(s. §. 10, Formel (3.))}$$

wird; für n gerade nimmt also J_R die Form an:

$$(9.) \qquad J_R = 2^{\frac{n\nu}{2}} Q^\nu J_f + AA_{\vartheta\vartheta}.$$

Ist n ungerade, so ist ν stets gerade, und man kann also dann die erste Formel für J_R ohne Weiteres benutzen.

§. 12.

Die Discriminante Δ_R.

Die Discriminante Δ_R hat hier den Werth:

$$\Delta_R = C\Delta_f \Phi^2,$$

wo C eine numerische Constante bedeutet und:

$$(1.) \qquad \begin{cases} \Phi = \Pi_{ik} \dfrac{l(x_i)m(x_k)-m(x_i)l(x_k)}{(x_i x_k)} \\ \quad = \Pi_{ik} 2\vartheta_{x_i}\vartheta_{x_k}. \end{cases}$$

Es entspricht wieder jedem Wurzelpaare $x_i x_k$ ein Factor von Φ und eine Schaar von Formen ϑ.

Ist eine derselben t_{ik}, also:

$$(2.) \qquad t_{ik}(x_i x_k) = 0,$$

so findet man hier die Gleichungen für die Wurzeln $x_i x_k$ nicht dadurch, dass man Φ partiell nach den Coefficienten von l differentiirt; es ist vielmehr, da die Coefficienten von ϑ von einander unabhängig sind, gestattet, direct nach denselben zu differentiiren. Man erhält dann die Formel:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta_r} = \Sigma_{\varrho\sigma} 2 \frac{\partial\vartheta_{x_i}\vartheta_{x_k}}{\partial\vartheta_r} \Pi_{\varrho'\sigma'}\vartheta_{x_{\varrho'}}\vartheta_{x_{\sigma'}},$$

wo in dem Product $\Pi_{\varrho'\sigma'}$ die Zahlen $\varrho'\sigma'$ alle Werthepaare mit Ausnahme des Werthepaares $\varrho\sigma$ annehmen sollen.

Ersetzt man nun hierin die allgemeine Form ϑ durch die Form t_{ik}, so verschwinden in obiger Summe alle Glieder, für welche das Zahlenpaar $\varrho\sigma$ von dem Zahlenpaar ik verschieden ist; die Summe reducirt sich dann auf ein einziges Glied, und man erhält die Formel:

$$\Sigma_r \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_r}\right)_{t_{ik}} = \frac{\partial \vartheta_{x_i} \vartheta_{x_k}}{\partial \vartheta_r} \Pi_{i'k'} t_{ik}(x_{i'} x_{k'}),$$

wo wieder über alle Zahlenpaare $i'k'$ zu summiren ist, die von dem Zahlenpaar ik verschieden sind.

Multiplicirt man dieselbe mit dem Coefficienten ϑ_r und summirt dann über r, so sieht man, dass:

$$(3.) \qquad \Sigma_r \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_r}\right)_{t_{ik}} \vartheta_r = \vartheta_{x_i} \vartheta_{x_k} \Pi_{i'k'} t_{ik}(x_{i'} x_{k'}),$$

mithin der Ausdruck:

$$\Sigma_r \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_r}\right)_{t_{ik}} \vartheta_r$$

ein Factor von Φ ist.

Ersetzt man in der Formel (3.) die Coefficienten von ϑ durch die entsprechenden Potenzen einer Grösse x, so wird

$$\Sigma_r \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_r}\right)_{t_{ik}} x^r = (x - x_i)(x - x_k) \Pi_{i'k'} t_{ik}(x_{i'} x_{k'}),$$

welche Gleichung zeigt, dass x_i und x_k Wurzeln der quadratischen Gleichung sind:

$$(4.) \qquad \Sigma_r \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_r}\right)_{t_{ik}} x^r = 0.$$

§. 13.

Directe Bestimmung von Φ.

Zur directen Bestimmung von Φ will ich mich eines anderen Verfahrens bedienen als des in §. 8 der ersten Abtheilung angedeuteten.

Da nämlich, wie damals gezeigt wurde, eine Grösse λ so bestimmt werden kann, dass, falls Φ verschwindet, die Form:

$$\varphi = l + \lambda m$$

zwei Factoren mit f gemein hat, so muss sie für ein solches λ ganz in f enthalten sein.

Ersetzen wir nun, was nach §. 10, Formel (5.) erlaubt ist, die Form φ durch

$$\varphi = (x\xi)^2 + \lambda(x\eta)^2,$$

so sieht man leicht, dass sie nur dann in der Form

$$f(\xi\eta)^n = \{a_\xi(x\eta) - a_\eta(x\xi)\}^n$$

enthalten sein kann, wenn sie in jedem der folgenden beiden Theile enthalten ist:

$$a_\xi^n(x\eta)^n + \binom{n}{2} a_\xi^{n-2} a_\eta^2 (x\xi)^2 (x\eta)^{n-2} + \binom{n}{4} a_\xi^{n-4} a_\eta^4 (x\xi)^4 (x\eta)^{n-4} + \cdots,$$

$$\binom{n}{1} a_\xi^{n-1} a_\eta (x\xi)(x\eta)^{n-1} + \binom{n}{3} a_\xi^{n-3} a_\eta^3 (x\xi)^3 (x\eta)^{n-3} + \cdots.$$

Dann müssen für den nämlichen Werth von λ die beiden Gleichungen bestehen können:

$$(1.) \quad \begin{cases} a_\xi^n + \binom{n}{2} \lambda a_\xi^{n-2} a_\eta^2 + \binom{n}{4} \lambda^2 a_\xi^{n-4} a_\eta^4 + \cdots = 0, \\ \binom{n}{1} a_\xi^{n-1} a_\eta + \binom{n}{3} a_\xi^{n-3} a_\eta^3 \lambda + \cdots\cdots\cdots = 0. \end{cases}$$

Man sieht nun sofort, dass die Resultante dieser Gleichungen dieselben Dimensionen in den Coefficienten f und ϑ besitzt, wie der Ausdruck Φ; da sie mit demselben zu gleicher Zeit verschwindet, so kann sie sich davon nur um einen numerischen Factor unterscheiden.

Das Product Φ ist daher die Resultante der obigen Gleichungen.

Dritte Abtheilung.

Anwendung auf die quadratischen, cubischen und biquadratischen Formen.

§. 14.

Die Discriminante der quadratischen Formen.

Erstes Beispiel: $n = 2$.

Die Gleichungen (1.) §. 13 der zweiten Abtheilung lauten hier:

$$a_\xi^2 + \lambda a_\eta^2 = 0,$$
$$a_\xi a_\eta = 0.$$

Es ist daher:

$$\Phi = a_\xi a_\eta = A_{f\vartheta} \qquad (\S.\ 10,\ \text{Formel}\ (6.)\ \text{und}\ \S.\ 9,\ \text{Formel}\ (1.))$$

und nach Formel (5.), §. 6 der ersten Abtheilung:

$$\Delta_R = C\Delta_f A_{f\vartheta}^2.$$

§. 15.

Die Discriminante der cubischen Formen.

Zweites Beispiel: $n = 3$.

In diesem Falle wird die ursprüngliche Form:

$$f = a_x^3.$$

Sie besitzt die Covariante:

$$(1.) \qquad \tau = a_x b_x (ab)^2 \qquad (\text{symbolisch } (\tau_1 x_1 + \tau_2 x_2)^2 = \tau_x^2)$$

und die Invariante:

$$(2.) \qquad \Delta_f = A_{\tau\tau}.$$

Für $n = 3$ lauten die Gleichungen (1.) §. 12 der zweiten Abtheilung

$$\begin{aligned} a_\xi^3 + 3\lambda a_\xi a_\eta^2 &= 0, \\ 3a_\xi^2 a_\eta + \lambda a_\eta^3 &= 0; \end{aligned}$$

mithin ist ihre Resultante:

$$\begin{aligned} \Phi &= a_\xi^3 b_\eta^3 - 9a_\xi^2 a_\eta b_\xi b_\eta^2 = -8a_\xi^3 b_\eta^3 + 9a_\xi^2 b_\eta^2 \{a_\xi b_\eta - b_\xi a_\eta\} \\ &= -8a_\xi^3 b_\eta^3 + 9(ab)(\xi\eta)\left\{\frac{a_\xi^2 b_\eta^2 - b_\xi^2 a_\eta^2}{2}\right\} \\ &= -8a_\xi^3 b_\eta^3 + 9(ab)(\xi\eta)(ab)(\xi\eta)\left\{\frac{a_\xi b_\eta + b_\xi a_\eta}{2}\right\} \\ &= -8a_\xi^3 b_\eta^3 + \frac{9}{2}(ab)^2(\xi\eta)^2(a_\xi b_\eta + b_\xi a_\eta) = -8a_\xi^3 b_\eta^3 + 9(\xi\eta)^2 \tau_\xi \tau_\eta \quad (\text{vgl. F.}(1.)) \\ &= -8R_{f\vartheta} - 18A_{\vartheta\vartheta} A_{\vartheta\tau} \qquad (\text{vgl. } \S.\ 10\ \text{F.}\ (6.)\ 2.\ \text{Abthl.}); \end{aligned}$$

also ist nach Formel (5.), §. 6, 1. Abthl.:

$$\Delta_R = C\Delta_f \{4R_{f\vartheta} + 9A_{\vartheta\vartheta} A_{\vartheta\tau}\}^2.$$

§. 16.

Bekannte Covarianten und Invarianten der biquadratischen Formen.

Drittes Beispiel: $n = 4$.

Die Form

$$f = a_x^4$$

besitzt bekanntlich die Covarianten (vgl. *Salmon*, Lessons 2nd Ed. pag. 169)

(1.) $\Delta = \frac{1}{2} a_x^2 b_x^2 (ab)^2 = \delta f,$ (symbolisch $\Delta_x^4 = \Delta_x'^4 \ldots$)

(2.) $T = a_x^3 \Delta_x^3 (a\Delta)$

und die Invarianten

(3.) $i_f = \frac{1}{2}(ab)^4,$

(4.) $j_f = \frac{1}{3}(a\Delta)^4 = \frac{1}{3}\delta i_f,$

(5.) $\frac{1}{6} i_f^2 = \delta j = (\Delta\Delta')^4,$

(6.) $\Delta_f = R = i^3 - 27 j^2.$

Die Covariante T hängt mit den Formen f und Δ mittelst der Gleichung zusammen:

(7.) $$4T^2 = -4\Delta^3 + if^2\Delta - jf^3.$$

Bezeichnet man daher die cubische Form

(8.) $$P = -4x_1^3 + ix_1^2 x_2 - jx_2^3$$

symbolisch durch

(9.) $$P = (p_1 x_1 + p_2 x_2)^3 = p_x^3 = p_x'^3 \ldots,$$

so wird

$$4T^2 = (p_1 \Delta + p_2 f)^3.$$

Die cubische Form P besitzt die quadratische Covariante

(10.) $$\tau = \tfrac{1}{2} p_x p_x' (pp')^2 = -\frac{4i}{3} x_1^2 + 4j x_1 x_2 - \frac{i^2}{q} x_2^2 \quad \text{(symbolisch } \tau_x^2\text{)},$$

die cubische Covariante

(11.) $$q = p_x^2 \tau_x (p\tau) = -8j x_1^3 + \frac{4i^3}{3} x_1^2 x_2 - 2ij x_1 x_2^2 + \left(2j^2 - \frac{i^3}{27}\right) x_2^3 \quad \text{(symbolisch } q_x^3\text{)},$$

und die Invariante

(12.) $$A_{\tau\tau} = \tfrac{8}{27} R.$$

Zwischen den Formen p, q und τ gilt die Relation

(13.) $$q^2 + \tfrac{4}{27} R p^2 + \tau^3 = 0.$$

Endlich führe ich noch folgende Beziehungen an, welche im Folgenden benutzt werden sollen:

$$(15.) \qquad \Delta_x^2 \Delta_y^2 = \tfrac{1}{2} a_x^2 b_y^2 (ab)^2 - \frac{i}{3}(xy)^2,$$

$$(16.) \qquad d\Delta = a_x^2 \Delta_x^2 (a\Delta)^2 = \frac{if}{6},$$

$$(17.) \qquad a_x^2 \Delta_y^2 (a\Delta)^2 = a_y^2 \Delta_x^2 (a\Delta)^2 = \frac{i}{6} a_x^2 a_y^2 + j(xy)^2,$$

$$(18.) \qquad \Delta_x^2 \Delta_x'^2 (\Delta\Delta')^2 = -\frac{i}{6}\Delta + \frac{j}{2} f,$$

$$(19.) \qquad \Delta_x^2 \Delta_y'^2 (\Delta\Delta')^2 = \frac{j}{2} a_x^2 a_y^2 - \frac{i}{6} \Delta_x^2 \Delta_y^2 + \frac{i^2}{18}(xy)^2,$$

$$(20.) \qquad \Delta_x \Delta_y \Delta_x' \Delta_y' (\Delta\Delta')^2 = \frac{j}{2} a_x^2 a_y^2 - \frac{i}{6} \Delta_x^2 \Delta_y^2 - \frac{i^2}{36}(xy)^2.$$

§. 17.

Die Discriminante der transformirten Form.

Bei der Transformation biquadratischer Gleichungen nehmen die Formeln (1.), §. 13, zweite Abtheil. die Form an:

$$(1.) \qquad \begin{cases} a_\xi^4 + 6\lambda a_\xi^2 a_\eta^2 + \lambda^2 a_\eta^4 = (a_\xi^2 + \lambda a_\eta^2)^2 + 4\lambda a_\xi^2 a_\eta^2 = 0, \\ a_\xi^3 a_\eta + \lambda a_\xi a_\eta^3 = 0. \end{cases}$$

Es handelt sich darum, ihre Resultante Φ durch die einfachsten Invarianten der Formen f und ϑ auszudrücken.

Diese sind nun:

$$i_f;$$

$$j_f;$$

$$(2.) \qquad A = 4A_{\vartheta\vartheta} = -2(\xi\eta)^2;$$

$$(3.) \qquad B = -2(a\vartheta)^2 (a\vartheta')^2 = -2a_\xi^2 a_\eta^2;$$

$$(4.) \qquad \begin{cases} C = \delta B = -2(\Delta\vartheta)^2 (\Delta\vartheta')^2 = -2\Delta_\xi^2 \Delta_\eta^2 = -(ab)^2 (a\vartheta)^2 (b\vartheta')^2 + \dfrac{iA}{6} \\ \qquad = -(ab)^2 a_\xi a_\eta b_\xi b_\eta + \dfrac{i}{6} A; \end{cases}$$

$$(5.) \qquad \delta C = -\frac{i}{6} a_\xi^2 a_\eta^2 = \frac{i}{6} B.$$

Man erhält Φ, indem man den Werth von λ aus der zweiten der Gleichungen (1.) in die erste derselben einträgt, folgendermassen (vgl. die Formeln der §§. 10 und 16):

$$\begin{aligned}
\Phi &= b_\xi b_\eta c_\xi c_\eta (a_\xi^2 b_\eta^2 - b_\xi^2 a_\eta^2)(a_\xi^2 c_\eta^2 - c_\xi^2 a_\eta^2) - 4 a_\xi^2 a_\eta^2 b_\xi^3 b_\eta c_\xi^3 c_\eta \\
&= 4(b\vartheta)^2 (c\vartheta_1)^2 (ab)(ac)(\xi\eta)^2 (a\vartheta_2)(b\vartheta_2)(a\vartheta_3)(c\vartheta_3) + 2B(b\vartheta)^2 (c\vartheta_1)^2 b_\xi^2 c_\eta^2 \\
&= -2A(b\vartheta)^2 (c\vartheta_1)^2 (ab)(ac)(b\vartheta_2)(a\vartheta_3)\{(ac)(\vartheta_2\vartheta_3) + (a\vartheta_3)(c\vartheta_2)\} \\
&\qquad + 2B(b\vartheta)^2 (c\vartheta_1)^2 \left\{\frac{(bc)^2 (\xi\eta)^2}{2} + b_\xi b_\eta c_\xi c_\eta\right\} \\
&= A(b\vartheta)^2 (c\vartheta_1)^2 (ab)(ac)^2 . (ab)(\vartheta_2\vartheta_3)^2 - 2A(a\vartheta_3)^2 (b\vartheta)^2 (c\vartheta_1)^2 (ab)(ac)(b\vartheta_2)(c\vartheta_2) \\
&\qquad - \frac{AB}{2}(bc)^2 (b\vartheta)^2 (c\vartheta_1)^2 + \frac{B^3}{2} \\
&= AA_{\vartheta\vartheta}(ab)^2 (ac)^2 (b\vartheta)^2 (c\vartheta_1)^2 - 2A(a\vartheta)^2 (b\vartheta_1)^2 (c\vartheta_2)^2 \left\{(ab)^2 (c\vartheta_3)^2 - \frac{(bc)^2}{2}(a\vartheta_3)^2\right\} \\
&\qquad - \frac{AB}{2}(bc)^2 (b\vartheta)^2 (c\vartheta_1)^2 + \frac{B^3}{2} .
\end{aligned}$$

Das zweite Glied dieser Formel hebt sich gegen das dritte fort; setzt man im ersten statt $A_{\vartheta\vartheta}$ seinen Werth $\frac{A}{4}$, so wird:

$$\Phi = \frac{A^2}{4}(ab)^2 (ac)^2 (b\vartheta)^2 (c\vartheta_1)^2 + \frac{B^3}{2},$$

und wenn man auf diesen Ausdruck nach einander die Formeln (15.), (17.) und (20.) des §. 16 anwendet:

$$\begin{aligned}
\Phi &= -\tfrac{1}{8}\{-A^3 j + iA^2 B - 4B^3\} \\
&= -\tfrac{1}{8}\{p_1 B + p_2 A\}^3 \quad \text{(vgl. §. 16, Formel (9.))},
\end{aligned}$$

also nach Formel (5.) des §. 6 der ersten Abtheilung

$$(6.) \qquad \Delta_R = CR\{(p_1 A + p_2 B)^3\}^2,$$

wobei C eine noch zu bestimmende numerische Constante bedeutet.

§. 18.

Auflösung der Gleichung $f = 0$.

Wir wollen uns nun der in §. 12 zweiter Abtheilung angedeuteten Methode bedienen, um die Wurzeln der Gleichung $f=0$ mit Hülfe von dem Ausdruck Φ zu berechnen, und wenden uns zu der Frage, wie die Coefficienten von der Form ϑ, resp. die Grössen $\xi\eta$ beschaffen sein müssen, damit die Discriminante der transformirten Form verschwinde.

Nennen wir die Wurzeln der cubischen Gleichung:

$$(1.) \qquad P = -4\lambda^3 + i\lambda - j = 0 \qquad \text{(vgl. §. 16, Formel (8.))}$$

$$\lambda_1; \quad \lambda_2; \quad \lambda_3,$$

so wird:

$$(2.) \qquad \Phi = C\{B-\lambda_1 A\}\{B-\lambda_2 A\}\{B-\lambda_3 A\}.$$

Den einzelnen Factoren von Φ werden die verschiedenen Schaaren von Formen ϑ sowie die verschiedenen Wurzelpaare von der Gleichung $f=0$ entsprechen. Da bekanntlich die einem Factor der kubischen Resolvente entsprechenden beiden Wurzelpaare der biquadratischen Gleichung keine Wurzel gemein haben, so entsprechen auch die beiden Schaaren von Formen ϑ, für welche derselbe Factor:

$$B-\lambda_i A$$

verschwindet, solchen Wurzelpaaren von f, die keine gemeinsame Wurzel besitzen.

Wir können mithin die Annahme machen, dass:

dem ersten Factor $B-\lambda_1 A$ die Wurzelpaare x_1x_2 und x_3x_4,

dem zweiten Factor $B-\lambda_2 A$ die Wurzelpaare x_1x_3 und x_2x_4,

dem dritten Factor $B-\lambda_3 A$ die Wurzelpaare x_1x_4 und x_2x_3

entprechen und sehen, dass diejenigen Functionen, welche zwei verschiedene der Ausdrücke $B-\lambda_i A$ verschwinden machen, zur Berechnung einer Wurzel im Sinne des §. 7, erste Abtheilung dienen.

Aus der Formel (2.) ersehen wir, dass die allgemeinen Formeln des §. 12, zweite Abtheilung in unserem Falle durch die folgenden ersetzt werden können:

$$B-\lambda_i A = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta_1}\{B-\lambda_i A\}x_2^2-\frac{\partial}{\partial\vartheta_2}\{B-\lambda_i A\}x_1x_2+\frac{\partial}{\partial\vartheta_3}\{B-\lambda_i A\}x_1^2=8\lambda_i\vartheta+4a_x^2(a\vartheta)^2=0;$$

so dass, wenn man in diesen beiden Gleichungen für i zwei beliebige Indices setzt, die so entstehenden Formeln durch dieselbe Wurzel von $f=0$ befriedigt werden.

Mit Hülfe der Identität (§. 10, Formel (3.), zweite Abthl.)

$$\vartheta_x^2 = (x\xi)(x\eta)$$

gehen obige Formeln in die folgenden über:

$$(3.) \qquad \begin{cases} a_\xi^2 a_\eta^2 = \lambda_i(\xi\eta)^2, \\ a_x^2 a_\xi a_\eta + 2\lambda_i(x\xi)(x\eta) = 0. \end{cases}$$

Die erste unter ihnen bestimmt η aus ξ, welches willkürlich bleibt, während die zweite nach passend eingesetzten Werthen von ξ und η durch die Wurzeln von f identisch befriedigt wird.

Ohne der Allgemeinheit der Untersuchung Eintrag zu thun, wollen wir nun:

$$(4.)\qquad \begin{cases} \eta_1 = -a_\xi^3 a_2 + \mu_i \xi_1, \\ \eta_2 = \quad a_\xi^3 a_1 + \mu_i \xi_2 \end{cases}$$

setzen, und der Kürze halber die Bezeichnung einführen:

$$(5.)\qquad \begin{cases} a_\xi^4 = f, & a_\xi^3 a_x = f_x, \\ \Delta_\xi^4 = \Delta, & \Delta_\xi^3 \Delta_x = \Delta_x. \end{cases}$$

Es wird dann

$$\mu_i^2 f + a_\xi^2 (af)^2 = \lambda_i f^2,$$
$$-a_x^2 a_\xi (af) + \mu_i a_x^2 a_\xi^2 + 2\lambda_i (x\xi) f_x + 2\lambda_i \mu_i (x\xi)^2 = 0,$$

oder

$$\mu_i = \sqrt{\lambda_i f - \Delta}.2(x\xi)\{\lambda_i f_x - \Delta_x\} + \sqrt{\lambda_i f - \Delta}\{a_x^2 a_\xi^2 + 2\lambda_i (x\xi)^2\}.$$

Die letzte Formel führt uns auf die bekannte Auflösung der biquadratischen Gleichungen; eine jede Wurzel derselben genügt drei Gleichungen der Form:

$$a_x^2 a_\xi^2 + 2\lambda_1 (x\xi)^2 = 2(x\xi)\frac{\lambda_1 f_x - \Delta_x}{\pm\sqrt{\lambda_1 f - \Delta}},$$

$$a_x^2 a_\xi^2 + 2\lambda_2 (x\xi)^2 = 2(x\xi)\frac{\lambda_2 f_x - \Delta_x}{\pm\sqrt{\lambda_2 f - \Delta}},$$

$$a_x^2 a_\xi^2 + 2\lambda_3 (x\xi)^2 = 2(x\xi)\frac{\lambda_3 f_x - \Delta_x}{\pm\sqrt{\lambda_3 f - \Delta}},$$

aus denen durch Elimination von den Ausdrücken

$$a_x^2 a_\xi^2, \qquad (x\xi)^2, \qquad (x\xi)$$

folgt, dass der lineare Ausdruck

$$(\lambda_2 - \lambda_3)\frac{\lambda_1 f_x - \Delta_x}{\pm\sqrt{\lambda_1 f - \Delta}} + (\lambda_3 - \lambda_1)\frac{\lambda_2 f_x - \Delta_x}{\sqrt{\lambda_2 f - \Delta}} + (\lambda_1 - \lambda_2)\frac{\lambda_3 f_x - \Delta_x}{\sqrt{\lambda_3 f - \Delta}}$$

verschwindet, mithin ein Factor der Form f ist.

§. 19.

Ueber die Invarianten J und $\mathfrak{J}$.

Die quadratischen und cubischen Formen besitzen keine andere Invariante als die Discriminante.

Da wir die Transformation derselben bewerkstelligt haben, so können wir diese Formen als für unseren Zweck genügend untersucht ansehen.

Anders gestaltet sich die Frage bei den Formen vierter Ordnung. Dieselben besitzen ausser der Discriminante R noch die Invarianten i und j, die mit derselben durch die Relation verbunden sind:

$$R = i^3 - 27j^2.$$

Nachdem wir also in §. 17 die Discriminante Δ_R der transformirten Form durch die einfachen Invarianten

$$i,\quad j,\quad A,\quad B,\quad C$$

dargestellt haben, so müssen wir auch die Invarianten J_R und $\mathfrak{I}_R$ durch dieselben ausdrücken.

Indess zeigt die obige Relation

$$(1.)\qquad \Delta_R = J_R^3 - 27\mathfrak{I}_R^2,$$

dass es genügt, die Invariante J_R direct in dieser Weise darzustellen, und dann $\mathfrak{I}_R$ aus dieser Gleichung zu berechnen.

Die noch in dem Werth von Δ_R als Factor vorkommende numerische Constante wird hierbei so bestimmt werden müssen, dass der Ausdruck

$$(2.)\qquad -\Delta_R + J_R^3 = 27\mathfrak{I}_R^2$$

ein volles Quadrat in den Coefficienten von f und ϑ wird.

§. 20.

Hülfssatz.

Bei der Bestimmung des Werths von J_R werden wir uns einer Hülfsformel bedienen, die wir vorerst ableiten wollen, um später den Faden der Untersuchung nicht zu unterbrechen.

Es seien:

$$u,\quad v,\quad w \quad \text{symbolisch} \quad u_x^2,\quad v_x^2,\quad w_x^2$$

irgend drei quadratische Formen; wir stellen uns die Aufgabe, die Invariante i der biquadratischen Form

$$u^2 + 2vw$$

durch die simultanen Invarianten

$$A_{uu},\quad A_{uv}\quad \ldots \qquad (2^{\text{te}}\ \text{Abthl.},\ \S.\ 9,\ \text{Formel}\ (1.))$$

auszudrücken.

Bezeichnen wir zu dem Ende das Product der Formen v und w symbolisch durch

$$\varphi_x^4 = v_x^2 w_x^2,$$

so wird:

$$\varphi_x^2 \varphi_y^2 = \tfrac{1}{2}\{v_x^2 w_y^2 + w_x^2 v_y^2\} - \frac{A_{vw}}{3}(xy)^2.$$

Ersetzen wir in dieser Formel die Variabeln x und y

erstens: durch die symbolischen Coefficienten der Formen von v und w,

zweitens: durch die symbolischen Coefficienten der Form u,

so erhalten wir die Gleichungen:

$$(vw, vw)^4 = \tfrac{1}{2} A_{vv} A_{ww} + \tfrac{1}{6} A_{vw}^2,$$
$$(vw, u^2)^4 = A_{uv} A_{uw} - \tfrac{1}{3} A_{uu} A_{vw},$$

deren letztere für $v = w = u$ in die folgende übergeht:

$$(u^2, u^2)^4 = \tfrac{2}{3} A_{uu}^2.$$

Mit Hülfe dieser Formeln erhalten wir für die Invariante J der biquadratischen Form $u^2 + 2vw$, nämlich

$$J_{u^2+2vw} = \tfrac{1}{2}(u^2, u^2)^4 + 2(u^2, vw)^4 + 2(vw, vw)^4$$

den Werth:

$$(1.) \qquad J_{u^2+2vw} = \tfrac{1}{3}\{A_{uu} - A_{vw}\}^2 + 2A_{uv} A_{uw} + A_{vv} A_{ww}.$$

§. 21.

Berechnung der Invariante J_R.

Zur Bestimmung der Invariante J_R gehen wir von der *Clebsch*schen Formel aus:

$$R_{f\varphi} = \{(a\varphi)^2 (a\varphi_1)^2\}^2 - 4(ab)^2 (a\varphi)^2 (b\varphi_1)^2 A_{\varphi\varphi} + 2(ab)^4 A_{\varphi\varphi}^2.$$

Aus ihr kann mittelst der Formel (15.) des §. 16 leicht die folgende Formel abgeleitet werden:

$$R_{f\varphi} = \{(a\varphi)^2 (a\varphi_1)^2\}^2 - 8A_{\varphi\varphi} (\Delta\varphi)^2 (\Delta\varphi_1)^2 + \frac{4i}{3} A_{\varphi\varphi}^2.$$

Und wenn wir, was nach §. 10, Formel (5·) zweiter Abthl. erlaubt ist,

$$\varphi = z_1 \frac{(x\xi)^2}{\sqrt{\xi\eta}} + z_2 \frac{(x\eta)^2}{\sqrt{\xi\eta}}$$

setzen, so folgt:

$$R_{f\varphi} = \frac{\{(z_1 a_\xi^2 + z_2 a_\eta^2)^2\}^2}{(\xi\eta)^2} - 16 z_1 z_2 \{z_1 \Delta_\xi^2 + z_2 \Delta_\eta^2\}^2 + \tfrac{16}{3} i z_1^2 z_2^2 (\xi\eta)^2.$$

Bezeichnen wir nun durch u, v, w die Formen:

$$z_1^2 \frac{a_\xi^4}{(\xi\eta)} + 2z_1 z_2 \frac{a_\xi^2 a_\eta^2}{(\xi\eta)} + z_2^2 \frac{a_\eta^4}{(\xi\eta)} = u,$$
$$z_1 \frac{\Delta_\xi^4}{(\xi\eta)} + 2z_1 z_2 \left\{\frac{\Delta_\xi^2 \Delta_\eta^2}{(\xi\eta)} - \frac{i}{6}(\xi\eta)\right\} + z_2^2 \frac{\Delta_\eta^4}{(\xi\eta)} = v,$$
$$-8 z_1 z_2 (\xi\eta) = w,$$

so wird

$$R_{f\varphi} = u^2 + 2vw$$

und mithin

$$J_R = \tfrac{1}{3}\{A_{uu} - A_{vw}\}^2 + 2A_{uv}A_{uw} + A_{vv}A_{ww},$$

so dass nur noch die Bestimmung der simultanen Invarianten der Formen u, v, w übrig bleibt.

Die Invariante A_{uu} hat den Werth (vgl. §. 9, Formel (1.) und die §§. 10 und 16)

$$A_{uu} = \frac{(a_\xi^2 b_\eta^2 - a_\eta^2 b_\xi^2)^2}{(\xi\eta)^2} = (ab)^2\{a_\xi b_\eta + a_\eta b_\xi\}^2 = (ab)^2\{(ab)^2(\xi\eta)^2 + 4a_\xi a_\eta b_\xi b_\eta\}$$

$$= -iA + 4\left\{\frac{iA}{6} - C\right\} = -\left\{4C + \frac{iA}{3}\right\}.$$

Die Invariante A_{uv} hat den Werth

$$A_{uv} = \frac{\{a_\xi^2 \Delta_\eta^2 - a_\eta^2 \Delta_\xi^2\}^2}{(\xi\eta)^2} + \frac{i}{3}a_\xi^2 a_\eta^2 = \tfrac{1}{2}\delta A_{uu} - \frac{iB}{6} = -\tfrac{1}{2}\{jA + iB\}.$$

Für die Invariante A_{vv} ergiebt sich der Werth

$$A_{vv} = \frac{\{\Delta_\xi^2 \Delta_\eta'^2 - \Delta_\eta^2 \Delta_\xi'^2\}^2}{(\xi\eta)^2} + \frac{2i}{3}\Delta_\xi^2\Delta_\eta^2 - \frac{i^2}{18}(\xi\eta)^2$$

$$= (\Delta\Delta')^2\{(\Delta\Delta')^2(\xi\eta)^2 + 4\Delta_\xi\Delta_\eta\Delta'_\xi\Delta'_\eta\} + \frac{2i}{3}\Delta_\xi^2\Delta_\eta^2 - \frac{i^2}{18}(\xi\eta)^2$$

$$= +\frac{i^2}{6}(\xi\eta)^2 + 4\left\{\frac{j}{2}a_\xi^2 a_\eta^2 - \frac{i}{6}\Delta_\xi^2\Delta_\eta^2 - \frac{i^2}{36}(\xi\eta)^2\right\} + \frac{2i}{3}\Delta_\xi^2\Delta_\eta^2 - \frac{i^2}{18}(\xi\eta)^2$$

$$= 2ja_\xi^2 a_\eta^2 = -jB.$$

Auf ähnliche Weise erhalten wir die Werthe

$$A_{uw} = -4B,$$

$$A_{vw} = -4C + \frac{2i}{3}A,$$

$$A_{ww} = 16A.$$

Fassen wir diese Werthe der simultanen Invarianten zusammen, so ergeben sich für die Theile von J_R die Formeln

$$\tfrac{1}{3}(A_{uu} - A_{vw})^2 = \frac{i^2}{3}A^2,$$

$$2A_{uv}A_{uw} = 4B\{jA + iB\},$$

$$A_{vv}A_{ww} = -16jAB,$$

mithin wird nach §. 21 Formel (1.)

$$(1.) \qquad J_R = \frac{i^2}{3}A^2 - 12jAB + 4iB^2 = 3(\tau_1 A + \tau_2 B)^2.$$

§. 22.

Berechnung der Invariante $\mathfrak{I}_R$.

Zur Bestimmung von $\mathfrak{I}_R$ bedient man sich, wie wir bereits §. 19 angedeutet haben, der Formel

$$\mathfrak{I}_R^2 = \frac{J_R^3 - \Delta_R}{27} = -\{(\tau_1 B + \tau_2 A)^2\}^3 - \frac{CR}{27}\{(p_1 B + p_2 A)^3\}^2.$$

Die Formel

$$-\tau^3 - \tfrac{4}{27} RP^2 = Q^2$$

zeigt nun, dass die rechte Seite in den Coefficienten von f und ϑ nur dann ein volles Quadrat wird, wenn

$$C = 4$$

ist, dass dann aber

(1.) $$\mathfrak{I}_R = \{q_1 B + q_2 A\}^3 = -8jB^3 + \tfrac{4}{3} i^2 AB^2 - 2ijA^2 B + \left\{2j^2 - \frac{i^3}{27}\right\} A^3,$$

(2.) $$\Delta_R = 4R(p_1 B + p_2 A)^3 = 4R\{-A^3 j + iA^2 B - 4B^3\}^2.$$

Das Vorzeichen von $\mathfrak{I}_R$ bestimmt sich aus der Formel (9.) des §. 11 der zweiten Abthl., welche zeigt, dass, falls die Invariante $A_{\vartheta\vartheta} = \frac{A}{4}$ verschwindet, $\mathfrak{I}_R = 64 Q^3 j$ und, da hier $\frac{1}{2} B = -Q$ ist,

$$\mathfrak{I}_R = -8jB^3$$

wird.

§. 23.

Ueber das Verschwinden von Invarianten.

Wir haben uns oben in §. 18 die Fragen gestellt, wie man die Grössen ξ und η in der Substitutionsgleichung

$$\varphi \sqrt{(\xi\eta)} = z_1 (x\xi)^2 + z_2 (x\eta)^2 = 0$$

bestimmen müsse, damit die Discriminante Δ_R der transformirten Gleichung verschwinde.

In ähnlicher Weise wollen wir die Fragen beantworten, wie man ξ und η bestimmen müsse, damit die Invariante J_R oder $\mathfrak{I}_R$ verschwinde. Das Verschwinden von J_R bei einer quadratischen Transformation hat schon Herr *Hermite* (Comptes rendus, tome 46 pag. 961) untersucht; doch ist seine quadratische Substitution dadurch beschränkt, dass für eine der Functionen l, m eine Constante gesetzt ist.

Im Fall $J_R = 0$ lässt sich die transformirte Gleichung stets durch eine lineare Substitution auf die Modulargleichung für die Transformationen dritter Ordnung der elliptischen Functionen zurückführen.

Im zweiten Falle, wo $\mathfrak{Z}_R$ verschwindet, kann sie mittelst quadratischer Gleichungen gelöst werden.

§. 24.

Fall $J_R = 0$.

Wird

$$(1.) \qquad J_R = \frac{i^2}{3} A^2 - 12jAB + 4iB^2 = 0,$$

so wird

$$(2.) \qquad B = \frac{3A}{2i}\left\{j \pm \sqrt{\frac{-R}{27}}\right\},$$

und wenn man

$$(3.) \qquad \frac{3}{2i}\left(j \pm \sqrt{\frac{-R}{27}}\right) = \varrho$$

setzt,

$$(4.) \qquad B = \varrho A,$$

$$(5.) \qquad \frac{i^2}{3} - 12j\varrho + 4i\varrho^2 = 0;$$

und da A und B die Werthe $A = -2(\xi\eta)^2$, $B = -2a_\xi^2 a_\eta^2$ nach §. 17, Formel (2.) und (3.) besitzen,

$$(6.) \qquad a_\xi^2 a_\eta^2 = \varrho(\xi\eta)^2.$$

Wir verfahren nun ebenso wie in §. 18 und bedienen uns derselben Bezeichnungen, nämlich

$$(7.) \qquad \begin{cases} \eta_1 = -a_\xi^3 a_2 + \sigma\xi_1, \\ \eta_2 = a_\xi^3 a_1 + \sigma\xi_2, \end{cases}$$

$$(8.) \qquad \begin{cases} a_\xi^4 = f, & \Delta_\xi^4 = \Delta, \\ a_\xi^3 a_x = f_x, & \Delta_\xi^3 \Delta_x = \Delta_x. \end{cases}$$

Es geht dann ähnlich wie in §. 18 die Formel (6.) in folgende über

$$(9.) \qquad \sigma^2 = \varrho f - \Delta.$$

Da bei dieser Substitution

$$(10.) \qquad A = -2f, \qquad B = -2\varrho f$$

ist, so werden die Invarianten der transformirten Form

$$J_R = 0,$$

$$\Im_R = f^3\left\{-8j\varrho^3+\tfrac{4}{3}i^2\varrho^2-2ij\varrho+2j^2-\frac{i^3}{27}\right\} = 4f^3\frac{R}{i^3}\left\{\frac{R}{27}\pm j\sqrt{\frac{-R}{27}}\right\}.$$

$$\Delta_R = 64f^6\left\{-\varrho^3+\frac{i}{4}\varrho-\frac{j}{4}\right\}^2 = 64R^3f^6\frac{\varrho^2}{9i^4}.$$

Man hat daher folgenden Satz:

Mittelst der quadratischen Substitution

$$\varphi = z_1(x\xi)^2+z_2\left[a_\xi^3a_x+(x\xi)\sqrt{\frac{3}{2i}a_\xi^4\left\{j\pm\sqrt{\frac{-R}{27}}\right\}-\Delta_\xi^4}\right] \qquad (\xi \text{ willkürlich})$$

geht die Form f in eine Form $r_z^4 = R_{f\varphi}$ über, welche die Invarianten besitzt

$$J_R = 0,$$

$$\Im_R = (a_\xi^4)^3\frac{4R}{i^3}\left\{-\frac{R}{27}\pm j\sqrt{\frac{-R}{27}}\right\},$$

$$\Delta_R = (a_\xi^4)^6\frac{16R^3}{i^6}\left\{j\pm\sqrt{\frac{-R}{27}}\right\}^2.$$

§. 25.

Fall $\Im_R = 0$.

Wir gehen zu dem letzten Falle über, wo $\Im_R$ verschwindet. Sind g_1, g_2, g_3 die drei Wurzeln der cubischen Gleichung

$$(1.)\quad Q(g) = -8jg^3+\frac{4i^2}{3}g^2-2ijg+\left(2j^2-\frac{i^3}{27}\right) = 0,$$

so wird

$$B = g_iA,$$

und wenn man für B und A wieder ihre Werthe setzt,

$$a_\xi^2a_\eta^2 = g_i(\xi\eta)^2.$$

Durch die Substitution

$$\eta_1 = -a_\xi^3a_2+h_1\xi_1,$$
$$\eta_2 = \quad a_\xi^3a_1+h_1\xi_2$$

erhalten wir

$$h_i = \sqrt{g_if-\Delta}$$

und mithin durch analoges Verfahren wie im vorigen Paragraphen den Satz:

Mittelst der quadratischen Substitution

$$\varphi = z_1 (x\xi)^2 + z_2 \{f_x + h_1 (x\xi)\}^2$$

geht die Gleichung $f = 0$ *in eine Gleichung über, deren Invarianten sind*

$$J_R = f^2 \left\{\frac{i^2}{3} - 12 j g_i + 4 i g_i^2\right\},$$

$$\Im_R = 0,$$

$$\Delta_R = 64 R f^6 \left\{-g_i^3 + \frac{i}{4} g_i - \frac{j}{4}\right\}^2,$$

wobei g_i *eine Wurzel der cubischen Gleichung* (1.) *bedeutet.*

Giessen, den 14. Januar 1868.

Ueber die Methode, die Ordnungszahl einer Curve zu finden, welche durch zwei projectivische Curvenbüschel erzeugt wird.

(Von Herrn *A. Olivier* in Schaffhausen.)

Das Verfahren, die Ordnung desjenigen Ortes zu bestimmen, der durch die Durchschnittspunkte der correspondirenden Curven zweier projectivischen Curvenbüschel der m^{ten} und n^{ten} Ordnung erzeugt wird, beruht bekanntlich auf folgenden Schlüssen.

Man sagt, die beiden projectivischen Curvenbüschel erzeugen auf einer beliebigen Transversale zwei projectivische Involutionen, bezüglich von der m^{ten} und n^{ten} Ordnung, welche $(m+n)$ gemeinschaftliche Punkte besitzen. Auf der gegebenen Transversale liegen demnach $(m+n)$ Punkte, durch welche je zwei entsprechende Curven der beiden Curvenbüschel hindurchgehen, also auch $(m+n)$ Punkte des durch die beiden Büschel erzeugten Ortes. Dieser Ort ist demnach eine Curve der $(m+n)^{\text{ten}}$ Ordnung.

Nach dieser Methode hat zuerst *Poncelet* (Analyse des transversales, p. 29) die Ordnung eines geometrischen Ortes bestimmt.

Für die synthetische Geometrie ist diese Methode, die Ordnungszahl einer Curve zu finden, in so fern nicht genügend, als der Beweis, dass zwei projectivische Involutionen der m^{ten} und n^{ten} Ordnung in einem geradlinigen Träger $(m+n)$ gemeinschaftliche Punkte besitzen, bis jetzt, so viel ich weiss, geometrisch noch nicht geleistet worden ist; daher kann auch der obige Beweis für die Ordnungszahl einer Curve nicht als ein geometrischer angesehen werden.

Dieser Forderung genügt aber vielleicht die folgende Darstellung.

Es seien (B^1B^2) und (C^1C^2) die beiden Curvenbüschel, bezüglich von der m^{ten} und n^{ten} Ordnung, mit den entsprechenden Elementen

$$B^1 \text{ und } C^1;\quad B^2 \text{ und } C^2;\quad \ldots\quad B^x \text{ und } C^x;\quad \ldots\ldots$$

Die Basis des Büschels (B^1B^2) sei

$$b_1 b_2 b_3 \ldots b_m,$$

und die Basis des anderen Büschels (C^1C^2)

$$c_1 c_2 c_3 \ldots c_{n^2}.$$

Der durch die Durchschnittspunkte der entsprechenden Elemente erzeugte Ort geht zunächst durch die sämmtlichen Basispunkte

$$b_1 b_2 b_3 \ldots b_{m^2}; \quad c_1 c_2 c_3 \ldots c_{n^2},$$

weil jeder dieser Punkte auf allen Curven des einen Büschels, und auf einer einzigen Curve des andern Büschels liegt.

Sei nun B^x eine beliebige Curve des Büschels $(B^1 B^2)$ der m^{ten} Ordnung, so wird dieselbe von der entsprechenden Curve C^x des Curvenbüschels $(C^1 C^2)$ der n^{ten} Ordnung in $m.n$ Punkten geschnitten, welche auch dem erzeugten Ort angehören. Die Curve B^x wird deshalb von dem erzeugten Ort zusammen in

$$m^2+mn = m(m+n)$$

Punkten geschnitten, weil die m^2 Basispunkte

$$b_1 b_2 b_3 \ldots b_{m^2},$$

wie bemerkt, auch noch beiden Curven gemeinschaftlich angehören. Schneidet aber ein Ort eine Curve der m^{ten} Ordnung in $m(m+n)$ Punkten, so schneidet derselbe eine beliebige Transversale in $(m+n)$ Punkten und ist also von der $(m+n)^{\text{ten}}$ Ordnung; was zu beweisen war.

Schaffhausen, im October 1869.

Beweis des Satzes, dass eine einwerthige mehr als $2n$fach periodische Function von n Veränderlichen unmöglich ist.

(Auszug aus einem Schreiben *Riemanns* an Herrn *Weierstrass*.)

. . . . . Den Beweis des Satzes, auf welchen Sie neulich die Unterhaltung lenkten, dass eine einwerthige mehr als $2n$fach periodische Function von n Veränderlichen unmöglich ist, habe ich im Gespräch wohl nicht ganz klar ausgedrückt, auch nur die Grundgedanken angegeben; ich theile ihn Ihnen daher hier noch einmal mit.

Es sei f eine $2n$fach periodische Function von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und — ich darf wohl meine Ihnen bekannten Benennungen gebrauchen — der Periodicitätsmodul von x_ν für die μ^{te} Periode a_μ^ν. Es lassen sich dann bekanntlich die Grössen x in die Form

$$x_\nu = \sum_{\mu=1}^{\mu=2n} a_\mu^\nu \xi_\mu \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots n$$

setzen *), so dass die Grössen ξ reell sind. Lässt man nun die Grössen ξ die Werthe von 0 bis 1 mit Ausschluss eines von diesen Grenzwerthen durchlaufen, so hat das dadurch entstehende $2n$fach ausgedehnte Grössengebiet die Eigenschaft, dass jedes System von Werthen der n Veränderlichen einem und nur einem Werthensysteme innerhalb dieses Grössengebiets nach den $2n$ Modulsystemen congruent ist. Ich werde, um mich später kürzer ausdrücken zu können, dieses Gebiet „das bei diesen $2n$ Modulsystemen periodisch sich wiederholende Grössengebiet“ nennen.

Hat die Function nun noch ein $2n+1^{\text{tes}}$ Modulsystem, welches sich nicht aus den $2n$ ersten Modulsystemen zusammensetzen lässt, so kann man die einem Grössensysteme nach diesem Modulsysteme congruenten Grössensysteme auf innerhalb dieses Gebiets liegende nach den $2n$ ersten Modulsystemen ihnen congruente zurückführen und dadurch offenbar beliebig viele innerhalb

---

*) Dies ist nicht immer der Fall, sondern nur, wenn die $2n$ Gleichungen, durch welche die Grössen ξ bestimmt werden, von einander unabhängig sind; die Ausnahmen sind aber leicht zu behandeln. *R.*

dieses Gebiets liegende und nach den $2n+1$ Modulsystemen einander congruente Grössensysteme erhalten, wenn nicht zwei von den nach dem $2n+1^{\text{ten}}$ Modulsysteme congruente Grössensysteme auch nach den $2n$ ersten Modulsystemen congruent sind. In diesem Falle würden zwischen den $2n+1$ Modulsystemen n Gleichungen von der Form

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=2n+1} a_\mu^\nu m_\mu = 0,$$

worin die Grössen m ganze Zahlen wären, stattfinden, und folglich, wie ich später zeigen werde, die $2n+1$ Modulsysteme sich aus $2n$ Modulsystemen zusammensetzen lassen.

Man theile nun für jede der Grössen ξ die Strecke von 0 bis 1 in q gleiche Theile, wodurch das bei den $2n$ ersten Modulsystemen periodisch wiederkehrende Gebiet in q^n Gebiete zerfällt, in deren jedem sich die Grössen ξ nur um $\frac{1}{q}$ ändern. Offenbar müssen dann von mehr als q^n nach den $2n+1$ Modulsystemen einander congruenten und in jenem Gebiete liegenden Grössensystemen nothwendig zwei in dasselbe Theilgebiet fallen, so dass sich die Werthe derselben Grösse ξ in beiden keinenfalls um mehr als $\frac{1}{q}$ von einander unterscheiden. Die Function bleibt also dann ungeändert, während keine der Grössen ξ um mehr als $\frac{1}{q}$ geändert wird, und ist folglich, da q beliebig gross genommen werden kann, wenn sie stetig ist, eine Function von weniger als n linearen Ausdrücken der Grössen x.

Es ist nun noch zu zeigen, dass sich $2n+1$ Modulsysteme, zwischen denen die n Gleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=2n+1} a_\mu^\nu m_\mu = 0$$

stattfinden, aus $2n$ Modulsystemen zusammensetzen lassen.

Man kann zunächst leicht beweisen, dass sich zu einem Modulsysteme $\sum_{\mu=1}^{\mu=2n} a_\mu^\nu m_\mu = b_1^\nu$, worin die Grössen m ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler sind, immer $2n-1$ andere Modulsysteme $b_2, b_3, \ldots b_{2n}$ so finden lassen, dass Congruenz nach den Modulsystemen a mit Congruenz nach den Modulsystemen b identisch ist. Es seien θ_1 der grösste gemeinschaftliche Theiler von m_1 und m_2 und α, β zwei der Gleichung

$$\beta m_1 - \alpha m_2 = \theta_1$$

genügende ganze Zahlen. Setzt man dann

$$a_1^\nu m_1 + a_2^\nu m_2 = c_1^\nu \theta_1$$

und

$$\alpha a_1^\nu + \beta a_2^\nu = b_{2n}^\nu,$$

so hat man

$$a_1^\nu = \beta c_1^\nu - \frac{m_2}{\theta_1} b_{2n}^\nu, \qquad a_2^\nu = -\alpha c_1^\nu + \frac{m_1}{\theta_1} b_{2n}^\nu.$$

Es lassen sich also auch umgekehrt die Modulsysteme a_1 und a_2 aus den Modulsystemen b_{2n} und c_1 zusammensetzen, und folglich ist Congruenz nach jenen mit Congruenz nach diesen gleichbedeutend. Man kann daher die Modulsysteme a_1 und a_2 durch die Modulsysteme c_1 und b_{2n} ersetzen. Auf dieselbe Weise kann man nun, wenn θ_2 der grösste gemeinschaftliche Theiler von θ_1 und m_2 ist, die Modulsysteme c_1 und a_3 durch das Modulsystem

$$\frac{1}{\theta_2}(\theta_1 c_1^\nu + m_3 a_3^\nu) = c_2^\nu$$

und durch ein Modulsystem b_{2n-1} ersetzen. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man offenbar den zu beweisenden Satz. Der Inhalt des periodisch sich wiederholenden Gebiets ist für die neuen Modulsysteme b derselbe wie für die alten.

Mit Hülfe dieses Satzes lassen sich in den n Gleichungen

$$\sum_1^{2n+1} a_\mu^\nu m_\mu = 0$$

die $2n$ ersten Modulsysteme so durch $2n$ neue $b_1, b_2, \ldots b_{2n}$ ersetzen, dass diese Gleichungen die Form

$$p b_1^\nu - q a_{2n+1}^\nu = 0$$

annehmen, worin p und q ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler sind. Sind nun γ, δ zwei der Gleichung

$$p\delta + q\gamma = 1$$

genügende ganze Zahlen, so lassen sich offenbar die beiden Modulsysteme b_1 und a_{2n+1} durch das eine Modulsystem $\gamma b_1^\nu + \delta a_{2n+1} = \frac{a_{2n+1}}{p} = \frac{b_1^\nu}{q}$ ersetzen. Sämmtliche Modulsysteme, welche sich aus den Modulsystemen $a_1, a_2, \ldots a_{2n+1}$ zusammensetzen lassen, können also auch aus den $2n$ Modulsystemen $\frac{b_1^\nu}{q}, b_2, b_3, \ldots b_{2n}$ zusammengesetzt werden, und umgekekrt. Der Inhalt des periodisch wiederkehrenden Gebiets beträgt für diese $2n$ Modulsysteme nur $\frac{1}{q}$ von dem

für die $2n$ ersten Modulsysteme a. Hat die Function nun ausser diesen Modulsystemen noch ein durch ähnliche ganzzahlige Gleichungen mit ihnen verbundenes, so lassen sich wieder $2n$ neue Modulsysteme finden, aus welchen sich alle diese Modulsysteme zusammensetzen lassen, und der Inhalt des periodisch sich wiederholenden Gebiets wird dabei wieder auf einen aliquoten Theil reducirt. Wenn dieses Gebiet unendlich klein wird, so wird die Function eine Function von weniger als n linearen Ausdrücken der Veränderlichen und zwar von $n-1$ oder $n-2$ oder $n-m$, je nachdem nur eine, oder zwei oder m Dimensionen dieses Grössengebiets unendlich klein werden. Soll dies aber nicht eintreten, so muss die Operation schliesslich abbrechen, und man wird also zu $2n$ Modulsystemen gelangen, aus welchen sich sämmtliche Modulsysteme der Function zusammensetzen lassen.

Göttingen, den 26. October 1859.

Beitrag zur Bestimmung von $\vartheta(0, 0, \ldots 0)$ durch die Klassenmoduln algebraischer Functionen.

(Von Herrn *J. Thomae* in Halle.)

In einem kleinen Aufsatze Bd. 66 dieses Journals habe ich $d\lg\vartheta(0,0,\ldots 0)$ als ein Differential der Klassenmoduln dargestellt. Die Integration dieses Ausdruckes kann ich nur für den Fall ausführen, in welchem die p Variabeln der Function

$$\vartheta(v_1, v_2, \ldots v_p) = (\sum_{-\infty}^{+\infty})^p e^{(\sum_1^p)^2 a_{\mu\mu'} \cdot m_\mu m_{\mu'} + 2\sum_1^p v_\mu m_\mu}$$

(worin die Summationen im Exponenten sich auf μ und μ', die äussern Summationen auf $m_1, m_2, \ldots m_p$ beziehen) die p überall endlichen Integrale algebraischer nur *zweiwerthiger* Functionen sind. Die Ausführung der Integration für diesen Fall habe ich, wenn $p = 2$ ist, bereits in einer im März des Jahres 1865 zu Halle gedruckten Abhandlung (später auch in der *Schlömilch*schen Zeitschrift für Math. und Phys. Bd. 17, pag. 427) geliefert. Es ist jedoch wünschenswerth, für den ausführbaren Fall nicht bloss die Methode, sondern völlig fertige Resultate zu haben. Deshalb wird in der nachfolgenden Abhandlung $\vartheta(0, 0, \ldots 0)$ nebst mehreren andern Constanten als Function der Verzweigungswerthe einer $2p+1$ fach zusammenhängenden *Riemann*schen Fläche T dargestellt, wenn diese eine Ebene nur zweifach überall bedeckt. *Riemann* nennt $2p-1$ dieser Verzweigungspunkte die Moduln einer Klasse gleichverzweigter Flächensysteme, oder algebraischer wie jene verzweigter Functionen, weshalb $\vartheta(0, 0, \ldots 0)$ als Function der Klassenmoduln angesehen werden kann. Ich werde im Folgenden mit (*R.* pag.) die *Riemann*sche Abhandlung über *Abel*sche Functionen Bd. 54 citiren und die dort angewandte Bezeichnung überall beibehalten.

Der erste Artikel enthält nun die Beschreibung und Bezeichnung der unsern Untersuchungen zu Grunde liegenden Fläche T, welche von $2p+1$ fachem Zusammenhange ist, aber eine Ebene nur zweifach überall bedeckt, und es werden darin die Werthe der p von einander unabhängigen Integrale für die $2p+2$ Verzweigungspunkte tabellarisch aufgestellt. Diese Integrale ent-

halten je eine willkürliche additive Constante. Ueber diese Constanten wird im zweiten Artikel eine Verfügung getroffen, welche für die Darstellung *Abel*scher Functionen durch jene Integrale mittels der ϑ-Functionen besonders bequem ist. Im dritten Artikel wird gezeigt, dass jedes Integral zweiter Gattung dargestellt werden könne mittels nach den Verzweigungswerthen genommener Differentialquotienten der Integrale erster Gattung, und durch algebraische Functionen. Durch Vergleich der directen Darstellung mit der durch ϑ-Functionen ergeben sich brauchbare (für den Fall $p=1$ von *Jacobi* Fundamenta nova pag. 74 in anderer Weise gefundene) Relationen zwischen den Differentialquotienten der Moduln der ϑ-Functionen und Periodicitätsmoduln der überall endlichen Integrale. Im vierten Artikel wird $\vartheta(0, 0, \ldots 0)$ als Function der $2p+2$ Verzweigungswerthe vollständig dargestellt. Daran schliesst sich im folgenden Artikel in einfacher Weise die Bestimmung von

$$e^{\frac{1}{4}\left(\sum_1^p\right)^2_{(\varrho\varrho')} a_{\varrho\varrho'} h_\varrho h_{\varrho'}} \cdot \vartheta\left(\ldots, \tfrac{1}{2}\sum_1^p{}_{(\varrho)}\, a_{\mu\varrho} h_\varrho + \frac{i\pi}{2} g_\mu, \ldots\right),$$

wenn h_ϱ, g_ϱ beliebige ganze Zahlen sind. Es soll aber der Ausdruck

$$\vartheta_{h_1, h_2, \ldots h_p; g_1, g_2, \ldots g_p}(\ldots, v_p, \ldots)$$

$$= e^{\sum_1^p{}_{(\varrho)} h_\varrho v_\varrho + \frac{1}{4}\left(\sum_1^p\right)^2_{(\varrho\varrho')} a_{\varrho\varrho'} h_\varrho h_{\varrho'}} \cdot \vartheta\left(\ldots, v_\mu + \tfrac{1}{2}\sum_1^p{}_{(\varrho)}\, a_{\mu\varrho} h_\varrho + \frac{i\pi}{2} g_\mu, \ldots\right)$$

kurz eine gerade ϑ-Function genannt werden, wenn

$$\sum_1^p{}_{(\varrho)} h_\varrho g_\varrho \equiv 0 \qquad \text{(mod. 2)}$$

ist, und eine ungerade, wenn

$$\sum_1^p{}_{(\varrho)} h_\varrho g_\varrho \equiv 1 \qquad \text{(mod. 2)}$$

ist. Im fünften Artikel sind für verschwindende Argumente sämmtliche gerade ϑ-Functionen, soweit sie nicht verschwinden, als Functionen der Verzweigungswerthe bestimmt, und es wird eine Relation abgeleitet zwischen geraden ϑ-Functionen und der Functionaldeterminante von p ungeraden ϑ-Functionen für verschwindende Argumente. Ausserdem enthält dieser Artikel noch die Darstellung einer Klasse in T zweiwerthiger (*Abel*scher) Functionen durch ϑ-Quotienten. Wäre diese Relation (14.), bei deren Herleitung die $\frac{p\cdot(p+1)}{2}$ Moduln der ϑ-Function nur eine $2p-1$ fache Variabilität besitzen, auch noch für beliebige Moduln giltig, so würde durch dieselbe $\vartheta(0, 0, \ldots 0)$ in jedem

Falle als Function der Klassenmoduln leicht bestimmbar sein, der Beweis derselben für den allgemeinen Fall ist mir jedoch nicht gelungen. Der sechste Artikel stellt die partiellen Differentialquotienten der ungeraden ϑ-Functionen für verschwindende Argumente durch die Verzweigungswerthe dar, so weit diese Differentialquotienten nicht selbst verschwinden.

Der Kürze wegen bemerken wir hier gleich noch, dass in dieser Abhandlung unter $|x_{\lambda\lambda'}|$ oder $|x_\lambda^{(\lambda')}|$ und ähnlichen Ausdrücken die Determinanten

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{p1} & x_{p2} & \dots & x_{pp} \end{vmatrix} \quad \text{bez.} \quad \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(p)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_p^{(1)} & x_p^{(2)} & \dots & x_p^{(p)} \end{vmatrix}$$

und ähnliche verstanden werden, und dass wir mit dem Differentialzeichen δ eine partielle oder rein formale Differentiation andeuten wollen. Ferner wollen wir mit $\prod_1^n{}_{(\varrho)}(\varphi(\varrho))$ das Product $\varphi(1).\varphi(2)\dots\varphi(n)$ bezeichnen; wenn aber in demselben der Factor $\varphi(\nu)$ fehlt, also für $\prod_1^n{}_{(\varrho)}(\varphi(\varrho)):\varphi(\nu)$, wollen wir $\prod_1^{n\,(\nu)}{}_{(\varrho)}\varphi(\varrho)$ schreiben.

1.

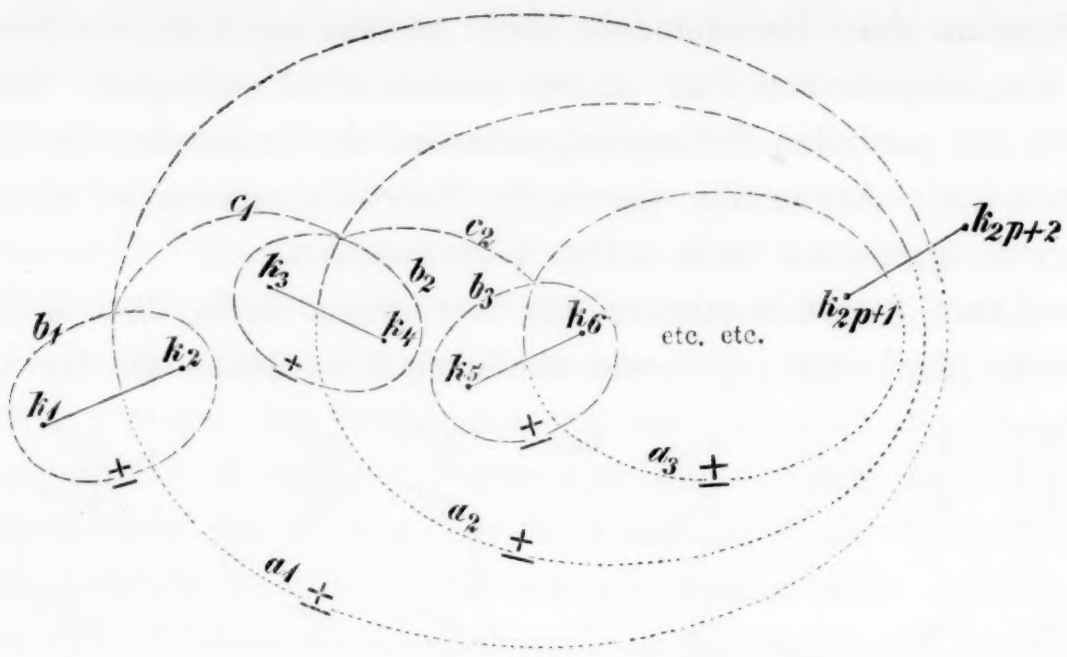
Mit T bezeichnen wir eine $2p+1$fach zusammenhängende *Riemann*sche Fläche, welche die die Werthe der complexen Variabeln z repräsentirende Ebene überall zweifach bedeckt, und sich um die $2p+2$ Verzweigungspunkte

$$k_1, \quad k_2, \quad \dots \quad k_{2p+1}, \quad k_{2p+2}$$

herum aus einem Flächenblatte in das andere fortsetzt. Jeder Punkt ε von T kann dann als Repräsentant eines zusammengehörigen Werthepaares der Grösse z und der zweiwerthigen Function derselben

$$s = \sqrt{\prod_1^{2p+2}{}_{(\varrho)}(z-k_\varrho)} = \sqrt{(z-k_1).(z-k_2)\dots(z-k_{2p+2})}$$

angesehen werden. Wir denken uns, dass die Fortsetzung des einen Blattes der Fläche T in das andere längs Linien stattfinde, welche zwischen k_1 und k_2, zwischen k_3 und k_4, ... zwischen $k_{2\varrho-1}$ und $k_{2\varrho}$, ... zwischen k_{2p+1} und k_{2p+2} so gezogen sind, dass sie sich weder selbst, noch unter einander schneiden. (Cf. umstehende Fig.) Die Zerschneidung der Fläche T führen wir nach der von *Riemann* im Art. 19 der *Abel*schen Functionen (*R.* pag. 143) gegebenen Vor-



schrift aus. Dies kann auf unendlich viele Arten geschehen, und es entspricht der Uebergang von einem Schnittsystem zu einem andern je einer linearen Transformation der ϑ-Functionen und umgekehrt; bei der hier getroffenen Wahl sind besondere Gesichtspunkte nicht massgebend gewesen.

Wir ziehen um k_1, k_2 herum eine in sich zurücklaufende, immer in *einem* Blatte der Fläche T bleibende und diese nicht zerstückelnde Linie b_1 und führen dann einen Querschnitt a_1 von der positiven (innern) Seite von b_1 auf die negative zum Anfangspunkte zurück, indem wir a_1 über die Linie $\overline{k_1 k_2}$ in den andern Flächenast, und von da, die Verzweigungspunkte $k_2, k_3, \ldots k_{2p+1}$ zur Linken lassend, über die Linie $\overline{k_{2p+1} k_{2p+2}}$ in den ersten Flächenast zurückführen. (In der Figur sind die Linien in dem einen Blatte durch unterbrochene Striche, in dem andern durch Punkte, die beiden zugleich angehörenden durch einen continuirlichen Zug angegeben.) Ganz ebenso ziehen wir in demselben Blatte, in welchem b_1 liegt, um k_3, k_4 herum eine geschlossene Curve b_2, welche a_1, b_1 nicht trifft, und die Fläche T nicht zerstückelt. Von dem positiven Ufer dieser Curve führen wir einen Querschnitt a_2 über die Linie $\overline{k_3 k_4}$ in den andern Flächenast, von da über die Linie $\overline{k_{2p+1} k_{2p+2}}$ in das erste Blatt und auf das negative Ufer zum Anfangspunkte zurück, so dass bei der ganzen Führung a_1 zur Rechten, die Verzweigungspunkte $k_4, k_5, \ldots k_{2p+1}$ zur Linken geblieben sind. Weiter führen wir um k_5, k_6 herum eine geschlossene T nicht zerstückelnde Curve b_3, welche mit b_1, b_2 in demselben Blatte von T liegt, und a_1, a_2; b_1, b_2 nirgend trifft. Von dem positiven Ufer von b_3 führen wir, a_2 immer zur Rechten, $k_6, k_7, \ldots k_{2p+1}$ zur Linken behaltend, einen Querschnitt a_3 über die Linie $\overline{k_5 k_6}$ in das andere

Blatt und von da über die Linie $\overline{k_{2p+1}\,k_{2p+2}}$ in das erste Blatt zum Anfangspunkt auf das negative Ufer von b_3 zurück. Und so fahren wir fort, bis wir p Systeme $a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots a_p, b_p$ gezogen haben und ein ähnliches nicht mehr möglich ist. Verbinden wir nun noch a_1 durch eine T nicht zerstückelnde Linie c_1 mit b_2, a_2 durch c_2 ebenso mit b_3 etc., a_{p-1} durch c_{p-1} mit b_p, so ist durch das System der Linien a, b, c die Fläche T in eine einfach zusammenhängende T' der Art zerschnitten, wie es *Riemanns* erwähnte Vorschrift verlangt.

Es existiren nun p (und nur p von einander unabhängige) überall endliche und stetige in T' einändrige Functionen, die sich zu beiden Seiten der Querschnitte a, b um längs je eines derselben constante Grössen, welche Periodicitätsmoduln heissen, unterscheiden, zu beiden Seiten der Linien c aber dieselben Werthe annehmen. Es sind dies die p Integrale

$$w_1(s,z) = \int \frac{dz}{s}, \quad w_2(s,z) = \int \frac{z\,dz}{s}, \quad \ldots \quad w_p(s,z) = \int \frac{z^{p-1}\,dz}{s}.$$

Es sei w_μ auf dem positiven Ufer von a_ν um den Periodicitätsmodul $A_\mu^{(\nu)}$, auf dem positiven Ufer von b_ν um den Periodicitätsmodul $B_\mu^{(\nu)}$ grösser als auf dem negativen. Es ist dann $A_\mu^{(\nu)}$ das Integral $\int \frac{z^{\mu-1}\,dz}{s}$ genommen über den Querschnitt b_ν, und $B_\mu^{(\nu)}$ dasselbe Integral genommen über den Querschnitt a_ν, was wir durch Anhängung von b_ν bez. a_ν wie eine untere Grenze andeuten.

Aus den Grössen $w_1, w_2, \ldots w_p$ setzt man leicht p solche überall endliche Integrale $u_1(s,z), u_2(s,z), \ldots u_p(s,z)$ zusammen, die an je einem der Querschnitte $a_1, a_2, \ldots a_p$ den von Null verschiedenen Periodicitätsmodul $i\pi$, an den anderen von ihnen aber den Null haben. Setzt man nämlich

$$\alpha_\varrho^{(\mu)} = i\pi \cdot \frac{\delta \lg |A_\lambda^{(\lambda')}|}{\delta A_\varrho^{(\mu)}},$$

so ist der Ausdruck $u_\mu(s,z)$ oder

$$u_\mu = \sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)} \alpha_\varrho^{(\mu)} w_\varrho$$

eine Function, welche am Querschnitt a_μ den Periodicitätsmodul $i\pi$, am Querschnitt $a_{\mu'}$ $(\mu' \gtrless \mu)$ den Null hat. Am Querschnitt b_ν aber hat u_μ den Periodicitätsmodul

$$a_{\mu\nu} = \sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)} \alpha_\varrho^{(\mu)} . B_\varrho^{(\nu)} = \sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)} \alpha_\varrho^{(\nu)} . B_\varrho^{(\mu)} = a_{\nu\mu}.$$

Beim Uebergange über die Linien c ändern sich diese Integrale stetig.

Lassen wir nun zunächst die additiven Constanten in $u_1, u_2, \ldots u_p$ unbestimmt, und setzen

$$2u_\mu(0, k_1) = x_\mu + a_{\mu 1},$$

so findet man die Werthe, welche $u_1, u_2, \ldots u_p$ in den Verzweigungspunkten annehmen, leicht durch die Ueberlegung, dass das Integral u_μ auf dem Wege von einem Verzweigungspunkte zum folgenden um ebenso viel in dem einen Blatte wächst, als rückwärts auf dem congruenten Wege in dem andern Blatte, und dass der ganze Zuwachs ein Periodicitätsmodul ist. Jn der folgenden Tabelle sind diese Werthe in leicht übersichtlicher Weise zusammengestellt:

	$2u_1-x_1$,	$2u_2-x_2$,	$\ldots$	$2u_\mu-x_\mu$,	$\ldots$	$2u_p-x_p$
k_1;	a_{11},	a_{21},	$\ldots$	$a_{\mu 1}$,	$\ldots$	a_{p1}
k_2;	$a_{11}+i\pi$,	a_{21},	$\ldots$	$a_{\mu 1}$,	$\ldots$	a_{p1}
k_3;	$a_{12}+i\pi$,	a_{22},	$\ldots$	$a_{\mu 2}$,	$\ldots$	a_{p2}
k_4;	$a_{12}+i\pi$,	$a_{22}+i\pi$,	$\ldots$	$a_{\mu 2}$,	$\ldots$	a_{p2}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$k_{2\mu-1}$;	$a_{1\mu}+i\pi$,	$a_{2\mu}+i\pi$,	$\ldots$	$a_{\mu\mu}$,	$\ldots$	$a_{p\mu}$
$k_{2\mu}$;	$a_{1\mu}+i\pi$,	$a_{2\mu}+i\pi$,	$\ldots$	$a_{\mu\mu}+i\pi$,	$\ldots$	$a_{p\mu}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
k_{2p-1};	$a_{1p}+i\pi$,	$a_{2p}+i\pi$,	$\ldots$	$a_{\mu p}+i\pi$,	$\ldots$	a_{pp}
k_{2p};	$a_{1p}+i\pi$,	$a_{2p}+i\pi$,	$\ldots$	$a_{\mu p}+i\pi$,	$\ldots$	$a_{pp}+i\pi$
k_{2p+1};	$i\pi$,	$i\pi$,	$\ldots$	$i\pi$,	$\ldots$	$i\pi$
k_{2p+2};	0,	0,	$\ldots$	0,	$\ldots$	0.

Es ist nun für unsere Untersuchungen von Wichtigkeit, zu zeigen, dass die Function $\vartheta(v_1, v_2, \ldots v_p)$, wenn für die Moduln $\ldots, a_{\mu\mu'}, \ldots$ in ihr die gleich bezeichneten Periodicitätsmoduln der Integrale $u_1, u_2, \ldots u_p$ gesetzt werden, sich dem Werthe 1 nähert, wenn der Verzweigungspunkt k_2 an k_1, k_4 an $k_3, \ldots k_{2p}$ an k_{2p-1} unendlich nahe gerückt wird. In diesem Falle bleiben die Integrale $w_1, w_2, \ldots w_p$, über die Querschnitte $b_1, b_2, \ldots b_p$ erstreckt, endlich, und zwar nimmt nach dem *Cauchy*schen Satz $A_\mu^{(\nu)}$ den Werth an

$$A_\mu^{(\nu)} = \int_{b_\nu} \frac{z^{\mu-1}.dz}{\sqrt{(z-k_{2p+1}).(z-k_{2p+2})}.\prod_1^p{}_{(\varrho)}(z-k_{2\varrho-1})}$$

$$= \frac{2\pi i k_{2\nu-1}^{\mu-1}}{\sqrt{(k_{2\nu-1}-k_{2p+1})(k_{2\nu-1}-k_{2p+2})}.\prod_1^p{}_{(\varrho)}^{(\nu)}(k_{2\nu-1}-k_{2\varrho-1})},$$

und daraus ergiebt sich für die Determinante $|A_\lambda^{(\lambda')}|$ der durch die folgende Gleichung bestimmte Werth:

$$\frac{|A_\lambda^{(\lambda')}| \cdot \sqrt{\prod_1^p{}_{(\varrho)}((k_{2p+1}-k_{2\varrho-1})(k_{2p+2}-k_{2\varrho-1}))}}{(2\pi i)^p} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & k_1 & k_1^2 & \dots & k_p^{p-1} \\ 1 & k_3 & k_3^2 & \dots & k_3^{p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & k_{2p-1} & k_{2p-1}^2 & \dots & k_{2p-1}^{p-1} \end{vmatrix}}.$$

Die Integrale $B_\mu^{(\nu)}$ aber wachsen ins Unendliche, wenn man jenes Zusammenrücken der Verzweigungspunkte vornimmt. Aber die Verhältnisse der Grössen $B_\mu^{(1)}$, $B_\mu^{(2)}$, ... $B_\mu^{(p)}$, wenn $k_2 = k_1 + \Delta_1$, $k_4 = k_3 + \Delta_2$, ... $k_{2p} = k_{2p-1} + \Delta_p$ genommen wird, können durch geeignete Wahl der Verhältnisse der ins Unendliche abnehmenden Grössen Δ_1, Δ_2, ... Δ_p beliebige sein, während die Grenzwerthe der Grössen $A_\mu^{(\nu)}$ von diesen Verhältnissen nicht abhängen. Nun hat man (*R.* pag. 144) die Relation

$$\sum_1^p{}_{(\varrho)}(A_\mu^{(\varrho)} B_{\mu'}^{(\varrho)} - A_{\mu'}^{(\varrho)} B_\mu^{(\varrho)}) = 0,$$

woraus sich mit Rücksicht auf die Willkürlichkeit der Verhältnisse $B_\mu^{(1)} : B_\mu^{(2)} : B_\mu^{(3)} \dots$ und der Constanz der Grössen $A_\mu^{(\varrho)}$ die Verhältnisse ergeben

$$B_\mu^{(\varrho)} : B_{\mu'}^{(\varrho)} = A_\mu^{(\varrho)} : A_{\mu'}^{(\varrho)} \quad \text{oder} \quad B_\mu^{(\varrho)} = f^{(\varrho)} . A_\mu^{(\varrho)}$$

für verschwindende Δ_1, Δ_2, ... Δ_p. Daraus folgt unmittelbar, dass für $\mu \geqslant \mu'$

$$a_{\mu\mu'} = i\pi \sum_1^p{}_{(\varrho)} \frac{\delta \lg |A_\lambda^{(\lambda')}|}{\delta A_\varrho^{(\mu)}} \cdot B_\varrho^{(\mu')}$$

$$= i\pi . f^{(\mu')} . \sum_1^p{}_{(\varrho)} \frac{\delta \lg |A_\lambda^{(\lambda')}|}{\delta A_\varrho^{(\mu)}} \cdot A_\varrho^{(\mu')} = i\pi f^{(\mu')} . 0$$

im Verhältniss zu den Grössen

$$a_{\mu\mu} = i\pi f^{(\mu)} . \sum_1^p{}_{(\varrho)} \frac{\delta \lg |A_\lambda^{(\lambda')}|}{\delta A_\varrho^{(\mu)}} A_\varrho^{(\mu)} = i\pi f^{(\mu)},$$

weil die Grössen $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, ... $f^{(p)}$ in endlichen Verhältnissen zu einander stehen, wenn die Verhältnisse Δ_1, Δ_2, ... Δ_p endlich sind, verschwindend klein sind. Bei Annahme solcher endlichen Verhältnisse, (welche übrigens

nicht nöthig aber bequem ist) sieht man sofort ein, dass die $p$fach unendliche Reihe für $\vartheta(v_1, v_2, \ldots v_p)$ sich auf das Glied der Ordnung Null, also auf die Zahl 1 reducirt.

2.

Setzt man für die Variabeln der ϑ-Function v_1, v_2, ... v_p bez. die Grössen

$$u_1(s, z) - \sum_1^p{}_{(\varrho)} u_1(s_\varrho, z_\varrho), \quad u_2(s, z) - \sum_1^p{}_{(\varrho)} u_2(s_\varrho, z_\varrho), \ \ldots \ u_p(s_\varrho, z_\varrho) - \sum_1^p{}_{(\varrho)} u_p(s_\varrho, z_\varrho)$$

und für die Moduln die Periodicitätsmoduln ..., $a_{\mu\mu'}$, ... der Integrale u_1, u_2, ... u_p, so kann man die in den letzteren noch willkürlich gelassenen Constanten auf eine und nur eine Weise so bestimmen, dass $\vartheta(v_1, v_2, \ldots v_p)$ in den Punkten (s_1, z_1), (s_2, z_2), ... (s_p, z_p) der Fläche T verschwindet. Die Mittel zu dieser Bestimmung hat *Riemann* im Art. 23 seiner *Abel*schen Functionen (*R.* pag. 148) angegeben. In unserem speciellen Falle lautet die dort gegebene Vorschrift dahin, dass $\vartheta(v_1, v_2, \ldots v_p)$ verschwinden muss, wenn ..., v_μ, ... durch die Summen ..., $\sum_{(\varrho)}^{(p-1)} u_\mu(0, k_\varrho)$, ... ersetzt werden, worin die Summation über jede beliebige Combination von $p-1$ Verzweigungswerthen k_ϱ zu erstrecken ist, und gleichzeitig muss

$$\left(2\sum_{(\varrho)}^{(p-1)} u_1(0, k_\varrho), \quad 2\sum_{(\varrho)}^{(p-1)} u_2(0, k_\varrho), \quad \ldots \quad 2\sum_{(\varrho)}^{(p-1)} u_p(0, k_\varrho)\right) \equiv (0, 0, \ldots 0)$$

nach den $2p$ Modulsystemen der Functionen u sein. Aus diesen Bedingungen geht hervor, dass x_μ in der Form $\frac{1}{p-1}\sum_1^p{}_{(\varrho)}\delta_\varrho . a_{\mu\varrho} + \gamma_\mu \frac{i\pi}{p-1}$ enthalten sein muss, wenn δ_ϱ, γ_ϱ ganze Zahlen sind. Bildet man die Summen der Werthe von ..., $2u_\mu(s, z)$, ... für $p-1$ Verzweigungspunkte, so erhält man mit Hilfe der Tabelle des ersten Artikels Ausdrücke von der Form

$$\ldots, \ \sum_1^p{}_{(\varrho)} h_\varrho a_{\mu\varrho} + g_\mu i\pi, \ \ldots$$

und setzt man die Hälften dieser Summen für die Variabeln, ..., v_μ, ... in die Function $\vartheta(\ldots, v_\mu, \ldots)$ ein, so verschwindet diese nach einer in der Einleitung gemachten Erinnerung dann, wenn $\sum_1^p{}_{(\varrho)} h_\varrho g_\varrho \equiv 1 \pmod 2$ ist. Es müssen daher die Grössen γ_ϱ, δ_ϱ so bestimmt werden, dass diese Forderung erfüllt ist. Wir bezeichnen nun die Summe

$$u_\mu(0, k_\lambda) + \sum_1^{p-2}{}_{(\varrho)} u_\mu(0, k_{2\varrho-1})$$

mit $U_\mu^{(\lambda)}$ und setzen

$$1+\delta_1=h_1,\quad 1+\delta_2=h_2,\ \ldots,\ 1+\delta_{p-2}=h_{p-2},\ \delta_{p-1}=h_{p-1},\quad \delta_p=h_p,$$
$$p-3+\gamma_1=g_1,\ p-4+\gamma_2=g_2,\ \ldots,\ 1+\gamma_{p-3}=g_{p-3},\ \gamma_{p-2}=g_{p-2},\ \gamma_{p-1}=g_{p-1},\ \gamma_p=g_p,$$

so finden wir

$$(A.)\qquad 2U_\mu^{(2\nu)} = \sum_1^p{}_{(\varrho)} h_\varrho a_{\mu\varrho} + g_\mu i\pi + a_{\mu\nu} + \theta_\mu i\pi,$$

worin $a_{\mu p+1}=0$ zu setzen ist, wenn die Gleichung für $\nu=p+1$ gebildet wird, und $\theta_\mu=1$ für $\mu\leqq\nu$, $\theta_\mu=0$ für $\mu>\nu$ und für $\nu=p+1$ zu nehmen ist. Ferner ist

$$(B.)\qquad 2U_\mu^{(2p-3)} = \sum_1^p{}_{(\varrho)} h_\varrho a_{\mu\varrho} + a_{\mu p-1} + g_\mu i\pi + \varepsilon_\mu i\pi,$$

worin $\varepsilon_\mu=1$ für $\mu\leqq p-2$, $\varepsilon_\mu=0$ für $\mu=p-1,\ p$ zu setzen ist. Weiter ist

$$(C.)\qquad 2U_\mu^{(2p-1)} = \sum_1^p{}_{(\varrho)} h_\varrho a_{\mu\varrho} + a_{\mu p} + g_\mu i\pi + \eta_\mu i\pi,$$

worin $\eta_1=\eta_2=\cdots=\eta_{p-1}=1,\ \eta_p=0$ ist. Endlich ist

$$(D.)\qquad 2U_\mu^{(2p+1)} = \sum_1^p{}_{(\varrho)} h_\varrho a_{\mu\varrho} + i\pi g_\mu + i\pi.$$

Da nun $\vartheta(\ldots, U_\mu^{(\lambda)}, \ldots)$ verschwinden muss, so folgt aus $(A.)$ für $\nu=p+1$ zuerst die Bedingung

$$\sum_1^p{}_{(\varrho)} h_\varrho g_\varrho \equiv 1 \pmod 2,$$

und wenn man dies in Rücksicht zieht, für jeden andern Werth von ν

$$\sum_1^\nu{}_{(\varrho)} h_\varrho + g_\nu \equiv 1 \pmod 2$$

und hieraus, wenn die Congruenz von der, in welcher $\nu+1$ statt ν gesetzt ist, abgezogen wird,

$$(a.)\qquad g_{\nu+1}-g_\nu \equiv h_{\nu+1} \pmod 2.$$

Aus $(B.)$ folgt

$$\sum_1^{p-2}{}_{(\varrho)} h_\varrho + g_{p-1} \equiv 0 \pmod 2,$$

aus $(C.)$ und $(D.)$

$$\sum_1^{p-1}{}_{(\varrho)} h_\varrho + g_p \equiv 0 \pmod 2,\qquad \sum_1^p h_\varrho \equiv 0 \pmod 2,$$

und aus diesen Congruenzen zieht man durch sehr einfache Combinationen die Resultate

$$(b.)\qquad g_p \equiv g_{p-2} \equiv h_p \equiv h_{p-1} \equiv 1 \pmod 2,\qquad g_{p-1} \equiv 0 \pmod 2.$$

Setzen wir nun weiter

$$V_\mu^{(\lambda)} = \sum_{1(\varrho)}^{p-2} u_\mu(0, k_{2\varrho}) + u_\mu(0, k_\lambda),$$

so ist

$$2V_\mu^{(2\nu-1)} = \sum_{1(\varrho)}^{p} h_\varrho a_{\mu\varrho} + a_{\mu\nu} + g_\mu i\pi + \zeta_\mu i\pi,$$

worin

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \cdots = \zeta_{\nu-1} = 2, \quad \zeta_\nu = \zeta_{\nu+1} = \cdots = \zeta_{p-3} = 1, \quad \zeta_{p-2} = \zeta_{p-1} = \zeta_p = 0$$

ist. Da nun $\vartheta(\ldots, V_\mu^{(\lambda)}, \ldots)$ verschwindet, so folgt hieraus, wenn $\nu \leqq p-2$ ist, mit Vernachlässigung ganzer Multipla von 2

$$g_\nu \equiv 1 + h_\nu + h_{\nu+1} + \cdots + h_{p-2} \pmod 2,$$

woraus wieder folgt

$$(c.) \qquad g_{\nu+1} - g_\nu \equiv h_\nu \pmod 2,$$

und für $\nu = p-2$ hat man $h_{p-2} \equiv g_{p-2} - 1$ und nach $(b.)$ $h_{p-2} \equiv 0 \pmod 2$, also

$$h_1 \equiv h_2 \equiv \cdots \equiv h_{p-2} \equiv 0, \quad h_{p-1} \equiv h_p \equiv 1$$

und durch $(c.)$

$$g_{p-2\nu-1} \equiv 0, \qquad g_{p-2\nu} \equiv 1 \pmod 2.$$

Hieraus schliesst man, dass für die Zahlen γ_ϱ, δ_ϱ die Werthe gewählt werden können:

$$\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_p = 1, \quad \gamma_p = 1, \quad \gamma_{p-1} = 2, \quad \ldots, \quad \gamma_1 = p,$$

und man erhält hieraus für die Integrale u in den Punkten k_1 die folgenden Werthe *):

$$2u_1(0, k_1) = \frac{p\,i\pi}{p-1} + \frac{1}{p-1} \sum_{1(\varrho)}^{p} a_{1\varrho} + a_{11},$$

$$2u_2(0, k_1) = \frac{(p-1)\,i\pi}{p-1} + \frac{1}{p-1} \sum_{1(\varrho)}^{p} a_{2\varrho} + a_{21},$$

. . . . . .

$$2u_\nu(0, k_1) = \frac{(p-\nu+1)\,i\pi}{p-1} + \frac{1}{p-1} \sum_{1(\varrho)}^{p} a_{\nu\varrho} + a_{\nu 1},$$

. . . . . .

$$2u_p(0, k_1) = \frac{i\pi}{p-1} + \frac{1}{p-1} \sum_{1(\varrho)}^{p} a_{p\varrho} + a_{p1}.$$

---

*) Dieselben Anfangswerthe sind auch von Herrn *Neumann* gewählt worden.

3.

Ist nun wie früher $v_\mu = u_\mu(s, z) - \sum_1^p{}_{(\varrho)} u_\mu(s_\varrho, z_\varrho)$, so ist

$$\frac{d \lg \vartheta(v_1, v_2, \ldots v_p)}{dz}$$

als Function von (s_ν, z_ν) in T' einwerthig, nimmt zu beiden Seiten der Linien c und der Querschnitte a denselben Werth an und ist auf der positiven Seite des Querschnittes $b_\varkappa$ um

$$2\frac{du_\varkappa(s,z)}{dz} = 2\sum_1^p{}_{(\varrho)} \frac{\alpha_\varrho^{(\varkappa)} z^{\varrho-1}}{s}$$

grösser als auf dem negativen, und wird im Punkte (s, z), der durch ε bezeichnet werden soll, unendlich gross wie $\frac{1}{z - z_\nu}$, und ist sonst in T' überall stetig und endlich. Durch diese Eigenschaften ist aber eine solche Function, die wir mit

$$t(\varepsilon;\ s_\nu, z_\nu)$$

bezeichnen, bis auf eine von z_ν unabhängige additive Constante schon bestimmt, wenn auch der Werth der Periodicitätsmoduln an den Querschnitten $b_1, b_2, \ldots b_p$ nicht gegeben ist; weil die Differenz zweier solcher etwa vorhandener verschiedener Functionen in T' allenthalben stetig sein würde und an p Querschnitten den Periodicitätsmodul Null hätte, folglich constant sein müsste. Nun ist

$$\frac{\partial u_\varkappa(s_\nu, z_\nu)}{\partial k_\mu}$$

ein in T' einwerthiges Integral, welches nur für $z = k_\mu$ in der ersten Ordnung unendlich gross wird, aber sonst in T' und beim Uebergang über die Linien c und a stetig ist, und mit $\sqrt{z_\nu - k_\mu}$ multiplicirt für $z_\nu = k_\mu$ den Werth annimmt

$$\lim_{z=k_\mu} \sqrt{(z_\nu - k_\mu)} \cdot \frac{\partial u_\varkappa(s_\nu, z_\nu)}{\partial z_\nu} = -\sum_1^p{}_{(\varrho')} \frac{\alpha_{\varrho'}^{(\varkappa)} k_\mu^{\varrho'-1}}{\prod_1^{2p+2}{}_{(\varrho)}^{(\mu)} (k_\mu - k_\varrho)}.$$

Man kann daher in der Gleichung

$$t(\varepsilon;\ s_\nu, z_\nu) = \sum_{(\varrho)}^{(p)} \frac{\partial u_\varkappa(s_\nu, z_\nu)}{\partial k_\varrho} c_{\varkappa\varrho} + \frac{s. \prod_{(\varrho)}^{(p)}(z_\nu - k_\varrho) + s_\nu \prod_{(\varrho)}^{(p)}(z - k_\varrho)}{2s.(z - z_\nu) \prod_{(\varrho)}^{(p)}(z_\nu - k_\varrho)},$$

in welcher $\varkappa$ willkürlich ist, und die Summation und die Producte über p willkürlich gewählte Verzweigungspunkte zu erstrecken sind, — man kann in dieser Gleichung die p Grössen $c_{\varkappa 1}, c_{\varkappa 2}, \ldots c_{\varkappa p}$ so bestimmen, dass die

Function nur für $(s_\nu, z_\nu) = (s, z)$ unendlich gross wird, (was wie $\frac{1}{z - z_\nu}$ geschieht). Man erreicht dies, wenn man

$$c_{\varkappa\varrho} = \frac{\prod_1^{2p+2}{}^{(\varrho)}_{(\varrho')}(k_\varrho - k_{\varrho'}) \cdot \prod_{(\varrho')}^{(p)}(z - k_{\varrho'})}{\sum_1^p{}_{(\varrho')} \alpha_{\varrho'}^{(\varkappa)} k_\varrho^{\varrho'-1} \cdot 2s(z - k_\varrho) \prod_{(\varrho')}^{(p)}{}^{(\varrho)}(k_\varrho - k_{\varrho'})}$$

setzt. Daraus ergiebt sich die Gleichung

$$(1.) \quad t(\varepsilon; s_\nu, z_\nu) = \sum_{(\varrho)}^{(p)} \left\{ \prod_{(\varrho')}^{(p)}{}^{(\varrho)} \frac{(z - k_{\varrho'})}{(k_\varrho - k_{\varrho'})} \cdot \frac{\prod_1^{2p+2}{}^{(\varrho)}_{(\varrho')}(k_\varrho - k_{\varrho'}) \cdot \partial u_\varkappa(s_\nu, z_\nu)}{\sum_1^p{}_{(\varrho')} \alpha_{\varrho'}^{(\varkappa)} k_\varrho^{\varrho'-1} \cdot 2s\, \partial k_\varrho} \right\} + \frac{s \prod_{(\varrho)}^{(p)}(z_\nu - k_\varrho) + s_\varrho \prod_{(\varrho)}^{(p)}(z - k_\varrho)}{2s \cdot (z - z_\nu) \prod_{(\varrho)}^{(p)}(z_\nu - k_\varrho)} \cdot$$

Die additive Constante in $t(\varepsilon; s_\nu, z_\nu)$ wollen wir so wählen, wie sie in dieser Gleichung (1.) sich vorfindet. Hieraus folgt die Gleichung

$$(2.) \quad \frac{d \lg \vartheta(v_1, v_2, \ldots v_p)}{dz} = \prod_1^p{}_{(\varrho)} t(\varepsilon; s_\varrho, z_\varrho) + C,$$

worin C von s und z abhängt, von s_ν, z_ν ganz unabhängig ist. Man hat Mittel, die Grösse C als Function von z und den Grössen $k_1, k_2, \ldots k_{2p+2}$ zu bestimmen, z. B. dadurch, dass man $(v_1, v_2, \ldots v_p) \equiv (0, 0, \ldots 0)$ setzt nach den $2p$ Modulsystemen der Functionen u, was bei jeder Lage von ε geschehen kann. Es mag genügen diese Constante für den Fall auszuwerthen, in welchem ε auf einen Verzweigungspunkt k_ν fällt. Für diesen Fall geht die Gleichung (2.) über in

$$(3.) \quad \sum_1^p{}_{(\varrho)} \frac{\partial \lg \vartheta(v_1, v_2, \ldots v_p)}{\partial v_\varrho} \cdot \sum_1^p{}_{(\varrho')} \alpha_{\varrho'}^{(\varrho)} k_\nu^{\varrho'-1} = \sum_1^p{}_{(\varrho)} \frac{\prod_1^{2p+2}{}^{(\nu)}_{(\varrho')}(k_\nu - k_{\varrho'}) \cdot \partial u_\varkappa(s_\varrho, z_\varrho)}{2 \sum_1^p{}_{(\varrho')} \alpha_{\varrho'}^{(\varkappa)} k_\nu^{\varrho'-1} \cdot \partial k_\nu} + K_{\varkappa\nu},$$

worin $K_{\varkappa\nu}$ offenbar nur von den Verzweigungswerthen abhängt. Vergleichen wir zunächst die Periodicitätsmoduln der beiden Seiten der Gleichung (3.) am Querschnitt $b_{\varkappa'}$ in Bezug auf die Variable z_ϱ, so folgt

$$(4^a.) \quad 2 \sum_1^p{}_{(\varrho)} \alpha_\varrho^{\varkappa'} \cdot k_\nu^{\varrho-1} = \frac{\prod_1^{2p+2}{}^{(\nu)}_{(\varrho)}(k_\nu - k_\varrho) \cdot \partial a_{\varkappa\varkappa'}}{2 \sum_1^p{}_{(\varrho')} \alpha_{\varrho'}^{(\varkappa)} k_\nu^{\varrho'-1} \partial k_\nu},$$

woraus wir die wichtige Beziehung erhalten:

$$(4.) \quad \frac{\partial a_{\mu\mu'}}{\partial k_\nu} = \frac{4 \sum_1^p{}_{(\varrho)} \alpha_\varrho^{(\mu)} k_\nu^{\varrho-1} \cdot \sum_1^p{}_{(\varrho')} \alpha_{\varrho'}^{(\mu')} k_\nu^{\varrho'-1}}{\prod_1^{2p+2}{}^{(\nu)}_{(\varrho)}(k_\nu - k_\varrho)}.$$

Die Constante $K_{\varkappa\nu}$ aber ist diese

$$(5.) \qquad K_{\varkappa\nu} = -\frac{\prod_{1}^{2p+2}{}^{(\nu)}_{(\varrho)}(k_\nu - k_\varrho).\partial[u_\varkappa(0,k_\nu)]}{2\sum_{1}^{p}{}_{\varrho}\,\alpha^{(\varkappa)}_{\varrho}k_\nu^{\varrho-1}.\partial k_\nu},$$

(worin hinter das Differentialzeichen eine Klammer gesetzt ist, um anzudeuten, dass man nicht, das Integral im Sinne habend, die Grenze als variabel ansehen darf). Setzt man nämlich, was immer geschehen kann, für $z_1, z_2, \ldots z_p$ solche von k_ν verschiedene Verzweigungspunkte, für welche, unter h_ϱ, g_ϱ ganze Zahlen verstanden,

$$(v_1, v_2, \ldots v_p) \equiv \left(\sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)} a_{1\varrho}h_\varrho + g_1 i\pi, \ldots \sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)} a_{p\varrho}h_\varrho + g_p i\pi\right)$$

ist, so nimmt die linke Seite der Gleichung (3.) vermöge bekannter Eigenschaften der ϑ-Functionen den Werth an

$$-2\sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)}h_\varrho \cdot \sum_{1}^{p}{}_{(\varrho')}\alpha^{(\varrho)}_{\varrho'}k_\nu^{\varrho'-1} = -\sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)}h_\varrho \cdot \frac{\prod_{1}^{2p+2}{}^{(\nu)}_{\varrho'}(k_\nu - k_{\varrho'})}{2\sum_{1}^{p}{}_{\varrho'}\alpha^{(\varkappa)}_{\varrho'}k_\nu^{\varrho'-1}} \cdot \frac{\partial a_{\varkappa\varrho}}{\partial k_\nu},$$

worin die rechte Seite aus $(4^a.)$ folgt, und worin $\varkappa$ willkürlich ist. Genau denselben Werth nimmt aber die rechte Seite der Gleichung (3.) an, wenn $K_{\varkappa\nu}$ in ihr die Bedeutung (5.) hat, weil sie in die Form gebracht werden kann

$$-\frac{\prod_{1}^{2p+2}{}^{(\nu)}_{(\varrho')}(k_\nu - k_{\varrho'})}{2\sum_{1}^{p}{}_{(\varrho')}\alpha^{(\varkappa)}_{\varrho'}k_\nu^{\varrho'-1}} \cdot \frac{\partial\left(\sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)}u_\varkappa(s_\varrho, z_\varrho) - u_\varkappa(0, k_\nu)\right)}{\partial k_\nu},$$

woraus unsere Behauptung unmittelbar folgt.

Setzen wir in der Gleichung (1.) ε_μ statt ε, womit ein Punkt (s_μ, z_μ) bezeichnet wird, und statt des Punktes (s_ν, z_ν) jener Gleichung (s, z), so finden wir durch Grenzübergang die Gleichung:

$$(6.) \qquad \lim_{z = k_\nu} \frac{\partial t(\varepsilon_\mu; s, z)}{\partial z} = \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 u_\varkappa(s_\mu, z_\mu)}{\partial z_\mu \partial k_\nu} \cdot \frac{\prod_{1}^{2p+2}{}^{(\nu)}_{(\varrho)}(k_\nu - k_\varrho)}{\sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)}\alpha^{(\varkappa)}_{\varrho}k_\nu^{\varrho-1}}.$$

Um die Function $\dfrac{\partial \lg \vartheta(v_1, v_2, \ldots v_p)}{\partial v_\varrho}$, in so weit sie von (s, z) abhängt, zu bestimmen, haben wir zu beachten, dass sie an den Linien c und a in T die Periodicitätsmoduln Null hat, dass sie auch an den Linien $b_1, b_2, \ldots b_p$ ausser an b_ϱ die Periodicitätsmoduln Null hat, an b_ϱ aber den -2, dass sie für (s, z) gleich (s_1, z_1), (s_2, z_2), $\ldots$ (s_p, z_p) unendlich wird, sonst aber in T' endlich und stetig ist. Dieselben Eigenschaften besitzt die Function

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial z_1} & \frac{\partial u_1}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial z_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_{\varrho-1}}{\partial z_1} & \frac{\partial u_{\varrho-1}}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial u_{\varrho-1}}{\partial z_p} \\ -t(\varepsilon_1; s, z) & -t(\varepsilon_2; s, z) & \cdots & -t(\varepsilon_p; s, z) \\ \frac{\partial u_{\varrho+1}}{\partial z_1} & \frac{\partial u_{\varrho+1}}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial u_{\varrho+1}}{\partial z_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_p}{\partial z_1} & \frac{\partial u_p}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial u_p}{\partial z_p} \end{vmatrix} : \left| \frac{\partial u_{\lambda'}}{\partial z_\lambda} \right|,$$

$\frac{\partial u_\varkappa}{\partial z_\nu}$ kurz für $\frac{\partial u_\varkappa(s_\nu, z_\nu)}{\partial z_\nu}$ gesetzt. Diese beiden Functionen können sich nur durch eine von (s, z) unabhängige additive Constante unterscheiden. Die Differenz der beiden Functionen ist nämlich in T einwerthig und in p und nur p *willkürlich* vorgegebenen Punkten (s_1, z_1), (s_2, z_2), ... (s_p, z_p) unendlich gross erster Ordnung. Eine solche Function ist nothwendig in Bezug auf (s, z) constant, weil zwischen den p Punkten, in denen eine Function einer $2p+1$ fach zusammenhängenden Fläche T unendlich gross erster Ordnung wird, nothwendig eine Relation stattfinden muss (*R.* pag. 122). Differentiiren wir die hieraus entspringende Gleichung nach z, so ist der Differentialquotient von jener Constanten frei und man hat

$$(7.) \quad \left\{ \begin{aligned} &-\left| \frac{\partial u_{\lambda'}}{\partial z_\lambda} \right| \cdot \sum_1^p{}_{\varrho'} \frac{\partial \lg \vartheta(v_1, v_2, \ldots v_p)}{\partial v_\varrho \partial v_{\varrho'}} \frac{\partial u_{\varrho'}(s, z)}{\partial z} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial z_1} & \frac{\partial u_1}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial z_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_{\varrho-1}}{\partial z_1} & \frac{\partial u_{\varrho-1}}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial u_{\varrho-1}}{\partial z_p} \\ t'(\varepsilon_1; s, z) & t'(\varepsilon_2; s, z) & \cdots & t'(\varepsilon_p; s, z) \\ \frac{\partial u_{\varrho+1}}{\partial z_1} & \frac{\partial u_{\varrho+1}}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial u_{\varrho+1}}{\partial z_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_p}{\partial z_1} & \frac{\partial u_p}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial u_p}{\partial z_p} \end{vmatrix}, \end{aligned} \right.$$

wenn unter $t'(\varepsilon_\mu; s, z)$ der Differentialquotient $\frac{\partial t(\varepsilon_\mu; s, z)}{\partial z}$ verstanden wird.

4.

Multipliciren wir nun die Gleichung (7.) mit s und setzen $z = k_\mu$, so folgt daraus mit Rücksicht auf (6.)

$$\left| -\frac{\partial u_{\lambda'}}{\partial z_\lambda} \right| \cdot \sum_1^p{}_{\varrho'} \frac{\partial^2 \lg \vartheta(v_1, v_2, \dots v_p)}{\partial v_\varrho \, . \, \partial v_{\varrho'}} \cdot \frac{\sum_1^p{}_{(r)} \alpha_r^{(\varrho')} k_\mu^{r-1} \cdot \sum_1^p{}_{(r')} \alpha_{r'}^{(z)} k_\mu^{r'-1}}{\prod_1^{2p+2}{}_{(\nu)}^{(\mu)} (k_\mu - k_\nu)}$$

$$= \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial z_1} & \frac{\partial u_1}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial z_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_{\varrho-1}}{\partial z_1} & \frac{\partial u_{\varrho-1}}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial u_{\varrho-1}}{\partial z_p} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z_1 \partial k_\mu} & \frac{\partial u_z}{\partial z_2 \partial k_\mu} & \dots & \frac{\partial u_z}{\partial z_\mu \partial k_\mu} \\ \frac{\partial u_{\varrho+1}}{\partial z_1} & \frac{\partial u_{\varrho+1}}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial u_{\varrho+1}}{\partial z_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_p}{\partial z_1} & \frac{\partial u_p}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial u_p}{\partial z_p} \end{vmatrix} .$$

Wählt man für die willkürliche Zahl z die Zahl ϱ und wendet auf die linke Seite die Gleichung (4.) an und bildet die Summe der erhaltenen Ausdrücke für $\varrho = 1$, $\varrho = 2$, $\dots$ $\varrho = p$, so folgt daraus die Gleichung

$$(8.) \qquad \tfrac{1}{4} \left(\sum_1^p \right)^2_{(\varrho\varrho')} \frac{\partial^2 \lg \vartheta(v_1, v_2, \dots v_p)}{\partial v_\varrho \, . \, \partial v_{\varrho'}} \frac{\partial a_{\varrho\varrho'}}{\partial k_\mu} = -\tfrac{1}{2} \frac{\partial \lg \left| \frac{\partial u_{\lambda'}}{\partial z_\lambda} \right|}{\partial k_\mu} .$$

Wenn nun

$$(v_1, v_2, \dots v_p) = (0, 0, \dots 0)$$

gesetzt wird, so bestehen (*R.* pag. 151) die Gleichungen

$$\tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 \lg \vartheta}{\partial v_\varrho \, \partial v_{\varrho'}} = \frac{\partial \lg \vartheta}{\partial a_{\varrho\varrho'}}, \qquad \tfrac{1}{4} \frac{\partial^2 \lg \vartheta}{\partial v_\varrho \, \partial v_\varrho} = \frac{\partial \lg \vartheta}{\partial a_{\varrho\varrho}},$$

aus welchen folgt, wenn man sie auf (8.) anwendet,

$$(9.) \qquad \frac{\partial \lg \vartheta(0, 0, \dots 0)}{\partial k_\mu} = -\tfrac{1}{2} \frac{\partial \lg |\alpha_\lambda^{(\lambda')}|}{\partial k_\mu} + \tfrac{1}{2} \frac{\partial \lg}{\partial k_\mu} \sqrt{\prod_1^p{}_{(\varrho)} (z_\varrho^{(\mu)} - k_\mu)},$$

worin $z_1^{(\mu)}$, $z_2^{(\mu)}$, $\dots$ $z_p^{(\mu)}$ solche (von k_μ verschiedene) Verzweigungspunkte bedeuten, für welche

$$(\dots, u_\nu(0, k_\mu) - \sum_1^p{}_{(\varrho)} u_\nu(0, z_\varrho^{(\mu)}), \dots) \equiv (0, 0, \dots 0)$$

ist. Zur Herleitung der rechten Seite der Gleichung (9.) aus der Gleichung (8.) benutzt man den Productsatz der Determinanten.

Es mag nun mit Discr. $(h_1, h_2, \ldots h_p; g_1, g_2, \ldots g_p)$ das Product aller Differenzen von solchen $p+1$ Verzweigungswerthen, worin der Punkt mit grösserem Index immer der Minuendus ist, bedeuten, welche die Eigenschaft besitzen, dass

$$(\ldots, -\sum_{(\varrho)}^{(p)} u_\nu(0, k_\varrho) + u_\nu(0, k_{\varrho'}), \ldots) \equiv \left(\ldots, g_\nu \frac{i\pi}{2} + \sum_{1}^{p}{}'_{(\varrho)} h_\varrho \frac{a_{\nu\varrho}}{2}, \ldots\right)$$

nach den $2p$ Modulsystemen der Functionen u ist, und Discr. $(h_1, h_2, \ldots h_p; g_1, g_2, \ldots g_p)$ das ebenso geordnete Differenzenproduct der $p+1$ übrigen Verzweigungspunkte, welche dieselbe Eigenschaft haben. Dann wird die Relation (9.), wie man sofort erkennt, durch die Gleichung integrirt

$$\lg \vartheta(0, 0, \ldots 0) = \text{Const.} + \lg \sqrt{\frac{|A_\lambda^{(\lambda')}|}{(2\pi i)^p}} + \lg \sqrt[4]{\text{Discr.}(0, 0, \ldots 0) \cdot \text{Discr.}'(0, 0, \ldots 0)},$$

worin die Constante von k_μ, und da μ willkürlich ist, von sämmtlichen Verzweigungswerthen unabhängig ist. Es enthält aber Discr. $(0, 0, \ldots 0)$ die Verzweigungspunkte mit geraden, Discr.$'(0, 0, \ldots 0)$ die Verzweigungspunkte mit ungeraden Indices.

Um die Constante zu bestimmen, setzen wir $k_2 = k_1 + \Delta_1$, $k_4 = k_3 + \Delta_2, \ldots$ $k_{2p} = k_{2p-1} + \Delta_p$ und lassen die Δ gegen Null convergiren. Dann erhält (nach Art. 1) $\lg \vartheta(0, 0, \ldots 0)$ den Werth Null und $\sqrt{\frac{|A_\lambda^{(\lambda')}|}{(2\pi i)^p}}$ den Werth

$$\frac{1}{\sqrt[4]{\text{Discr.}(0, 0, \ldots 0)\, \text{Discr.}'(0, 0, \ldots 0)}},$$

woraus sich ergiebt, dass die additive Constante Null sein muss. Demnach kann in dem Ausdruck

$$(11.) \qquad \vartheta(0, 0, \ldots 0) = \sqrt{\frac{|A_\lambda^{(\lambda')}|}{(2\pi i)^p}} \cdot \sqrt[4]{\text{Discr.}(0, 0, \ldots 0) \cdot \text{Discr.}'(0, 0, \ldots 0)}$$

nur noch ein Zweifel über die Wahl der vierten Wurzel der Einheit sein, welche in das Wurzelzeichen eingerechnet ist. Um dieses festzulegen, nehme man die Grössen $k_1, k_2, \ldots k_{2p+2}$ reell und der Grösse gemäss nach den Ungleichungen geordnet an

$$k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_{2p+2}.$$

Dann sind die $A_\mu^{(\nu)}$ sämmtlich rein imaginäre und die $B_\mu^{(\nu)}$ rein reelle Grössen,

und daher die rechte Seite in (11.) abgesehen von der factoriellen vierten Wurzel der Einheit reell. Die $a_{\mu\mu'}$ aber sind dann alle rein reelle (den Convergenzbedingungen immer von selbst genügende) Grössen, folglich ist jedes Glied der ϑ-Reihe, folglich $\vartheta(0, 0, \ldots 0)$ eine positive reelle Grösse. Demnach müssen die Wurzeln der rechten Seite so genommen werden, dass der ganze Ausdruck positiv reell ist.

Das Vorzeichen für jede andere Lage der Verzweigungspunkte ergiebt sich durch stetige Ueberführung derselben aus der reellen, wie angegeben geordneten Lage in die vorgegebene Lage.

5.

Der Werth von $u_\mu(0, k_\nu)$ ist in der Form enthalten

$$\sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)} h_\varrho^{(\nu)} a_{\mu\varrho} + g_\mu^{(\nu)} i\pi,$$

worin $h_\varrho^{(\nu)}$, $g_\mu^{(\nu)}$ Brüche sind, deren Nenner $2(p-1)$ ist. Wir setzen im Folgenden

$$v_\mu^{(\nu)} = u_\mu(0, k_\nu) - \sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)} u_\mu(s_\varrho, z_\varrho)$$

und

$$\vartheta_\nu = e^{2\sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)} h_\varrho^{(\nu)} v_\varrho^{(\nu)}} \cdot \vartheta(v_1^{(\nu)}, v_2^{(\nu)}, \ldots v_p^{(\nu)}).$$

Dann ist (*R.* pag. 154) der Quotient

$$\frac{e^{\sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)} h_\varrho^{(\mu)} (u_\varrho(0, k_\mu) - u_\varrho(0, k_\nu))}}{e^{\sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)} h_\varrho^{(\nu)} (u_\varrho(0, k_\nu) - u_\varrho(0, k_\mu))}} \cdot \frac{\vartheta_\nu}{\vartheta_\mu}$$

eine zweiwerthige Function in T, die in dem Punkte k_μ unendlich und in dem Punkte k_ν Null wird in Bezug auf jede der Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_p$, and die zu beiden Seiten der Querschnitte nur durch Quadratwurzeln der Einheit verschiedene Werthe annimmt. Sie ist daher in der Form enthalten:

$$\text{Const.} \sqrt{\prod_{1}^{p}{}_{(\varrho)} \frac{z_\varrho - k_\nu}{z_\varrho - k_\mu}}.$$

Wirft man einmal $z_1, z_2, \ldots z_p$ auf p von k_μ, k_ν verschiedene Verzweigungswerthe und ein andermal $z_1, z_2, \ldots z_p$ auf die p übrigen von k_μ, k_ν verschiedenen Verzweigungswerthe, so erhält für diese beiden Annahmen der obige ϑ-Quotient abgesehen vom Vorzeichen einander reciproke Werthe, woraus sich für die Constante, die wir mit $C_{\mu\nu}$ bezeichnen, der Werth ergiebt

$$\sqrt[4]{\prod_{1}^{2p+2}{}_{(\varrho)}^{(\nu,\mu)} \frac{k_\mu - k_\varrho}{k_\nu - k_\varrho}}\ *),$$

woraus die Gleichung fliesst:

$$(12.)\quad \frac{e^{\sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)} h_\varrho^{(\mu)}(u_\varrho(0,k_\mu) - u_\varrho(0,k_\nu))}}{e^{\sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)} h_\varrho^{(\nu)}(u_\varrho(0,k_\nu) - u_\varrho(0,k_\mu))}} \cdot \frac{\vartheta_\nu}{\vartheta_\mu} = \frac{\sqrt[4]{\prod_{1}^{2p+2}{}_{(\varrho)}^{(\nu,\mu)}(k_\mu - k_\varrho)}}{\sqrt[4]{\prod_{1}^{2p+2}{}_{(\varrho)}^{(\nu,\mu)}(k_\nu - k_\varrho)}} \cdot \sqrt{\prod_{1}^{p}{}_{(\varrho)} \frac{z_\varrho - k_\nu}{z_\varrho - k_\mu}}.$$

Hierin ist nur noch die Wahl der vierten Wurzel der Einheit, welche in den Wurzelzeichen steckt, zweifelhaft. Aus der Gleichung (12.) leitet man leicht die unter der über die ganzen Zahlen h, g zu machenden Voraussetzung

$$\sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)} h_\varrho g_\varrho \equiv 0 \pmod 2,$$

giltige Gleichung ab (Conf. die Einleitung in Bezug auf die Bezeichnung)

$$(13.)\quad \vartheta_{h_1, h_2, \ldots g_p}(0, 0, \ldots 0) = \sqrt{\frac{|A_\lambda^{(\lambda')}|}{(2\pi i)^p}} \cdot \sqrt[4]{\text{Discr.}(h_1, h_2, \ldots g_\mu) \cdot \text{Discr.}(h_1, h_2, \ldots g_p)},$$

worin für reelle, der Grösse nach wie die Indices geordnete k die Wurzeln positiv reell zu nehmen und den Grössen h, g nur die Werthe 0 oder 1 zuzuertheilen sind. Hierdurch ist das complexe Vorzeichen der Gleichung (12.) mit bestimmt, wenn nicht h, g solche Zahlen sind, für welche die Gleichung (13.) in $0 = 0$ übergeht.

Bezeichnen wir nun mit $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_p$, p Verzweigungspunkte, und mit $\vartheta_{\sigma_\varepsilon}$ diejenige ϑ-Function $\vartheta_{h_1, h_2, \ldots g_p}$, in welcher die h und g aus der Congruenz entnommen werden

$$(A.)\quad (\ldots, \sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)} u_\varkappa(\sigma_\varrho) - u_\varkappa(\sigma_\varepsilon), \ldots) \equiv (\ldots, \tfrac{1}{2}\sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)} a_{\varkappa\varrho} h_\varrho + g_\varkappa \frac{i\pi}{2}, \ldots).$$

Bezeichnen wir mit $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_{p+2}$ die übrigen Verzweigungspunkte und mit $\vartheta_{\tau_\varepsilon}$ diejenige ϑ-Function $\vartheta_{h_1, h_2, \ldots g_p}$, in welcher die h und g aus der Congruenz entnommen werden

$$(B.)\quad (\ldots, u_\varkappa(\tau_\nu) - \sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)} u_\varkappa(\tau_\varrho), \ldots) \equiv (\ldots, \tfrac{1}{2}\sum_{1}^{p}{}_{(\varrho)} a_{\varkappa\varrho} h_\varrho + g_\varkappa \frac{i\pi}{2}, \ldots),$$

in der die Summation der linken Seite über die p von τ_ν, τ_ε verschiedenen Verzweigungspunkte τ zu erstrecken sind. So können wir, die Argumente der ϑ-Functionen $v_1, v_2, \ldots v_p$ alle gleich Null genommen, die Gleichung beweisen

$$(14.)\quad \left|\frac{\partial \vartheta_{\sigma_{\lambda'}}}{\partial v_\lambda}\right| = \pm \vartheta_{\tau_1} \cdot \vartheta_{\tau_2} \ldots \vartheta_{\tau_{p+2}},$$

*) Zur Erklärung der Bezeichnung diene die Gleichung $\prod_{1}^{n}{}_{(\varrho)}^{(\nu,\mu)} \varphi(\varrho) = \frac{\prod_{1}^{n}{}_{(\varrho)} \varphi(\varrho)}{\varphi(\nu) \cdot \varphi(\mu)}$.

welche für den Fall $p=2$ schon von Herrn *Rosenhain* in seiner Preisarbeit über vierfach periodische Functionen (Gl. 116) angegeben ist.

Zu dem Ende bezeichnen wir noch mit $\vartheta_{\tau_\varepsilon,\sigma}$ diejenige ϑ-Function $\vartheta_{h_1 h_2,\dots g_p}$, bei welcher die h, g der Congruenz entnommen werden

$$(C.)\qquad (\dots, u_\varkappa(\tau_\varepsilon)-\sum_1^p{}_{(\varrho)}u_\varkappa(\sigma_\varrho),\dots)\equiv(\dots,\tfrac{1}{2}\sum_1^p{}_{(\varrho)}a_{\varkappa\varrho}h_\varrho+g_\varkappa\frac{i\pi}{2},\dots),$$

mit $\Delta(\sigma)$ das Product aller (einmaligen) Differenzen der Grössen $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_p$, mit $\Delta^{(\nu)}(\sigma)$ das der Grössen $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_{\nu-1}, \sigma_{\nu+1}, \dots \sigma_p$, mit $\Delta(\tau)$ das Product aller Differenzen der Grössen $\tau_1, \tau_2, \dots \tau_{p+2}$, mit $\Delta(\tau,\sigma_\nu)$ das der Grössen $\tau_1, \tau_2, \dots \tau_{p+2}, \sigma_\nu$, und mit $\Delta^{(\nu)}(\tau)$ das der Grössen $\tau_1, \tau_2, \dots \tau_{\nu-1}, \tau_{\nu+1}, \dots \tau_{p+2}$, mit Discr.$(\tau_\varepsilon)$, Discr.$'(\tau_\varepsilon)$ die Grössen Discr.$(h_1, h_2, \dots g_p)$, Discr.$'(h_1, h_2, \dots g_p)$, wenn die h, g aus der Congruenz $(B.)$ entnommen werden, mit Discr.$(\tau_\varepsilon,\sigma)$, Discr.$'(\tau_\varepsilon,\sigma)$ die Grössen Discr.$(h_1,h_2,\dots g_p)$, Discr.$'(h_1,h_2,\dots g_p)$, wenn die h, g der Congruenz $(C.)$ entnommen werden, mit $Q_\mu^{(\nu)}$ aber bezeichnen wir den Quotienten auf der linken Seite der Gleichung (12.), wenn darin k_μ durch τ_μ, k_ν durch σ_ν ersetzt wird. Dann haben wir aus (12.)

$$\frac{\partial Q_\mu^{(\nu)}}{\partial z_{\nu'}} = \tfrac{1}{2}C_{\mu\nu}\sqrt{\prod_1^p{}_{(\varrho)}\frac{z_\varrho-\sigma_\nu}{z_\varrho-\tau_\mu}}\cdot\left(\frac{1}{z_{\nu'}-\tau_\mu}-\frac{1}{z_{\nu'}-\sigma_\nu}\right),$$

und daraus

$$2^p\left|\frac{\partial Q_\mu^{(\lambda')}}{\partial z_\lambda}\right|\cdot\sqrt{\frac{\prod_1^p{}_{(\varrho)}(z_\varrho-\tau_\mu)^p}{(\prod_1^p)^2_{(\varrho\varrho')}(z_\varrho-\sigma_{\varrho'})}} = 2^p\left|\frac{\partial u_{\lambda'}}{\partial z_\lambda}\right|\cdot\left|\frac{\partial Q_\mu^{(\lambda')}}{\partial v_\lambda}\right|\cdot\sqrt{\frac{\prod_1^p{}_{(\varrho)}(z_\varrho-\tau_\mu)^p}{(\prod_1^p)^2_{(\varrho\varrho')}(z_\varrho-\sigma_{\varrho'})}}$$
$$= C_{\mu1}.C_{\mu2}\dots C_{\mu p}\cdot\left|\frac{1}{z_\lambda-\tau_\mu}-\frac{1}{z_\lambda-\sigma_{\lambda'}}\right|,$$

worin $C_{\mu1}, C_{\mu2}, \dots C_{\mu p}$ diejenigen Grössen sind, die aus den früheren $C_{\mu1}, \dots$ entstehen, wenn in ihnen k_μ durch τ_μ, k_ν durch σ_ν ersetzt werden. Setzen wir nun $z_1=\sigma_1$, $z_2=\sigma_2$, $\dots$ $z_p=\sigma_p$, so folgt hieraus, wenn wir das Vorzeichen in die Wurzeln einrechnen,

$$(15.)\qquad \begin{cases}\left|\dfrac{\partial Q_\mu^{(\lambda')}}{\partial v_\lambda}\right| = \dfrac{\Delta(\sigma)\cdot\prod_1^p{}_{(\varrho)}C_{\mu\varrho}}{2^p\,|\alpha_\lambda^{(\lambda')}|}\cdot\sqrt{\dfrac{\prod_1^p{}_{(\varrho)}\prod_1^{p+2}{}_{(\varrho')}(\sigma_\varrho-\tau_{\varrho'})}{\prod_1^p{}_{(\varrho)}(\sigma_\varrho-\tau_\mu)^p}}\\ \qquad = \dfrac{|A_\lambda^{(\lambda')}|}{(2\pi i)^p}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{(\Delta(\sigma))^2.\prod_1^{p+2}{}_{(\varrho)}^{(\mu)}(\tau_\mu-\tau_\varrho)\prod_1^p{}_{(\varrho)}\prod_1^{p+2}{}_{(\varrho')}(\sigma_\varrho-\tau_{\varrho'})}{\prod_1^p{}_{(\varrho)}(\sigma_\varrho-\tau_\mu)^p}}.\end{cases}$$

Der Ausdruck $\frac{\vartheta_{\tau_1}.\vartheta_{\tau_2}\ldots\vartheta_{\tau_{p+2}}}{(\vartheta_{\tau_\mu,\sigma})^p}$ ist aber nach der Gleichung (13.) gleich

$$\frac{|A_\lambda^{(\lambda')}|}{(2\pi i)^p}\sqrt[4]{\frac{\text{Discr.}(\tau_1)\,\text{Discr.}(\tau_2)\ldots\text{Discr.}(\tau_{p+2})\,\text{Discr.}'(\tau_1)\ldots\text{Discr.}'(\tau_{p+2})}{(\text{Discr.}(\tau_\mu,\sigma)\,\text{Discr.}'(\tau_\mu,\sigma))^p}}$$

$$=\sqrt[4]{\frac{(\Delta(\tau))^p(\Delta(\sigma))^{p+2}.\prod_1^p{}_{(\varrho)}\prod_1^{p+2}{}_{(\varrho')}(\tau_{\varrho'}-\sigma_\varrho)}{(\Delta(\sigma))^p.\prod_1^p{}_{(\varrho)}(\tau_\mu-\sigma_\varrho)^p.\left(\frac{\Delta(\tau)}{\prod_1^{p+2}{}_{(\varrho)}^{(\mu)}(\tau_\mu-\tau_\varrho)}\right)^p}}.$$

Und hieraus folgt, abgesehen von einer vierten Wurzel der Einheit, die in das Wurzelzeichen eingerechnet wird,

$$(16.)\qquad \frac{\prod_1^{p+2}{}_{(\varrho)}\vartheta_{\tau_\varrho}}{(\vartheta_{\tau_\mu,\sigma})^p}=\frac{|A_\lambda^{(\lambda')}|}{(2\pi i)^p}\sqrt[4]{\frac{\prod_1^{p+2}{}_{(\varrho)}^{(\mu)}(\tau_\mu-\tau_\varrho)^p.(\Delta(\sigma))^2.\prod_1^p{}_{(\varrho)}\prod_1^{p+2}{}_{\varrho'}(\tau_{\varrho'}-\sigma_\varrho)}{\prod_1^p{}_{(\varrho)}(\tau_\mu-\sigma_\varrho)^p}}.$$

Aus der Gleichheit der rechten Seiten der beiden Relationen (15.) und (16.) folgt nun die Richtigkeit der Gleichung (14.), wenn noch bewiesen wird, dass sie auch noch in Bezug auf die vierte Wurzel der Einheit richtig ist, welche wegen der Vernachlässigung der Vorzeichen bei unsern Rechnungen noch besonders untersucht werden muss. Man erkennt aber die Richtigkeit der von uns in der Gleichung (14.) angegebenen Wurzel der Einheit, wenn man sämmtliche $a_{\mu\mu'}\ldots$ als reell voraussetzt, was immer geschehen kann. Es bleibt aber das Vorzeichen unbestimmt, welches von der Anordnung der Reihen in der Determinante abhängt.

6.

Nun sollen noch die partiellen Differentialquotienten der ungeraden ϑ-Functionen für verschwindende Argumente durch die Verzweigungswerthe dargestellt werden, so weit sie nicht selbst verschwinden. Behalten wir die Bezeichnung des vorigen Art. bei, so haben wir die p Gleichungen

$$\sum_1^p{}_{(\varrho)}\frac{\partial Q_\mu^{(\nu)}}{\partial v_\varrho}.\frac{\partial u_\varrho}{\partial z_1}=\tfrac{1}{2}C_{\mu\nu}\sqrt{\prod_1^p{}_{(\varrho)}\frac{z_\varrho-\sigma_\nu}{z_\varrho-\tau_\mu}}.\left(\frac{1}{z_1-\tau_\mu}-\frac{1}{z_1-\sigma_\nu}\right),$$

$$\sum_1^p{}_{(\varrho)}\frac{\partial Q_\mu^{(\nu)}}{\partial v_\varrho}.\frac{\partial u_\varrho}{\partial z_2}=\tfrac{1}{2}C_{\mu\nu}\sqrt{\prod_1^p{}_{(\varrho)}\frac{z_\varrho-\sigma_\nu}{z_\varrho-\tau_\mu}}.\left(\frac{1}{z_2-\tau_\mu}-\frac{1}{z_2-\sigma_\nu}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_1^p{}_{(\varrho)}\frac{\partial Q_\mu^{(\nu)}}{\partial v_\varrho}.\frac{\partial u_\varrho}{\partial z_p}=\tfrac{1}{2}C_{\mu\nu}\sqrt{\prod_1^p{}_{(\varrho)}\frac{z_\varrho-\sigma_\nu}{z_\varrho-\tau_\mu}}.\left(\frac{1}{z_p-\tau_\mu}-\frac{1}{z_p-\sigma_\nu}\right),$$

aus welchen folgt

$$\frac{2\,\dfrac{\partial Q_\mu^{(\nu)}}{\partial v_{\nu'}}\cdot\left|\dfrac{\partial u_{\lambda'}}{\partial z_\lambda}\right|}{C_{\mu\nu}\sqrt{\prod_1^p{}_{(\varrho)}\,\dfrac{z_\varrho-\sigma_\nu}{z_\varrho-\tau_\mu}}}$$

$$=\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial u_1}{\partial z_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_{\nu'-1}}{\partial z_1} & \dfrac{1}{z_1-\tau_\mu}-\dfrac{1}{z_1-\sigma_\nu} & \dfrac{\partial u_{\nu'+1}}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_p}{\partial z_1}\\
\dfrac{\partial u_1}{\partial z_2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial z_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_{\nu'-1}}{\partial z_2} & \dfrac{1}{z_2-\tau_\mu}-\dfrac{1}{z_2-\sigma_\nu} & \dfrac{\partial u_{\nu'+1}}{\partial z_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_p}{\partial z_2}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\dfrac{\partial u_1}{\partial z_p} & \dfrac{\partial u_2}{\partial z_p} & \cdots & \dfrac{\partial u_{\nu'-1}}{\partial z_p} & \dfrac{1}{z_p-\tau_\mu}-\dfrac{1}{z_p-\sigma_\nu} & \dfrac{\partial u_{\nu'-1}}{\partial z_p} & \cdots & \dfrac{\partial u_p}{\partial z_p}
\end{vmatrix}$$

oder

$$\frac{2\,\dfrac{\partial Q_\mu^{(\nu)}}{\partial v_{\nu'}}}{C_{\mu\nu}\sqrt{\prod_1^p{}_{(\varrho)}\,\dfrac{z_\varrho-\sigma_\nu}{z_\varrho-\tau_\mu}}}=\sum_1^p{}_{(\varrho)}\left(\frac{s_\varrho}{z_\varrho-\tau_\mu}-\frac{s_\varrho}{z_\varrho-\sigma_\nu}\right)\frac{\delta\lg\left|\left(\sum_1^p{}_{(\varrho')}z_\lambda^{\varrho'-1}\cdot\alpha_{\varrho'}^{(\lambda')}\right)\right|}{\delta\left(\sum_1^p{}_{(\varrho')}\alpha_{\varrho'}^{(\nu')}z_\varrho^{\varrho'-1}\right)}.$$

Wendet man hierauf einen bekannten Determinantensatz (*Baltzer* §. 6, 5) an, und setzt $z_1=\sigma_1,\ z_2=\sigma_2,\ \ldots\ z_p=\sigma_p$, so folgt abgesehen von der Wahl der vierten Wurzel der Einheit

$$\frac{\partial\vartheta_{\sigma_\nu}}{\partial v_{\nu'}}=\tfrac{1}{2}\vartheta_{\tau_\mu,\sigma}\cdot C_{\mu\nu}\cdot\frac{\prod_1^p{}_{(\varrho)}^{(\nu)}(\sigma_\nu-\sigma_\varrho)\cdot\sqrt{\prod_1^{p+2}{}_{(\varrho)}(\sigma_\nu-\tau_\varrho)}}{\sqrt{\prod_1^p{}_{(\varrho)}(\sigma_\varrho-\tau_\mu)}}\cdot\sum_1^p{}_{(r)}\frac{\delta\lg|\alpha_\lambda^{(\lambda')}|}{\delta\alpha_{\nu'}^{(r)}}\cdot\frac{\delta\lg|\sigma_\lambda^{\lambda'-1}|}{\delta\sigma_\nu^{r-1}}$$

$$=\tfrac{1}{2}\vartheta_{\tau_\mu,\sigma}\cdot C_{\mu\nu}\sqrt{\frac{\prod_1^{p+2}{}_{(\varrho)}(\sigma_\nu-\tau_\varrho)}{\prod_1^p{}_{(\varrho)}(\sigma_\varrho-\tau_\mu)}}\cdot\sum_1^p{}_{(r)}\frac{\delta\lg|\alpha_\lambda^{(\lambda')}|}{\delta\alpha_{\nu'}^{(r)}}\cdot S_{r-1}^{(\nu)}(\sigma),$$

worin

$$S_0^{(\nu)}(\sigma)=1,\qquad S_1^{(\nu)}(\sigma)=\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_{\nu-1}+\sigma_{\nu+1}+\cdots+\sigma_p,$$

$$S_2^{(\nu)}(\sigma)=\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\cdots+\sigma_1\sigma_{\nu-1}+\sigma_1\sigma_{\nu+1}+\cdots+\sigma_1\sigma_p+\sigma_2\sigma_3+\cdots+\sigma_{p-1}\sigma_p,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_{p-1}^{(\nu)}(\sigma)=\sigma_1\cdot\sigma_2\ldots\sigma_{\nu-1}\cdot\sigma_{\nu+1}\ldots\sigma_p$$

zu nehmen ist.

Ersetzen wir nun noch $\vartheta_{\tau_\mu,\sigma}$ durch den in der Gleichung (13.) gefundenen Ausdruck, so findet man nach einigen Reductionen:

$$(17.)\qquad \frac{\partial\vartheta_{\sigma_\nu}}{\partial v_{\nu'}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt[4]{\Delta^{(\nu)}(\sigma)\,.\,\Delta(\tau,\sigma_\nu)}\,.\sum_{(\varrho)}^{p} A_{\nu'}^{(\varrho)} S_{\varrho-1}^{(\nu)}(\sigma)}{2\pi i\sqrt{(2\pi i)^p}\,.\,\sqrt{|A_\lambda^{(\lambda')}|}}\,.$$

Für reelle, der Grösse nach wie die Indices geordnete k sind die Wurzeln so zu nehmen, dass die rechte Seite positiv reell ist.

Hiermit ist das vorgestreckte Ziel erreicht. Man kann noch leicht nachweisen, dass die geraden ϑ-Functionen, welche nicht mit den Argumenten v verschwinden, sämmtlich in der Form $\vartheta_{\tau_\mu,\sigma}$ enthalten und somit für verschwindende Argumente hier dargestellt sind. Die Anzahl der dargestellten geraden ϑ-Functionen aber ist $\frac{1}{2}\cdot\frac{2p+2}{1}\cdot\frac{2p+1}{2}\cdot\frac{2p}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{p+2}{p+1}$, die Anzahl der überhaupt vorhandenen geraden ϑ-Functionen ist $2^{2p-1}+2^{p-1}$, und daher giebt es schon für $p=3$ eine, für $p>3$ mehrere mit den Argumenten verschwindende gerade ϑ-Functionen. Ebenso verschwinden für $p>2$ die partiellen Differentialquotienten einiger ungeraden ϑ-Functionen mit den Argumenten. In beiden Fällen giebt es höhere Differentialquotienten, welche nicht mit den Argumenten verschwinden, deren Auswerthung für verschwindende Argumente mit ähnlichen als den hier angewandten Mitteln ausgeführt werden kann. Man erhält aber die Systeme der Zahlen h, g, für welche erst die zweiten oder höhern Differentialquotienten von $\vartheta_{h_1,h_2,\ldots g_p}(v_1,v_2,\ldots v_p)$ mit den Argumenten nicht verschwinden, während die niedern und die Function selbst Null werden, wenn man diese Zahlen aus der Congruenz entnimmt

$$\Big(\ldots, u_\varkappa(0,k_\mu)-\sum_{(\varrho)}^{p} u_\varkappa(0,k_\varrho),\ldots\Big) \equiv \Big(\ldots, \tfrac{1}{2}\sum_{(\varrho)}^{p} a_{\varkappa\varrho}h_\varrho + g_\varkappa\frac{i\pi}{2},\ldots\Big)$$

und von den in der Summe $\sum_{(\varrho)}^{p} u_\varkappa(0,k_\varrho)$ enthaltenen beliebigen Verzweigungspunkten k_ϱ zwei oder mehrere dieselben sein lässt.

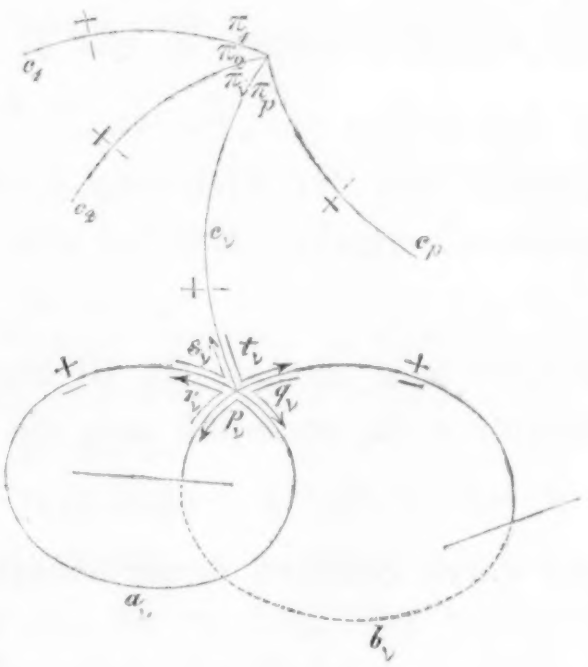
Halle, Juni und Juli 1869.

Beweis zweier Sätze der Functionentheorie.

(Von Herrn *F. E. Prym* in Würzburg.)

1.

Man nehme eine $\overline{2p+1}$fach zusammenhangende Fläche T und zerlege dieselbe genau in der Weise, wie art. 1 meiner Arbeit in Bd. 70, Heft 4 dieses Journals es angiebt, in eine einfach zusammenhangende Fläche T' durch p Schnittpaare a_ν, b_ν und durch p, von demselben Punkte π ausgehende Schnittlinien $c_1, c_2, \ldots, c_p$. Die dort angewandten Bezeichnungen und getroffenen Bestimmungen lasse man ungeändert bestehen und füge die folgenden neu hinzu. Den gemeinsamen Mündungspunkt der drei Schnitte a_ν, b_ν, c_ν bezeichne man fünffach als p_ν, q_ν, r_ν, s_ν, t_ν, jenachdem man sich in dem einen oder andern der fünf, von den drei Schnitten dort gebildeten Winkelräume befindet. Den gemeinsamen Mündungspunkt der p Schnitte c bezeichne man (unter Wegnahme des Buchstaben π ohne Index) p-fach als $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_p$, und zwar als π_ν, wenn man sich auf der positiven Seite des Schnittes c_ν befindet. Ausserdem treffe man, lediglich der einfachern Bezeichnung später wegen, die Bestimmung, dass die p Schnitte c so gezogen seien, dass man, um den gemeinsamen Mündungspunkt derselben umgekehrt wie der Zeiger einer Uhr herumgehend, die Schnitte c successive in der Reihenfolge c_1, c_2, $\ldots$, c_p überschreitet. Die nebenstehende Figur veranschaulicht eine mögliche Art der Bezeichnung.



Für die Begrenzung der Fläche T', die von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c gebildet wird, sei gegeben (z. B. in Folge graphischer Annahme) eine längs der ganzen Begrenzung einwerthige und stetige Function f des Ortes oder Punktes in der Begrenzung, deren Werthe in je zwei entsprechenden Punkten

auf der positiven und negativen Seite der Begrenzung, die man durch f^+ und f^- bezeichne, in der Weise verknüpft sein sollen, dass allgemein für $\nu = 1, 2, \ldots, p$

$$(G.) \qquad \begin{aligned} \text{längs } a_\nu \{ f^+ &= A_\nu f^- + A'_\nu, \\ \text{längs } b_\nu \{ f^+ &= B_\nu f^- + B'_\nu, \\ \text{längs } c_\nu \{ f^+ &= f^- + \Delta_\nu, \end{aligned}$$

wobei die $5p$ Grössen A_ν, B_ν, A'_ν, B'_ν, Δ_ν constante Werthe haben sollen. Die Frage ist dann, ob die der Function f auferlegte Bedingung, längs der Begrenzung einwerthig und stetig zu sein, mit beliebigen Werthen der $5p$ Constanten verträglich ist, oder ob dieselbe nothwendige Relationen zwischen diesen Constanten zur Folge hat.

Bezeichnet man den Werth, den die Function f in irgend einem Punkte β der Begrenzung hat, durch f_β, und wendet die Gleichungen $(G.)$ zunächst auf die Mündungsstelle der drei Schnitte a_ν, b_ν, c_ν an, so ergeben sich mit Rücksicht auf die Figur die folgenden Gleichungen

$$1) \quad f_{q_\nu} = A_\nu f_{p_\nu} + A'_\nu, \qquad 2) \quad f_{r_\nu} = B_\nu f_{p_\nu} + B'_\nu,$$

$$3) \quad f_{s_\nu} = A_\nu f_{r_\nu} + A'_\nu = A_\nu B_\nu f_{p_\nu} + A_\nu B'_\nu + A'_\nu,$$

$$4) \quad f_{t_\nu} = B_\nu f_{q_\nu} + B'_\nu = A_\nu B_\nu f_{p_\nu} + B_\nu A'_\nu + B'_\nu,$$

$$5) \quad f_{s_\nu} = f_{t_\nu} + \Delta_\nu.$$

Aus den Gleichungen 3) und 4) folgt durch Subtraction

$$f_{s_\nu} - f_{t_\nu} = B'_\nu (A_\nu - 1) - A'_\nu (B_\nu - 1),$$

während aus der Gleichung 5) die Differenz derselben Functionswerthe sich gleich Δ_ν ergiebt. Man hat also für $\nu = 1, 2, \ldots, p$:

$$\Delta_\nu = B'_\nu (A_\nu - 1) - A'_\nu (B_\nu - 1).$$

Wendet man ebenso die Gleichungen $(G.)$ auf die Mündungsstelle der p Schnitte c an, so erhält man die p Gleichungen

$$f_{\pi_1} - f_{\pi_2} = \Delta_1, \quad f_{\pi_2} - f_{\pi_3} = \Delta_2, \quad \ldots, \quad f_{\pi_{p-1}} - f_{\pi_p} = \Delta_{p-1}, \quad f_{\pi_p} - f_{\pi_1} = \Delta_p,$$

und durch Addition dieser sämmtlichen p Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \Delta_\nu = 0.$$

Man hat so das Resultat, dass wenn eine längs der ganzen Begrenzung der Fläche T' einwerthige und stetige Function f des Ortes oder Punktes in der Begrenzung gegeben vorliegt, deren Werthe f^+ und f^- in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten durch Gleichungen von der Form $(G.)$ ver-

knüpft sind, dann zwischen den $5p$ Constanten A_ν, B_ν, A'_ν, B'_ν, Δ_ν nothwendig die $p+1$ Relationen

$$(G'.) \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \Delta_\nu = 0, \quad \Delta_\nu = B'_\nu(A_\nu - 1) - A'_\nu(B_\nu - 1), \quad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

stattfinden. Läge an Stelle der Fläche T' die im art. 2 der oben citirten Arbeit gebildete Fläche T'' vor, so dass im Punkte π noch r Linien l_ϱ mündeten, und wäre dann längs l_ϱ: $f^+ = f^- - 2\pi i L_\varrho$, während f im Punkte ε_ϱ und in dessen Umgebung sich wie eine Function $\varphi_\varrho(r_\varrho)$ verhielte, so würde, unter Festhaltung der übrigen, der Function f auferlegten Bedingungen, an Stelle der ersten Gleichung unter $(G'.)$ die neue

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \Delta_\nu - 2\pi i \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} L_\varrho = 0$$

treten, während die übrigen p Gleichungen unter $(G'.)$ ungeändert blieben. Es folgt dies unmittelbar, wenn man in derselben Weise wie vorher operirt; auch erkennt man leicht, dass diese Resultate unabhängig sind von der Ordnung, in der die Schnitte c und l um ihren gemeinsamen Mündungspunkt herum auf einander folgen.

2.

Eine complexe Function $u+vi$ der Coordinaten x, y sei definirt durch die folgenden Bedingungen:

1) In der ganzen Fläche T' soll sie eine allenthalben einwerthige und stetige Function des Ortes oder Punktes x, y sein und den Differentialgleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ genügen.

2) Ihre Werthe in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten sollen in der Weise verknüpft sein, dass allgemein für $\nu = 1, 2, \ldots, p$

$$\text{längs } a_\nu \left\{ (u+vi)^+ = A_\nu (u+vi)^- + A'_\nu, \right.$$
$$\text{längs } b_\nu \left\{ (u+vi)^+ = B_\nu (u+vi)^- + B'_\nu, \right.$$
$$\text{längs } c_\nu \left\{ (u+vi)^+ = (u+vi)^-. \right.$$

Ueber die $4p$ Constanten A_ν, B_ν, A'_ν, B'_ν sei Folgendes festgesetzt. Die $2p$ Grössen A_ν, B_ν sollen sämmtlich den Modul 1 besitzen, im übrigen aber willkürlich gewählt sein. All' die Constanten A'_ν, die zu Indices ν gehören, für die gleichzeitig $A_\nu = 1$, $B_\nu = 1$ gewählt ist, sollen den Werth Null haben. In Betreff der Werthe der noch übrigen Constanten sei nichts festgesetzt; aus dem vorigen Artikel

weiss man, dass in Folge der Bedingungen 1) in diesem Falle zwischen den Constanten immer die p Relationen

$$B'_\nu(A_\nu-1)=A'_\nu(B_\nu-1), \qquad (\nu=1,2,\ldots,p)$$

stattfinden müssen, weil sonst die Bedingungen 1) und 2) schon von vornherein nicht verträglich wären.

Dass nun diese Definition in sich selbst keinen Widerspruch enthält, dass die aufgestellten Bedingungen verträglich sind, dass überhaupt Gebilde $u+vi$ existiren, die die erwähnten Eigenschaften besitzen, leuchtet unmittelbar ein, wenn man überlegt, dass jede beliebige Constante c als Function $u+vi$ mit den erwähnten Eigenschaften betrachtet werden kann; es erhält dann A'_ν den Werth $(1-A_\nu)c$, B'_ν den Werth $(1-B_\nu)c$. Jede Constante gehört also zu den oben definirten Functionen; dass umgekehrt auch jede solche Function in der ganzen Fläche T' denselben Werth hat, also eine Constante ist, soll jetzt bewiesen werden.

Zu dem Ende betrachte man das Integral

$$\Pi = 2i\iint\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}\partial x\,\partial y,$$

ausgedehnt über die ganze Fläche T'. In Folge der Bedingungen 1) hat dieses Integral einen bestimmten Werth, und zwar stellt dasselbe, wenn man von dem Factor $2i$ absieht, den Inhalt der Fläche dar, welche die Gesammtheit der Werthe, die $w=u+vi$ innerhalb T' annimmt, auf einer W-Ebene repräsentirt. In Folge der Differentialgleichungen, denen u und v genügen, lässt sich Π auch schreiben

$$\Pi = i\iint\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\partial x\,\partial y - i\iint\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\partial x\,\partial y.$$

Nach bekannten Methoden folgt nun:

$$\iint\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\partial x\,\partial y = \int_R^+ u\,dv,$$

$$\iint\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\partial x\,\partial y = \int_R^+ v\,du,$$

wobei die rechts stehenden Integrale in positiver (durch die Pfeile markirter) Richtung durch die ganze Begrenzung R der Fläche T' zu erstrecken sind. Es bezeichnen dabei also du und dv die Aenderungen, die u und v erleiden, wenn man von einem Punkte x, y der Begrenzung zu einem, in der Richtung

der Pfeile dem Punkte x, y benachbarten Begrenzungspunkte $x+dx$, $y+dy$ übergeht. Führt man nun diese Randintegrale ein, so folgt

$$\Pi = i\int_R^{+} (u\,dv - v\,du),$$

und addirt man zu dieser Gleichung die Gleichung

$$0 = \int_R^{+} (u\,du + v\,dv),$$

deren Richtigkeit einleuchtet, da u und v, und folglich auch ihre Quadrate beim Durchlaufen der ganzen Begrenzung als einwerthige und stetige Functionen wieder zu ihren Anfangswerthen, mit denen man ausging, zurückkehren, so erhält man endlich

$$\Pi = \int_R^{+} (u - vi)\,d(u+vi).$$

Bei der Integration durch die ganze Begrenzung R wird längs jedes Schnittes a, b, c zweimal integrirt, einmal auf der positiven, das andere Mal auf der negativen Seite, und zwar ist die Richtung der Integration auf der negativen Seite beständig entgegengesetzt der Richtung der Integration in den entsprechenden Theilen auf der positiven Seite. Kehrt man also bei dem über die negative Seite der Begrenzung zu erstreckenden Integrale, unter Anwendung des negativen Vorzeichens, die Integrationsordnung um, so erhält dieses Integral in allen Theilen dieselbe Integrationsrichtung, wie das über die positive Seite zu erstreckende sie besitzt, und durch Zusammenfassen je zweier entsprechender Elemente der beiden Integrale ergiebt sich

$$\Pi = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \int_{[a_\nu, b_\nu, c_\nu]}^{+} \{(u-vi)^+\,d(u+vi)^+ - (u-vi)^-\,d(u+vi)^-\},$$

wobei jetzt das hinter dem Summenzeichen stehende Integral einmal über die positive Seite eines jeden der drei Schnitte a_ν, b_ν, c_ν von Anfang bis zu Ende in der Richtung der Pfeile auszudehnen ist, während $(u-vi)^+$, $(u-vi)^-$ die Werthe der Function $u-vi$ in zwei entsprechenden Begrenzungspunkten, und $d(u+vi)^+$, $d(u+vi)^-$ die Aenderungen bezeichnen, die $(u+vi)^+$ und $(u+vi)^-$ gleichzeitig erleiden, wenn man auf einem der Schnitte in der Richtung, die die Pfeile auf der positiven Seite desselben haben, sich fortbewegt.

Bezeichnet man die zu einer complexen Zahl $g = m+ni$ conjugirte Zahl $m-ni$ durch $\bar{g}$, wobei dann $g\bar{g} = (\mathrm{mod.}\, g)^2$, berücksichtigt ferner, dass

in Folge der über die Grössen A_ν, B_ν gemachten Annahmen dann allgemein $A_\nu\overline{A_\nu}=1$, $B_\nu\overline{B_\nu}=1$ ist, so ergeben sich für die Begrenzung die folgenden Gleichungen:

$$\text{längs } a_\nu \begin{cases} (u-vi)^+ = \overline{A_\nu}(u-vi)^- + \overline{A'_\nu},\ d(u+vi)^+ = A_\nu d(u+vi)^-, \\ (u-vi)^+ d(u+vi)^+ = (u-vi)^- d(u+vi)^- + \overline{A'_\nu} d(u+vi)^+; \end{cases}$$

$$\text{längs } b_\nu \begin{cases} (u-vi)^+ = \overline{B_\nu}(u-vi)^- + \overline{B'_\nu},\ d(u+vi)^+ = B_\nu d(u+vi)^-, \\ (u-vi)^+ d(u+vi)^+ = (u-vi)^- d(u+vi)^- + \overline{B'_\nu} d(u+vi)^+; \end{cases}$$

$$\text{längs } c_\nu \begin{cases} (u-vi)^+ = (u-vi)^-,\ d(u+vi)^+ = d(u+vi)^-, \\ (u-vi)^+ d(u+vi)^+ = (u-vi)^- d(u+vi)^-. \end{cases}$$

Entnimmt man aus diesen Gleichungen die Werthe der unter dem letzten Integralzeichen vorkommenden Differenzen, ausgedrückt durch $d(u+vi)^+$ allein, und führt dieselben in das Integral ein, so zeigt sich, dass die auf die Linien c bezüglichen Theile des Integrals sämmtlich verschwinden, und es wird

$$\Pi = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left\{ \overline{A'_\nu} \int_{a_\nu^+}^{+} d(u+vi)^+ + \overline{B'_\nu} \int_{b_\nu^+}^{+} d(u+vi)^+ \right\}.$$

Ein Durchlaufen der ganzen positiven Seite des Schnittes a_ν in der Richtung der Pfeile führt nun, mit Rücksicht auf die Figur, vom Punkte q_ν zum Punkte s_ν, während ein Durchlaufen der ganzen positiven Seite des Schnittes b_ν in der Richtung der Pfeile vom Punkte t_ν zum Punkte r_ν führt. Bezeichnet man also den Werth der Function $u+vi$ in irgend einem Punkte β der Begrenzung abgekürzt durch f_β, so ergiebt sich

$$\Pi = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left\{ \overline{A'_\nu}(f_{s_\nu} - f_{q_\nu}) + \overline{B'_\nu}(f_{r_\nu} - f_{t_\nu}) \right\},$$

und die vier in diesem Ausdrucke vorkommenden, dem Index ν entsprechenden Functionswerthe sind in Folge der Grenzbedingungen 2) mit dem Werthe der Function $u+vi$ im Punkte p_ν durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} f_{q_\nu} &= A_\nu f_{p_\nu} + A'_\nu, \qquad f_{r_\nu} = B_\nu f_{p_\nu} + B'_\nu, \\ f_{s_\nu} &= A_\nu f_{r_\nu} + A'_\nu = A_\nu B_\nu f_{p_\nu} + A_\nu B'_\nu + A'_\nu, \\ f_{t_\nu} &= B_\nu f_{q_\nu} + B'_\nu = A_\nu B_\nu f_{p_\nu} + B_\nu A'_\nu + B'_\nu \end{aligned}$$

verknüpft. Aus diesen Gleichungen folgt weiter:

$$f_{s_\nu} - f_{q_\nu} = A_\nu(B_\nu - 1) f_{p_\nu} + A_\nu B'_\nu, \quad f_{r_\nu} - f_{t_\nu} = B_\nu(1 - A_\nu) f_{p_\nu} - B_\nu A'_\nu,$$

$$\begin{aligned} \overline{A'_\nu}(f_{s_\nu} - f_{q_\nu}) + \overline{B'_\nu}(f_{r_\nu} - f_{t_\nu}) &= [B_\nu \overline{B'_\nu}(1 - A_\nu) - A_\nu \overline{A'_\nu}(1 - B_\nu)] f_{p_\nu} \\ &\quad + A_\nu \overline{A'_\nu} B'_\nu - B_\nu \overline{B'_\nu} A'_\nu. \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite der letzten Gleichung ist der Coefficient von f_{p_ν} gleich Null, denn derselbe ist auch gleich $A_\nu B_\nu[\overline{B'_\nu}(\overline{A_\nu}-1)-\overline{A'_\nu}(\overline{B_\nu}-1)]$, und der hier in der eckigen Klammer stehende Ausdruck hat den Werth Null, da er aus dem, den Werth Null besitzenden Ausdrucke $B'_\nu(A_\nu-1)-A'_\nu(B_\nu-1)$ hervorgeht, indem man darin an Stelle von i die Zahl $-i$ schreibt. Man erhält also schliesslich

$$\Pi = \sum_{\nu=1}^{\nu=p}\{A_\nu\overline{A'_\nu}B'_\nu - B_\nu\overline{B'_\nu}A'_\nu\}.$$

Die einem bestimmten Index ν entsprechenden Grössen A_ν, B_ν sind nur der Bedingung unterworfen, Zahlen mit dem Modul 1 zu sein, ausserdem sind mit ihnen die demselben Index ν entsprechenden Grössen A'_ν, B'_ν durch die Relation

$$(R.) \qquad B'_\nu(A_\nu-1) = A'_\nu(B_\nu-1)$$

verknüpft. In Bezug auf die Werthe von A_ν, B_ν unterscheide man die folgenden vier, alle Möglichkeiten umfassenden Fälle:

I) A_ν und B_ν seien beide von 1 verschieden; dann folgt aus den beiden Gleichungen

$$B'_\nu(A_\nu-1)=A'_\nu(B_\nu-1), \qquad \overline{A'_\nu}(\overline{B_\nu}-1)=\overline{B'_\nu}(\overline{A_\nu}-1),$$

indem das Product der linken Seiten gleich ist dem Producte der rechten,

$$(A_\nu-1)(\overline{B_\nu}-1)\overline{A'_\nu}B'_\nu-(\overline{A_\nu}-1)(B_\nu-1)\overline{B'_\nu}A'_\nu = 0,$$

und aus dieser letzten Gleichung durch Division mit der in diesem Falle von Null verschiedenen Grösse: $-(\overline{A_\nu}-1)(\overline{B_\nu}-1)$:

$$A_\nu\overline{A'_\nu}B'_\nu - B_\nu\overline{B'_\nu}A'_\nu = 0.$$

II) A_ν sei gleich 1, B_ν von 1 verschieden; dann liefert die Relation $(R.)$: $A'_\nu=0$, folglich ist dann auch $\overline{A'_\nu}=0$ und $A_\nu\overline{A'_\nu}B'_\nu-B_\nu\overline{B'_\nu}A'_\nu=0$.

III) A_ν sei von 1 verschieden, B_ν gleich 1; dann liefert die Relation $(R.)$: $B'_\nu=0$, folglich ist dann auch $\overline{B'_\nu}=0$ und $A_\nu\overline{A'_\nu}B'_\nu-B_\nu\overline{B'_\nu}A'_\nu=0$.

IV) A_ν und B_ν seien beide gleich 1. In Folge der ursprünglichen Grenzbedingungen 2) hat in diesem Falle A'_ν den Werth Null, folglich ist auch $\overline{A'_\nu}=0$ und $A_\nu\overline{A'_\nu}B'_\nu-B_\nu\overline{B'_\nu}A'_\nu=0$.

Es zeigt sich also, dass das irgend einem Index ν $(\nu=1,2,\ldots,p)$ entsprechende Glied der letzten Summe, die Π darstellt, immer den Werth Null besitzt, und dass folglich unter den gestellten Bedingungen das Integral Π selbst den Werth Null erhält. Π kann aber, da es in seiner ursprüng-

lichen Gestalt, wenn man von dem Factor $2i$ absieht, ein Integral mit immer positiven Elementen ist, nur dann Null sein, wenn jedes Element für sich den Werth Null hat. Aus $\Pi = 0$ folgt demnach für die ganze Fläche T': $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, und mit Berücksichtigung der Differentialgleichungen sub 1) auch $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, allgemein zu reden, so dass die Punkte, für die diese vier Differentialquotienten möglicher Weise nicht Null wären, keinen auch noch so kleinen Flächentheil stetig erfüllen können. Die Function $u+vi$ hat also, soweit sie in T' stetig ist, nothwendig einen constanten Werth, und da sie den Bedingungen 1) gemäss in T' allenthalben stetig sein soll, in der ganzen Fläche T' denselben Werth. Man hat so den schon früher ausgesprochenen

Satz I. *Eine in der Fläche T' allenthalben einwerthige und stetige Function $u+vi$ der complexen Variable $x+yi$, deren Werthe in je zwei entsprechenden Punkten auf der positiven und negativen Seite der, von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c gebildeten Begrenzung der Fläche T' in der Weise verknüpft sind, dass allgemein (für $\nu = 1, 2, \ldots, p$)*

$$\begin{aligned} \text{längs } a_\nu \{(u+vi)^+ &= A_\nu (u+vi)^- + A'_\nu, \\ \text{längs } b_\nu \{(u+vi)^+ &= B_\nu (u+vi)^- + B'_\nu, \\ \text{längs } c_\nu \{(u+vi)^+ &= (u+vi)^- + A_\nu, \end{aligned}$$

wobei die $2p$ Grössen A_ν, B_ν sämmtlich den Modul 1 besitzen, ist immer eine Constante, wenn die p Grössen A_ν Null sind und ferner von den $2p$ übrigen Constanten A'_ν, B'_ν all' die Constanten A'_ν, die zu Indices ν gehören, für die gleichzeitig $A_\nu = 1$, $B_\nu = 1$ ist, ebenfalls den Werth Null haben.

3.

Haben die $2p$ Constanten A_ν, B_ν sämmtlich den Werth 1, so verwandelt sich der gefundene Satz in den folgenden speciellen, für die Theorie der *Abel*schen Integrale fundamentalen Satz:

„Eine in der Fläche T' allenthalben einwerthige und stetige Function $\omega = u+vi$ der complexen Variable $z = x+yi$, deren Werthe in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten in der Weise verknüpft sind, dass allgemein

$$\text{längs } a_\nu \{\omega^+ = \omega^-; \quad \text{längs } b_\nu \{\omega^+ = \omega^- + B'_\nu; \quad \text{längs } c_\nu \{\omega^+ = \omega^-;$$

für $\nu = 1, 2, \ldots, p$, wobei es dahin gestellt bleibt, welche Werthe die p Constanten B'_ν besitzen, ist immer eine Constante.“

In anderer Fassung lässt sich dieser Satz auch so aussprechen:

„Verschwinden bei einem, zur Fläche T' gehörigen allenthalben endlichen Abelschen Integrale (z. B. durch Variation der linear in ihm enthaltenen willkürlichen Constanten) die sämmtlichen p Periodicitätsmoduln A'_ν für die Schnitte a_ν, so verschwinden gleichzeitig auch die sämmtlichen p Periodicitätsmoduln B'_ν für die Schnitte b_ν, und das Integral selbst reducirt sich auf eine Constante.“

Nur wenn man diesen Satz zur Hülfe nimmt, lässt sich zeigen, dass es immer möglich ist, aus p gegebenen, zur Fläche T' gehörigen linearunabhängigen allenthalben endlichen *Abel*schen Integralen $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots, \omega^{(p)}$ durch lineare Composition ein System von Integralen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ zu bilden, dadurch characterisirt, dass allgemein der Periodicitätsmodul von ω_ν für den Schnitt a_ν den Werth πi, für jeden der $p-1$ übrigen Schnitte a den Werth Null besitzt. Bezeichnet man nämlich den Periodicitätsmodul von $\omega^{(\mu)}$ für den Schnitt $a_\nu\,(\nu = 1, 2, \ldots, p)$ durch $A_\nu^{(\mu)}$, so wird es dann, aber auch nur dann möglich sein, die verlangten p Integrale $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ zu bilden, und zwar in der Form

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= m_{11}\omega^{(1)} + m_{12}\omega^{(2)} + \cdots + m_{1p}\omega^{(p)},\\
\omega_2 &= m_{21}\omega^{(1)} + m_{22}\omega^{(2)} + \cdots + m_{2p}\omega^{(p)},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\omega_p &= m_{p1}\omega^{(1)} + m_{p2}\omega^{(2)} + \cdots + m_{pp}\omega^{(p)},
\end{aligned}$$

wenn es möglich ist, die p^2 Constanten m so zu bestimmen, dass die p Systeme von je p Gleichungen erfüllt werden, die aus dem Systeme

$$(S_\nu.)\qquad \left\{\begin{aligned}
0 &= m_{\nu 1}A_1^{(1)} + m_{\nu 2}A_1^{(2)} + \cdots + m_{\nu p}A_1^{(p)},\\
0 &= m_{\nu 1}A_2^{(1)} + m_{\nu 2}A_2^{(2)} + \cdots + m_{\nu p}A_2^{(p)},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\pi i &= m_{\nu 1}A_\nu^{(1)} + m_{\nu 2}A_\nu^{(2)} + \cdots + m_{\nu p}A_\nu^{(p)},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
0 &= m_{\nu 1}A_p^{(1)} + m_{\nu 2}A_p^{(2)} + \cdots + m_{\nu p}A_p^{(p)},
\end{aligned}\right.$$

successive hervorgehen, wenn man darin für ν successive die Zahlen $1, 2, \ldots, p$ setzt und gleichzeitig πi in die linke Seite der ersten, zweiten, ..., p^{ten} Gleichung einrücken lässt, während jedes Mal alle $p-1$ übrigen linken Seiten den Werth Null haben. Bezeichnet man die Determinante der p^2

Grössen A in dem oben stehenden Systeme von p Gleichungen durch D, so würde für jedes ν und μ folgen

$$m_{\nu\mu} = \frac{\pi i}{D} \frac{\partial D}{\partial A_\nu^{(\mu)}},$$

sobald bewiesen wäre, dass die Determinante D einen von Null verschiedenen Werth besitzt. Ohne diesen Nachweis*) hat die letzte Formel keinen Sinn.

Dass nun unter allen Umständen der Werth der Determinante D von Null verschieden ist, lässt sich mit Hülfe des oben ausgesprochenen Satzes wie folgt zeigen. Wäre $D = 0$, so liessen sich für die p Grössen $m_{\nu 1}, m_{\nu 2}, \ldots, m_{\nu p}$ immer p Werthe finden, die nicht sämmtlich Null, und die dem Systeme von p Gleichungen genügen würden, das aus dem Systeme S_ν entsteht, wenn auch in die linke Seite der ν^{ten} Gleichung 0 statt πi eingeführt wird. Der mit diesen Werthen gebildete Ausdruck

$$\omega_\nu = m_{\nu 1}\omega^{(1)} + m_{\nu 2}\omega^{(2)} + \cdots + m_{\nu p}\omega^{(p)}$$

wäre dann ein allenthalben endliches Integral, das für alle p Schnitte a den Periodicitätsmodul Null besässe, und folglich eine Constante. Es existirte also zwischen den p Functionen $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots, \omega^{(p)}$ eine lineare Relation mit constanten Coefficienten, was gegen die ursprüngliche Voraussetzung, nach der diese p Functionen linearunabhängig sein sollen, verstossen würde. Die Determinante D kann also nie Null sein, und folglich ist die Bestimmung der p Functionen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ den aufgestellten Bedingungen gemäss stets möglich.

Im Obigen ist der Satz mitenthalten, dass wenn $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots, \omega^{(p)}$ irgend ein System zur Fläche T' gehöriger, allenthalben endlicher *Abel*scher Integrale bezeichnet, und diese Integrale linearunabhängig sind, dann auch immer gleichzeitig die p Systeme zusammengehöriger Periodicitätsmoduln, die dem Integralsysteme für die p Schnitte $a_1, a_2, \ldots, a_p$ zukommen, linearunabhängig sind.

4.

Eine complexe Function $u+vi$ der Coordinaten x, y sei definirt durch die folgenden Bedingungen:

---

*) Vergleiche: *„Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abelschen Integrale von Carl Neumann pag. 435.“* und *„Theorie der Abelschen Functionen von A. Clebsch und P. Gordan pag. 108.“*

1) In der ganzen Fläche T' soll sie eine allenthalben einwerthige und stetige Function des Ortes oder Punktes x, y sein und den Differentialgleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ genügen.

2) Ihre Werthe in je zwei entsprechenden Begrenzungspunkten sollen in der Weise verknüpft sein, dass allgemein für $\nu = 1, 2, \ldots, p$:

$$\text{längs } a_\nu \{(u+vi)^+ = A_\nu (u+vi)^- + A'_\nu,$$
$$\text{längs } b_\nu \{(u+vi)^+ = B_\nu (u+vi)^- + B'_\nu,$$
$$\text{längs } c_\nu \{(u+vi)^+ = (u+vi)^- + \Delta_\nu,$$

wobei über die $5p$ Constanten $A_\nu, B_\nu, A'_\nu, B'_\nu, \Delta_\nu$ Folgendes festgesetzt sei. Den $2p$ Grössen A_ν, B_ν sollen bestimmte Zahlwerthe zugelegt sein, deren Quadrate sämmtlich 1 sind. Für das irgend einem Index ν entsprechende Factorenpaar A_ν, B_ν ist also eines der vier Werthepaare $(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)$ nach willkürlicher Wahl zulässig. Die reellen Theile der $2p$ Constanten A'_ν, B'_ν sollen sämmtlich Null sein, während über die rein imaginären Theile dieser Constanten nichts festgesetzt sei. Dass zwischen den $5p$ Constanten immer die $p+1$ Relationen

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \Delta_\nu = 0, \quad \Delta_\nu = B'_\nu (A_\nu - 1) - A'_\nu (B_\nu - 1), \quad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

als bestehend vorausgesetzt werden müssen, weiss man aus art. 1, indem sonst die aufgestellten Bedingungen keinenfalls verträglich wären.

Man erkennt sofort, dass, wenn die $2p$ Grössen A_ν, B_ν sämmtlich den Werth 1 haben, jede willkürliche Constante $C = c + c_1 i$, wenn die $2p$ Grössen dagegen nicht sämmtlich den Werth 1 haben, jede rein imaginäre Constante $C = c_1 i$ als Function $u+vi$ mit den erwähnten Eigenschaften betrachtet werden kann; es erhält dann A'_ν den Werth $(1-A_\nu)C$, B'_ν den Werth $(1-B_\nu)C$, Δ_ν den Werth Null. Dass umgekehrt auch jede Function $u+vi$, die den oben aufgestellten Bedingungen genügt, in der ganzen Fläche T' denselben Werth hat, also eine Constante ist, soll jetzt bewiesen werden.

Zu dem Ende betrachte man wieder das Integral

$$\Pi = \iint \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} \partial x \, \partial y,$$

ausgedehnt über die ganze Fläche T'. Nach den schon im art. 2 angewandten Methoden und Schlussweisen erhält man

$$\Pi = \int_R^+ u \, dv = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \int_{[a_\nu, b_\nu, c_\nu]}^+ \{u^+ dv^+ - u^- dv^-\},$$

wobei das hinter dem Summenzeichen stehende Integral einmal über die positive Seite eines jeden der drei Schnitte a_ν, b_ν, c_ν von Anfang bis zu Ende in der Richtung der Pfeile auszudehnen ist, während u^+, u^- die Werthe der Function u in zwei entsprechenden Begrenzungspunkten, und dv^+, dv^- die Aenderungen bezeichnen, die v^+ und v^- gleichzeitig erleiden, wenn man auf einem der Schnitte in der Richtung, die die Pfeile auf der positiven Seite desselben haben, sich fortbewegt. Berücksichtigt man nun, dass in Folge der Bedingungen 2) die $2p$ Grössen A_ν, B_ν stets reell sind, und dass in dem Falle aus der Relation $\Delta_\nu = B'_\nu(A_\nu - 1) - A'_\nu(B_\nu - 1)$ immer auch der reelle Theil von Δ_ν sich gleich Null ergiebt, wenn, wie vorausgesetzt wurde, die reellen Theile von A_ν, B_ν Null sind, so ergeben sich für $\nu = 1, 2, \ldots, p$ die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu \{ u^+ = A_\nu u^-, \quad dv^+ = A_\nu dv^-, \quad u^+ dv^+ = u^- dv^-; \\
&\text{längs } b_\nu \{ u^+ = B_\nu u^-, \quad dv^+ = B_\nu dv^-, \quad u^+ dv^+ = u^- dv^-; \\
&\text{längs } c_\nu \{ u^+ = u^-, \quad\quad dv^+ = dv^-, \quad\quad u^+ dv^+ = u^- dv^-.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen zeigen, dass das hinter dem Summenzeichen stehende Integral für jeden Index ν den Werth Null hat, indem seine sämmtlichen Elemente verschwinden. In Folge dessen ist auch Π selbst Null und, nach ähnlichen Schlüssen wie früher, $u + vi$ eine in der ganzen Fläche T' constante Grösse $C = c + c_1 i$, deren reeller Theil c immer Null sein muss, wenn nicht alle $2p$ Grössen A_ν, B_ν den Werth 1 haben, während in allen Fällen der Werth ihres rein imaginären Theiles $c_1 i$ durch die aufgestellten Bedingungen in keiner Weise beeinflusst wird. Man hat so den folgenden

Satz II. *Eine in der Fläche T' allenthalben einwerthige und stetige Function $u + vi$ der complexen Variable $x + yi$, deren Werthe in je zwei entsprechenden Punkten auf der positiven und negativen Seite der, von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c gebildeten Begrenzung der Fläche T' in der Weise verknüpft sind, dass allgemein für $\nu = 1, 2, \ldots, p$:*

$$\begin{aligned}
&\textit{längs } a_\nu \{ (u+vi)^+ = A_\nu (u+vi)^- + A'_\nu, \\
&\textit{längs } b_\nu \{ (u+vi)^+ = B_\nu (u+vi)^- + B'_\nu, \\
&\textit{längs } c_\nu \{ (u+vi)^+ = (u+vi)^- + \Delta_\nu,
\end{aligned}$$

wobei die $2p$ Grössen A_ν, B_ν Zahlwerthe besitzen, deren Quadrate sämmtlich 1 sind, ist immer eine Constante, wenn die reellen Theile der $2p$ Constanten A'_ν, B'_ν und folglich auch die reellen Theile der p Constanten Δ_ν sämmtlich den Werth Null haben.

Mit Hülfe dieses Resultates lässt sich aus dem, im art. 3 meiner frühern Arbeit aufgestellten Satze durch einfache Auflösung eines Systems linearer Gleichungen ein neuer Satz ableiten, der sich auf alle diejenigen Functionen $u+vi$ bezieht, die zu Gruppen gehören, deren Characteristiken aus nur reellen Grössen zusammengesetzt sind. Es sind dies diejenigen Gruppen, deren Characteristiken aus dem Symbol $\begin{pmatrix} A_1, A_2, \ldots, A_p \\ B_1, B_2, \ldots, B_p \end{pmatrix}$ hervorgehen, wenn man für die A und B nur reelle Grössen mit dem Modul 1 setzt. Da demnach für jede der $2p$ Grössen A_ν, B_ν sowohl die Zahl $+1$ wie die Zahl -1 zulässig ist, so giebt es im Ganzen 2^{2p} solcher Gruppen. Der erwähnte Satz, der speciell dem Gebiete der Functionen $u+vi$, die diesen 2^{2p} Gruppen angehören, eigenthümlich ist, insofern als ein analoger Satz für die, den übrigen Gruppen angehörigen Functionen $u+vi$ nicht existirt, mag theilweise hier noch eine Stelle finden. Für die allenthalben endlichen Functionen ausgesprochen, lautet er wie folgt:

„Nimmt man, den $2p$ Schnitten a_ν, b_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$ entsprechend, ein System von $2p$ Grössen A_ν, B_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$, deren Quadrate sämmtlich 1 sind, willkürlich an, wählt ausserdem $2p$ reelle Grössen $A'_{1,\nu}$, $B'_{1,\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$, deren Werthe nur der einzigen Bedingung

$$(R.) \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \{B'_{1,\nu}(A_\nu - 1) - A'_{1,\nu}(B_\nu - 1)\} = 0$$

zu gehorchen haben und im übrigen ganz beliebig angenommen werden dürfen, so existirt zu der Fläche T' immer eine complexe Function $u+vi$ der Coordinaten x, y mit folgenden Eigenschaften:

1) *Die Function $u+vi$ ist eine in der Fläche T' allenthalben einwerthige und stetige Function des Ortes oder Punktes x, y, die in der ganzen Fläche T' den Differentialgleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ genügt.*

2) *Die Werthe von $u+vi$ in je zwei entsprechenden Punkten auf der positiven und negativen Seite der, von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c gebildeten Begrenzung der Fläche T' sind in der Weise verknüpft, dass allgemein für $\nu = 1, 2, \ldots, p$:*

$$\begin{aligned} \text{längs } a_\nu \quad (u+vi)^+ &= A_\nu (u+vi)^- + A'_{1,\nu} + i A'_{2,\nu}, \\ \text{längs } b_\nu \quad (u+vi)^+ &= B_\nu (u+vi)^- + B'_{1,\nu} + i B'_{2,\nu}, \\ \text{längs } c_\nu \quad (u+vi)^+ &= (u+vi)^- + \Delta_{1,\nu} + i \Delta_{2,\nu}, \end{aligned}$$

wobei zwischen den $5p$ Constanten A_ν, B_ν, $A'_\nu = A'_{1,\nu} + i A'_{2,\nu}$,

$B'_\nu = B'_{1,\nu} + iB'_{2,\nu}$, $\Delta_\nu = \Delta_{1,\nu} + i\Delta_{2,\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$ *die bekannten* $p+1$ *Relationen*

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \Delta_\nu = 0, \quad \Delta_\nu = B'_\nu(A_\nu - 1) - A'_\nu(B_\nu - 1), \quad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

stattfinden.

3) *Durch die bis jetzt erwähnten Eigenschaften (immer mit Rücksicht auf die vorher gemachten Annahmen, wonach also das System der* $2p$ *Grössen* A_ν, B_ν *fixirt ist, und ausserdem die reellen Theile der* $2p$ *Constanten* A'_ν, B'_ν *der Relation* $(R.)$ *gemäss, im übrigen aber willkürlich angenommen sind) ist die Function* $u+vi$ *bestimmt bis auf eine additive Constante, die vollständig willkürlich bleibt, wenn alle* A_ν, B_ν *den Werth 1 haben, die dagegen nur rein imaginär sein kann, wenn nicht alle* A_ν, B_ν *den Werth 1 besitzen*".

Für die allenthalben endlichen Functionen der Gruppe $\binom{1, 1, \ldots, 1}{1, 1, \ldots, 1}$ hat diesen Satz zuerst *Riemann* (*A. F. 4. pag. 20*) ausgesprochen.

Düren, im September 1869.

Ueber die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit.

(Von Herrn *G. Kirchhoff* in Heidelberg.)

In ihrem Buche Treatise on natural philosophy, Oxford 1867, p. 264 haben die Herren *Thomson* und *Tait* die Aufgabe behandelt, die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit zu bestimmen. Unter den Bedingungen, unter denen sie dieselbe gelöst haben, befindet sich auch die, dass der Körper um seine Rotationsaxe nicht rotirt und diese Axe in einer festen Ebene bleibt. Ich habe gefunden, dass die Aufgabe auch ohne diese Beschränkung lösbar ist und ebenso, wie unter derselben, auf elliptische Integrale führt. Das zu zeigen ist der Zweck dieser Abhandlung.

Die Differentialgleichungen der Bewegung sollen unter den folgenden Voraussetzungen abgeleitet werden: Ein starrer Körper von beliebiger Gestalt und beliebig vertheilter Masse befindet sich in einer incompressibeln, homogenen Flüssigkeit, die ausser durch seine Oberfläche durch eine im Unendlichen liegende, geschlossene, feste Fläche begrenzt ist. Reibung findet in der Flüssigkeit nicht statt. Auf den Körper wirken Kräfte, welche ein Potential besitzen, das nur von der Lage des Körpers abhängig ist. Auf die Theile der Flüssigkeit wirken keine Kräfte. Wirbelbewegungen sind in der Flüssigkeit nicht vorhanden. Die Geschwindigkeiten ändern sich überall in derselben stetig mit den Coordinaten des Ortes; durch diese Annahme wird der Fall ausgeschlossen, dass von der Oberfläche des Körpers eine Fläche ausgeht, die — ähnlich der Oberfläche eines Strahles, der in gleichartiger Flüssigkeit sich bewegt — Theile der Flüssigkeit trennt, die verschiedene Geschwindigkeiten haben. Endlich soll der Bewegungszustand des Systems aus dem Zustande der Ruhe durch Kräfte, die auf den Körper wirkten, hervorgegangen sein; diese Annahme bildet eine Beschränkung der Aufgabe in dem Falle, dass der von der Flüssigkeit erfüllte Raum ein mehrfach zusammenhängender ist, dass der Körper z. B. die Gestalt eines Ringes hat.

Um die Integration der Differentialgleichungen, die unter diesen Voraussetzungen gelten, zu ermöglichen, wird dann weiter angenommen werden,

dass die Kräfte, die auf den Körper wirken, verschwinden, dass die Oberfläche des Körpers eine Rotationsfläche und die Vertheilung der Masse in ihm symmetrisch zur Rotationsaxe ist.

§. 1.

Die in Rede stehenden Differentialgleichungen sollen aus dem *Hamilton*schen Principe entwickelt werden. Bezeichnet Ω das Potential der auf den Körper wirkenden Kräfte, T die lebendige Kraft des ganzen Systemes und t die Zeit, so ist nach diesem:

$$(1.) \qquad \delta \int (\Omega + T)\, dt = 0.$$

Es seien x, y, z die Coordinaten eines Punktes des Körpers in Bezug auf ein in diesem festes Coordinatensystem, ξ, η, ζ die Coordinaten desselben Punktes zur Zeit t in Bezug auf ein im Raume festes Coordinatensystem, und es sei weiter:

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \\ \eta &= \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \\ \zeta &= \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z. \end{aligned}$$

Die 12 Grössen α, β, γ sind dann Functionen der Zeit, um deren Bestimmung es sich handelt. Man setze ferner:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 \frac{d\alpha}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma}{dt}, \\ v &= \alpha_2 \frac{d\alpha}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma}{dt}, \\ w &= \alpha_3 \frac{d\alpha}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma}{dt}, \\ p &= \alpha_2 \frac{d\alpha_3}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta_3}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma_3}{dt}, \\ q &= \alpha_3 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma_1}{dt}, \\ r &= \alpha_1 \frac{d\alpha_2}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta_2}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma_2}{dt}, \end{aligned}$$

d. h. man bezeichne durch u, v, w die Geschwindigkeiten des Anfangspunktes der x, y, z nach den Richtungen der x, y, z und durch p, q, r die Drehungsgeschwindigkeiten des Körpers um die Axen der x, y, z. Die lebendige Kraft

des Körpers ist dann eine homogene Function zweiten Grades von u, v, w, p, q, r mit constanten Coefficienten; es soll gezeigt werden, dass unter den genannten Voraussetzungen auch die lebendige Kraft der Flüssigkeit eine homogene Function zweiten Grades derselben Variabeln mit constanten Coefficienten ist.

Zu diesem Zwecke bezeichne man durch x, y, z die Coordinaten eines Punktes des zur Zeit t von der Flüssigkeit eingenommenen Raumes in Bezug auf das im Körper feste Coordinatensystem bei der Lage, welche dieses zur Zeit t hat. Die Componenten der Geschwindigkeit, welche in diesem Punkte zur Zeit t stattfindet, nach den Axen der x, y, z sind dann den gemachten Annahmen zufolge $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, wenn φ das Geschwindigkeitspotential bedeutet, und es ist dieses eine in dem ganzen Gebiete von x, y, z stetige und eindeutige Function dieser Variabeln, die der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

genügt. Bedeutet N die Normale eines Flächenelementes, so ist ferner für alle Elemente der Fläche, welche die Flüssigkeit im Unendlichen begrenzt, $\frac{\partial\varphi}{\partial N}=0$, und für jedes Element der Oberfläche des Körpers ist $\frac{\partial\varphi}{\partial N}=$ der Componente der Geschwindigkeit des anliegenden Theiles des Körpers nach der Richtung von N.

Ist die Bewegung des Körpers, d. h. sind u, v, w, p, q, r gegeben, so ist hiernach, einem bekannten Satze gemäss, φ bis auf eine willkürliche additive Constante bestimmt. Es ist also φ, abgesehn von dieser Constanten, eine Function von u, v, w, p, q, r, und die lebendige Kraft der Flüssigkeit ist gleichfalls eine Function dieser sechs Variabeln. Um nachzuweisen, dass die lebendige Kraft der Flüssigkeit eine homogene Function zweiten Grades ist, ist nur zu zeigen, dass φ einer linearen homogenen Function der mehrfach genannten Grössen gleichgesetzt werden kann. Die Richtigkeit der letzten Behauptung aber zeigt die folgende Ueberlegung.

Die Componenten der Geschwindigkeit eines Punktes des Körpers nach den Axen der ξ, η, ζ sind:

$$\frac{d\xi}{dt},\quad \frac{d\eta}{dt},\quad \frac{d\zeta}{dt},$$

also die nach den Axen der x, y, z:

$$\alpha_1\frac{d\xi}{dt}+\beta_1\frac{d\eta}{dt}+\gamma_1\frac{d\zeta}{dt},$$
$$\alpha_2\frac{d\xi}{dt}+\beta_2\frac{d\eta}{dt}+\gamma_2\frac{d\zeta}{dt},$$
$$\alpha_3\frac{d\xi}{dt}+\beta_3\frac{d\eta}{dt}+\gamma_3\frac{d\zeta}{dt},$$

oder

$$(2.)\qquad \begin{cases} u+ry-qz, \\ v+pz-rx, \\ w+qx-py, \end{cases}$$

wie aus den Gleichungen folgt:

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{d\alpha}{dt}+\frac{d\alpha_1}{dt}x+\frac{d\alpha_2}{dt}y+\frac{d\alpha_3}{dt}z,$$
$$\frac{d\eta}{dt}=\frac{d\beta}{dt}+\frac{d\beta_1}{dt}x+\frac{d\beta_2}{dt}y+\frac{d\beta_3}{dt}z,$$
$$\frac{d\zeta}{dt}=\frac{d\gamma}{dt}+\frac{d\gamma_1}{dt}x+\frac{d\gamma_2}{dt}y+\frac{d\gamma_3}{dt}z$$

in Verbindung mit den Definitionsgleichungen von u, v, w, p, q, r und den Relationen, die zwischen α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3 bestehen. Die Bedingung, der φ an der Oberfläche des Körpers zu genügen hat, ist hiernach:

$$\frac{d\varphi}{dN}=(u+ry-qz)\cos(N,x)+(v+pz-rx)\cos(N,y)+(w+qx-py)\cos(N,z).$$

Man erfüllt daher alle für φ aufgestellten Forderungen, indem man

$$(3.)\qquad \varphi = u\varphi_1+v\varphi_2+w\varphi_3+p\varphi_4+q\varphi_5+r\varphi_6$$

setzt und die Functionen φ_1, φ_2, ..., φ_6 so bestimmt, dass jede von ihnen den für φ angegebenen Bedingungen genügt mit Ausnahme derjenigen, die sich auf die Oberfläche des Körpers bezieht, und dass für diese Oberfläche:

$$(4.)\qquad \begin{cases} \frac{\partial\varphi_1}{\partial N}=\cos(N,x), & \frac{\partial\varphi_4}{\partial N}=z\cos(N,y)-y\cos(N,z), \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial N}=\cos(N,y), & \frac{\partial\varphi_5}{\partial N}=x\cos(N,z)-z\cos(N,x), \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial N}=\cos(N,z), & \frac{\partial\varphi_6}{\partial N}=y\cos(N,x)-x\cos(N,y) \end{cases}$$

ist. Diese Functionen φ_1, φ_2, ... φ_6 sind unabhängig von u, v, w, p, q, r; es kann daher φ einer linearen homogenen Function dieser Grössen gleichgesetzt werden. Ferner sind φ_1, φ_2, ... φ_6 ausser von x, y, z ausschliess-

lich von der Gestalt des Körpers abhängig. Daraus folgt, dass die lebendige Kraft der Flüssigkeit eine homogene Function zweiten Grades von u, v, w, p, q, r ist, deren Coefficienten durch die Gestalt des Körpers und die Dichtigkeit der Flüssigkeit bestimmt sind.

§. 2.

Nach den gemachten Auseinandersetzungen ist die in Gleichung (1.) mit T bezeichnete lebendige Kraft des Körpers und der Flüssigkeit eine homogene Function zweiten Grades von u, v, w, p, q, r mit constanten Coefficienten; nach der Annahme ist Ω eine Function der Coordinaten α, β, γ und der Cosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$. Zwischen den 18 Variabeln, von welchen hiernach $\Omega + T$ abhängt, bestehn 12 Bedingungsgleichungen, die 6 Definitionsgleichungen für u, v, w, p, q, r nämlich und die 6 Relationen zwischen den 9 Cosinus α_1, β_1, ... Nach den Regeln der Variationsrechnung hat man, um die Gleichung (1.) zu entwickeln, zu $\Omega + T$ hinzuzufügen die mit unbestimmten Factoren multiplicirten Ausdrücke, welche den Bedingungsgleichungen zufolge gleich Null sein sollen, und, wenn S die so erhaltene Summe bedeutet, die Gleichung

$$0 = \delta \int S\, dt$$

unter der Voraussetzung zu entwickeln, dass jene Variabeln und diese Factoren unabhängige Functionen von t sind. Die 18 Gleichungen, die man aus der Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial s} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial \frac{ds}{dt}}\right)$$

erhält, wenn man hier für s der Reihe nach jene 18 Variabeln setzt, bilden in Verbindung mit den 12 Bedingungsgleichungen die gesuchte Entwicklung.

Die folgende Zusammenstellung giebt die Bedingungsgleichungen an und die entsprechenden Factoren, die eingeführt werden sollen.

Bedingungsgleichungen.	Factoren.
$\alpha_1 \frac{d\alpha}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma}{dt} - u = 0$	U
$\alpha_2 \frac{d\alpha}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma}{dt} - v = 0$	V
$\alpha_3 \frac{d\alpha}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma}{dt} - w = 0$	W

Bedingungsgleichungen.	Factoren.
$\alpha_2\frac{d\alpha_3}{dt}+\beta_2\frac{d\beta_3}{dt}+\gamma_2\frac{d\gamma_3}{dt}-p=0$	P
$\alpha_3\frac{d\alpha_1}{dt}+\beta_3\frac{d\beta_1}{dt}+\gamma_3\frac{d\gamma_1}{dt}-q=0$	Q
$\alpha_1\frac{d\alpha_2}{dt}+\beta_1\frac{d\beta_2}{dt}+\gamma_1\frac{d\gamma_2}{dt}-r=0$	R
$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2-1=0$	$\frac{1}{2}\lambda_{11}$
$\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2-1=0$	$\frac{1}{2}\lambda_{22}$
$\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2-1=0$	$\frac{1}{2}\lambda_{33}$
$\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=0$	$\lambda_{23}=\lambda_{32}$
$\alpha_3\alpha_1+\beta_3\beta_1+\gamma_3\gamma_1=0$	$\lambda_{31}=\lambda_{13}$
$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0$	$\lambda_{12}=\lambda_{21}$.

Daraus folgen diese 18 Gleichungen:

$$\frac{\partial T}{\partial u}=U, \qquad \frac{\partial T}{\partial p}=P,$$
$$\frac{\partial T}{\partial v}=V, \qquad \frac{\partial T}{\partial q}=Q,$$
$$\frac{\partial T}{\partial w}=W, \qquad \frac{\partial T}{\partial r}=R,$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}=\frac{d}{dt}(\alpha_1U+\alpha_2V+\alpha_3W),$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}=\frac{d}{dt}(\beta_1U+\beta_2V+\beta_3W),$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma}=\frac{d}{dt}(\gamma_1U+\gamma_2V+\gamma_3W),$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1}+U\frac{d\alpha}{dt}+R\frac{d\alpha_2}{dt}+\lambda_{11}\alpha_1+\lambda_{12}\alpha_2+\lambda_{13}\alpha_3=\frac{d}{dt}(\alpha_3Q),$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_1}+U\frac{d\beta}{dt}+R\frac{d\beta_2}{dt}+\lambda_{11}\beta_1+\lambda_{12}\beta_2+\lambda_{13}\beta_3=\frac{d}{dt}(\beta_3Q),$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_1}+U\frac{d\gamma}{dt}+R\frac{d\gamma_2}{dt}+\lambda_{11}\gamma_1+\lambda_{12}\gamma_2+\lambda_{13}\gamma_3=\frac{d}{dt}(\gamma_3Q),$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2}+V\frac{d\alpha}{dt}+P\frac{d\alpha_3}{dt}+\lambda_{21}\alpha_1+\lambda_{22}\alpha_2+\lambda_{23}\alpha_3=\frac{d}{dt}(\alpha_1R),$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2}+V\frac{d\beta}{dt}+P\frac{d\beta_3}{dt}+\lambda_{21}\beta_1+\lambda_{22}\beta_2+\lambda_{23}\beta_3=\frac{d}{dt}(\beta_1R),$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_2}+V\frac{d\gamma}{dt}+P\frac{d\gamma_3}{dt}+\lambda_{21}\gamma_1+\lambda_{22}\gamma_2+\lambda_{23}\gamma_3=\frac{d}{dt}(\gamma_1R),$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_3}+W\frac{d\alpha}{dt}+Q\frac{d\alpha_1}{dt}+\lambda_{31}\alpha_1+\lambda_{32}\alpha_2+\lambda_{33}\alpha_3=\frac{d}{dt}(\alpha_2 P),$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_3}+W\frac{d\beta}{dt}+Q\frac{d\beta_1}{dt}+\lambda_{31}\beta_1+\lambda_{32}\beta_2+\lambda_{33}\beta_3=\frac{d}{dt}(\beta_2 P),$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_3}+W\frac{d\gamma}{dt}+Q\frac{d\gamma_1}{dt}+\lambda_{31}\gamma_1+\lambda_{32}\gamma_2+\lambda_{33}\gamma_3=\frac{d}{dt}(\gamma_2 P).$$

Die Werthe von U, V, W, P, Q, R, welche die 6 ersten Gleichungen geben, substituire man in die übrigen; die 3 folgenden erhalten dann unmittelbar eine zum weitern Gebrauche geeignete Form, während aus den 9 letzten noch die 6 Grössen λ eliminirt werden müssen. Jene 3 Gleichungen werden:

$$(5^a.)\quad\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial T}{\partial u}+\alpha_2\frac{\partial T}{\partial v}+\alpha_3\frac{\partial T}{\partial w}\right)=\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha},\\ \frac{d}{dt}\left(\beta_1\frac{\partial T}{\partial u}+\beta_2\frac{\partial T}{\partial v}+\beta_3\frac{\partial T}{\partial w}\right)=\frac{\partial\Omega}{\partial\beta},\\ \frac{d}{dt}\left(\gamma_1\frac{\partial T}{\partial u}+\gamma_2\frac{\partial T}{\partial v}+\gamma_3\frac{\partial T}{\partial w}\right)=\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma}.\end{cases}$$

Die Grössen, die auf der rechten Seite der Gleichheitszeichen hier stehen, sind die Summen der Componenten der auf den Körper wirkenden Kräfte nach den Axen der ξ, η, ζ.

Multiplicirt man die Gleichungen $(5^a.)$

mit α_1 oder mit α_2 oder mit α_3
- β_1 - - β_2 - - β_3
- γ_1 - - γ_2 - - γ_3

und addirt sie jedesmal, so erhält man bei Rücksicht auf die Gleichungen, die zwischen diesen 9 Cosinus und den Grössen p, q, r bestehen:

$$(5^b.)\quad\begin{cases}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u}=q\frac{\partial T}{\partial w}-r\frac{\partial T}{\partial v}+\alpha_1\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}+\beta_1\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}+\gamma_1\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma},\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v}=r\frac{\partial T}{\partial u}-p\frac{\partial T}{\partial w}+\alpha_2\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}+\beta_2\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}+\gamma_2\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma},\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w}=p\frac{\partial T}{\partial v}-q\frac{\partial T}{\partial u}+\alpha_3\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}+\beta_3\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}+\gamma_3\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma}.\end{cases}$$

Die erwähnte Elimination der Grössen λ aus den 9 Gleichungen, in denen diese vorkommen, kann man bewirken, indem man die Gleichungen

mit 0 oder mit $-\gamma_1$ oder mi β_1
- γ_1 - - 0 - - $-\alpha_1$
- $-\beta_1$ - - α_1 - - 0

mit	0	oder mit		$-\gamma_2$	oder mit		β_2
-	γ_2	-	-	0	-	-	$-\alpha_2$
-	$-\beta_2$	-	-	α_2	-	-	0
-	0	-	-	$-\gamma_3$	-	-	β_3
-	γ_3	-	-	0	-	-	$-\alpha_3$
-	$-\beta_3$	-	-	α_3	-	-	0

multiplicirt und jedesmal addirt. Setzt man der Kürze wegen

$$M_\xi = \gamma\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}-\beta\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma}+\gamma_1\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_1}-\beta_1\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_1}+\gamma_2\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2}-\beta_2\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_2}+\gamma_3\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_3}-\beta_3\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_3},$$

$$M_\eta = \alpha\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma}-\gamma\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}+\alpha_1\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_1}-\gamma_1\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1}+\alpha_2\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_2}-\gamma_2\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2}+\alpha_3\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_3}-\gamma_3\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_3},$$

$$M_\zeta = \beta\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}-\alpha\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}+\beta_1\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1}-\alpha_1\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_1}+\beta_2\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2}-\alpha_2\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2}+\beta_3\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_3}-\alpha_3\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_3},$$

d. h. bezeichnet man durch M_ξ, M_η, M_ζ die Drehungsmomente der auf den Körper wirkenden Kräfte in Bezug auf die Axen der ξ, η, ζ; nimmt man ferner an, dass die Axen der x, y, z durch Drehung den Axen der ξ, η, ζ parallel gemacht werden können, so dass

$$\alpha_1=\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2, \quad \beta_1=\gamma_2\alpha_3-\gamma_3\alpha_2, \quad \gamma_1=\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2,$$
$$\alpha_2=\beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3, \quad \beta_2=\gamma_3\alpha_1-\gamma_1\alpha_3, \quad \gamma_2=\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3,$$
$$\alpha_3=\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1, \quad \beta_3=\gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1, \quad \gamma_3=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$$

ist, so erhält man auf dem angegebenen Wege nach einigen Transformationen und bei Rücksicht auf die Gleichungen (5^a.):

$$(6^a.)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\begin{matrix}(\beta_1\gamma-\gamma_1\beta)\frac{\partial T}{\partial u}+(\beta_2\gamma-\gamma_2\beta)\frac{\partial T}{\partial v}+(\beta_3\gamma-\gamma_3\beta)\frac{\partial T}{\partial w}\\ +\alpha_1\frac{\partial T}{\partial p}\qquad +\alpha_2\frac{\partial T}{\partial q}\qquad +\alpha_3\frac{\partial T}{\partial r}\end{matrix}\right\} = M_\xi,\\
&\frac{d}{dt}\left\{\begin{matrix}(\gamma_1\alpha-\alpha_1\gamma)\frac{\partial T}{\partial u}+(\gamma_2\alpha-\alpha_2\gamma)\frac{\partial T}{\partial v}+(\gamma_3\alpha-\alpha_3\gamma)\frac{\partial T}{\partial w}\\ +\beta_1\frac{\partial T}{\partial p}\qquad +\beta_2\frac{\partial T}{\partial q}\qquad +\beta_3\frac{\partial T}{\partial r}\end{matrix}\right\} = M_\eta,\\
&\frac{d}{dt}\left\{\begin{matrix}(\alpha_1\beta-\beta_1\alpha)\frac{\partial T}{\partial u}+(\alpha_2\beta-\beta_2\alpha)\frac{\partial T}{\partial v}+(\alpha_3\beta-\beta_3\alpha)\frac{\partial T}{\partial w}\\ +\gamma_1\frac{\partial T}{\partial p}\qquad +\gamma_2\frac{\partial T}{\partial q}\qquad +\gamma_3\frac{\partial T}{\partial r}\end{matrix}\right\} = M_\zeta.
\end{aligned}\right.$$

Die Elimination der Grössen λ aus den 9 Gleichungen, in denen sie vorkommen, lässt sich auch dadurch erreichen, dass man diese Gleichungen

mit	0	oder	mit	$-\alpha_3$	oder	mit	α_2
-	0	-	-	$-\beta_3$	-	-	β_2
-	0	-	-	$-\gamma_3$	-	-	γ_2
-	α_3	-	-	0	-	-	$-\alpha_1$
-	β_3	-	-	0	-	-	$-\beta_1$
-	γ_3	-	-	0	-	-	$-\gamma_1$
-	$-\alpha_2$	-	-	α_1	-	-	0
-	$-\beta_2$	-	-	β_1	-	-	0
-	$-\gamma_2$	-	-	γ_1	-	-	0

multiplicirt und jedesmal addirt; dadurch erhält man:

$$(6^b.)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} = v\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q} \\ \qquad + \alpha_2\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_3} - \alpha_3\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_2} + \beta_2\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_3} - \beta_3\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_2} + \gamma_2\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma_3} - \gamma_3\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma_2}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} = w\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial r} \\ \qquad + \alpha_3\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1} - \alpha_1\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_3} + \beta_3\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_1} - \beta_1\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_3} + \gamma_3\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma_1} - \gamma_1\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma_3}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} = u\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial p} \\ \qquad + \alpha_1\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_2} - \alpha_2\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1} + \beta_1\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_2} - \beta_2\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_1} + \gamma_1\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma_2} - \gamma_2\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma_1}. \end{cases}$$

§. 3.

Es soll jetzt die Annahme eingeführt werden, dass keine Kräfte auf den Körper wirken, das Potential Ω also gleich Null gesetzt werden kann. Die Gleichungen $(5^b.)$ und $(6^b.)$ nehmen dann die folgende, einfache Gestalt an:

$$(7.)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} = q\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial v}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} = r\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial w}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w} = p\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial u}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} = v\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} = w\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial r}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} = u\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial p}. \end{cases}$$

Man findet 3 allgemeine Integrale dieser Gleichungen, indem man sie

mit	u	oder	mit	$\frac{\partial T}{\partial u}$	oder	mit	$\frac{\partial T}{\partial p}$
–	v	–	–	$\frac{\partial T}{\partial v}$	–	–	$\frac{\partial T}{\partial q}$
–	w	–	–	$\frac{\partial T}{\partial w}$	–	–	$\frac{\partial T}{\partial r}$
–	p	–	–	0	–	–	$\frac{\partial T}{\partial u}$
–	q	–	–	0	–	–	$\frac{\partial T}{\partial v}$
–	r	–	–	0	–	–	$\frac{\partial T}{\partial w}$

multiplicirt und jedesmal addirt.

Erwägt man, dass

$$2T = u\frac{\partial T}{\partial u}+v\frac{\partial T}{\partial v}+w\frac{\partial T}{\partial w}+p\frac{\partial T}{\partial p}+q\frac{\partial T}{\partial q}+r\frac{\partial T}{\partial r}$$

und

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial T}{\partial v}\frac{dv}{dt}+\frac{\partial T}{\partial w}\frac{dw}{dt}+\frac{\partial T}{\partial p}\frac{dp}{dt}+\frac{\partial T}{\partial q}\frac{dq}{dt}+\frac{\partial T}{\partial r}\frac{dr}{dt}$$

ist, so ergiebt das erste Faktorensystem:

$$(8.)\quad \begin{cases} 2T = L; \\ \text{die beiden andern ergeben:} \\ \left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2 = M, \\ \frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial p}+\frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial q}+\frac{\partial T}{\partial w}\frac{\partial T}{\partial r} = N, \end{cases}$$

wo L, M, N willkürliche Constanten bedeuten.

6 andere Integralgleichungen des vorliegenden Problems erhält man aus den Gleichungen (5^a.) und (6^a.). Setzt man in diesen der eingeführten Voraussetzung gemäss

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \gamma}, \quad M_\xi, \quad M_\eta, \quad M_\zeta$$

gleich Null, so folgt aus ihnen:

$$(9.)\qquad \begin{cases} \alpha_1 \dfrac{\partial T}{\partial u} + \alpha_2 \dfrac{\partial T}{\partial v} + \alpha_3 \dfrac{\partial T}{\partial w} = \mathrm{A}, \\ \beta_1 \dfrac{\partial T}{\partial u} + \beta_2 \dfrac{\partial T}{\partial v} + \beta_3 \dfrac{\partial T}{\partial w} = \mathrm{B}, \\ \gamma_1 \dfrac{\partial T}{\partial u} + \gamma_2 \dfrac{\partial T}{\partial v} + \gamma_3 \dfrac{\partial T}{\partial w} = \mathrm{C}, \end{cases}$$

$$(10.)\qquad \begin{cases} \alpha_1 \dfrac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2 \dfrac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3 \dfrac{\partial T}{\partial r} = A + \beta\mathrm{C} - \gamma\mathrm{B}, \\ \beta_1 \dfrac{\partial T}{\partial p} + \beta_2 \dfrac{\partial T}{\partial q} + \beta_3 \dfrac{\partial T}{\partial r} = B + \gamma\mathrm{A} - \alpha\mathrm{C}, \\ \gamma_1 \dfrac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2 \dfrac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3 \dfrac{\partial T}{\partial r} = I' + \alpha\mathrm{B} - \beta\mathrm{A}, \end{cases}$$

wo A, B, C, A, B, I' willkürliche Constanten bezeichnen.

Die beiden letzten der Gleichungen (8.) sind Folgen der Gleichungen (9.) und (10.), und die Constanten M und N sind durch die Constanten A, B, C, A, B, I' ausdrückbar. Quadrirt man nämlich die Gleichungen (9.) und addirt sie, multiplicirt man dann die Gleichungen (9.) mit den Gleichungen (10.) und addirt sie wieder, so erhält man bei Rücksicht auf die Gleichungen (8.):

$$(11.)\qquad \begin{cases} \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 = M, \\ \mathrm{A}A + \mathrm{B}B + \mathrm{C}I' = N. \end{cases}$$

§. 4.

Bevor vereinfachende Voraussetzungen in Bezug auf die Gestalt des Körpers und die Vertheilung der Masse in ihm eingeführt werden, möge eine particuläre Lösung der vorliegenden Differentialgleichungen angeführt werden, welche unter denselben Annahmen gilt, als die im vorigen Paragraphen abgeleiteten Gleichungen.

Die Gleichungen (7.) erfüllt man, wenn man $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ und u, v, w gleich Constanten setzt, deren Verhältnisse man passend bestimmt, nämlich so, dass

$$u : v : w = \frac{\partial T}{\partial u} : \frac{\partial T}{\partial v} : \frac{\partial T}{\partial w}$$

ist. Erwägt man, dass, wenn p, q, r verschwinden, T eine homogene Function zweiten Grades von u, v, w wird, und zwar eine, die stets positiv bleibt, so sieht man, dass die Bestimmung der Verhältnisse $u : v : w$ übereinkommt

mit der Bestimmung der Hauptaxen eines gewissen Ellipsoids. Es folgt daraus mit Leichtigkeit, dass es für jeden Körper 3, und im Allgemeinen *nur* 3, auf einander senkrechte Richtungen giebt, in denen er ohne sich zu drehen in der Flüssigkeit fortschreiten kann.

§. 5.

Die Zahl der Constanten, die in dem Ausdrucke von T vorkommen, ist im Allgemeinen 21; es soll jetzt untersucht werden, wie diese Zahl sich verringert, wenn der Körper gewisse Symmetrieen darbietet. Dabei soll zuerst der Theil von T ins Auge gefasst werden, den die lebendige Kraft der Flüssigkeit bildet. Das Doppelte dieser lebendigen Kraft setze man

$$\begin{aligned} = {} & a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}uw + 2a_{14}up + 2a_{15}uq + 2a_{16}ur \\ & + a_{22}v^2 + 2a_{23}vw + 2a_{24}vp + 2a_{25}vq + 2a_{26}vr \\ & + a_{33}w^2 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist dann, wenn die Dichtigkeit der Flüssigkeit durch ϱ bezeichnet wird,

$$= \varrho \iiint dx\,dy\,dz \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \right\},$$

wo die Integration über den Raum auszudehnen ist, den die Flüssigkeit zur Zeit t erfüllt, und φ die in §. 1 besprochene Function von x, y, z bedeutet. Substituirt man hier für φ den in Gleichung (3.) angegebenen Werth, so findet man für die Coefficienten a die folgenden Ausdrücke:

$$a_{11} = \varrho \iiint dx\,dy\,dz \left\{ \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2 \right\},$$

$$a_{12} = \varrho \iiint dx\,dy\,dz \left\{ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \right\},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

oder auch, wenn dS ein Element der Oberfläche des Körpers und N die nach dem Innern der Flüssigkeit gerichtete Normale desselben bedeutet:

$$(12.) \quad \begin{cases} a_{11} = -\varrho \int dS\,\varphi_1 \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial N}, \\ a_{12} = -\varrho \int dS\,\varphi_1 \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial N}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

Es werde nun angenommen, dass die Oberfläche des Körpers symmetrisch in Bezug auf die xz-Ebene ist, d. h. dass, wenn x, y, z die Coor-

dinaten eines Punktes derselben sind, sie auch den Punkt $x, -y, z$ enthält. Zwei Punkte, wie diese, sollen entsprechende Punkte genannt werden. In zwei entsprechenden Punkten der Oberfläche haben dann, den Gleichungen (4.) zufolge, $\frac{\partial\varphi_1}{\partial N}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial N}, \frac{\partial\varphi_5}{\partial N}$ gleiche und $\frac{\partial\varphi_2}{\partial N}, \frac{\partial\varphi_4}{\partial N}, \frac{\partial\varphi_6}{\partial N}$ entgegengesetzte Werthe. Daraus folgt, dass in irgend zwei entsprechenden Punkten des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes, also auch in zwei entsprechenden Punkten der Oberfläche des Körpers, $\varphi_1, \varphi_3, \varphi_5$ gleiche und $\varphi_2, \varphi_4, \varphi_6$, bei passender Bestimmung der in ihnen vorkommenden additiven Constanten, entgegengesetzte Werthe haben, und daraus ergiebt sich weiter, bei Rücksicht auf die Gleichungen (12.), dass diejenigen a verschwinden, bei denen *ein* Index der Reihe 1, 3, 5, der *andere* der Reihe 2, 4, 6 angehört.

Die doppelte lebendige Kraft des Körpers ist, wenn dm ein Element seiner Masse bezeichnet, das die Coordinaten x, y, z besitzt, in Folge der Bedeutung der Ausdrücke (2.):

$$= \int dm \{(u+ry-qz)^2+(v+pz-rx)^2+(w+qx-py)^2\}$$

oder

$$= \int dm \{u^2+v^2+w^2+(y^2+z^2)p^2+(z^2+x^2)q^2+(x^2+y^2)r^2 + 2x(wq-vr)+2y(ur-wp)+2z(vp-uq) - 2yzqr-2zxrp-2xypq\};$$

ist die Vertheilung der Masse symmetrisch zur xz-Ebene, so verschwinden hier diejenigen Glieder, welche die Factoren

$$ur-wp, \quad qr, \quad pq$$

enthalten. Setzt man jenen Ausdruck allgemein

$$= b_{11}u^2+2b_{12}uv+2b_{13}uw+2b_{14}up+\cdots + b_{22}v^2+2b_{23}vw+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

so verschwinden daher, sobald die Masse symmetrisch zur xz-Ebene vertheilt ist, diejenigen b, bei denen ein Index der Reihe 1, 3, 5, der andere der Reihe 2, 4, 6 angehört.

Daraus folgt, dass, wenn man allgemein

$$2T = c_{11}u^2+2c_{12}uv+2c_{13}uw+2c_{14}up+\cdots + c_{22}v^2+2c_{23}vw+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

setzt, diejenigen c gleich Null sind, bei denen ein Index der Reihe 1, 3, 5, der andere der Reihe 2, 4, 6 angehört, falls der Körper, sowohl in Bezug auf seine Gestalt, als in Bezug auf die Vertheilung der Masse in ihm, symmetrisch zur xz-Ebene ist.

Findet eine solche Symmetrie in Bezug auf die yx-Ebene oder die zy-Ebene statt, so treten an Stelle der Reihen 1, 3, 5 und 2, 4, 6 die Reihen 2, 1, 6 und 3, 5, 4 oder die Reihen 3, 2, 4 und 1, 6, 5.

Ist der Körper symmetrisch in Bezug auf die drei Coordinatenebenen, so enthält hiernach der Ausdruck von $2T$ nur die Quadrate von u, v, w, p, q, r.

Es soll nun angenommen werden, dass der Körper der Gestalt und der Vertheilung der Masse nach ein Rotationskörper ist. dessen Axe mit der x-Axe zusammenfällt. Es findet dann Symmetrie in Bezug auf die xy-Ebene und in Bezug auf die xz-Ebene statt, und daher ist

$$2T = c_{11}u^2 + c_{22}v^2 + c_{33}w^2 + c_{44}p^2 + c_{55}q^2 + c_{66}r^2 + 2c_{26}vr + 2c_{35}wq.$$

Zwischen den hier vorkommenden Constanten bestehen aber noch einige Beziehungen. Um diese zu finden, führe man neben dem System der x, y, z noch ein zweites im Körper festes Coordinatensystem, das der x', y', z' ein; in Bezug auf dieses sollen $u', v', w', p', q', r', c'_{11}, c'_{12}, \ldots$ dieselbe Bedeutung haben, wie $u, v, w, p, q, r, c_{11}, c_{12}, \ldots$ in Bezug auf jenes. Die beiden Coordinatensysteme sollen denselben Anfangspunkt und dieselbe x-Axe haben, so dass, wenn x, y, z und x', y', z', sich auf denselben Punkt beziehen:

$$\begin{aligned} x &= x', \\ y &= y'\cos\vartheta + z'\sin\vartheta, \\ z &= -y'\sin\vartheta + z'\cos\vartheta \end{aligned}$$

ist. Wegen der Bedeutung der Ausdrücke (2.) bestehen dann die Gleichungen:

$$\begin{aligned} u + ry - qz &= u' + r'y' - q'z', \\ v + pz - rx &= (v' + p'z' - r'x')\cos\vartheta + (w' + q'x' - p'y')\sin\vartheta, \\ w + qx - py &= -(v' + p'z' - r'x')\sin\vartheta + (w' + q'x' - p'y')\cos\vartheta, \end{aligned}$$

aus welchen folgt:

$$\begin{aligned} u &= u', & p &= p', \\ v &= v'\cos\vartheta + w'\sin\vartheta, & q &= q'\cos\vartheta + r'\sin\vartheta, \\ w &= -v'\sin\vartheta + w'\cos\vartheta, & r &= -q'\sin\vartheta + r'\cos\vartheta. \end{aligned}$$

Eine Symmetrie, wie in Bezug auf die xy- und xz-Ebenen besteht auch in Bezug auf die $x'y'$- und $x'z'$-Ebenen; es ist daher auch

$$2T = c'_{11}u'^2 + c'_{22}v'^2 + c'_{33}w'^2 + c'_{44}p'^2 + c'_{55}q'^2 + c'_{66}r'^2 + 2c'_{26}v'r' + 2c'_{35}w'q'.$$

Setzt man die beiden Ausdrücke von $2T$ einander gleich und drückt die Grössen u, v, w, p, q, r durch u', v', w', p', q', r' aus, so erhält man durch Vergleichung der Coefficienten der entsprechenden Glieder:

$$c_{22} = c_{33}, \quad c_{55} = c_{66}, \quad c_{26} + c_{35} = 0$$

und Gleichungen, die aussagen, dass die Grössen c' den entsprechenden Grössen c gleich sind. Hiernach ist

$$2T = c_{11}u^2 + c_{22}(v^2 + w^2) + c_{44}p^2 + c_{55}(q^2 + r^2) + 2c_{26}(vr - wq).$$

Dieser Ausdruck lässt noch eine Vereinfachung zu durch eine passende Wahl des Anfangspunktes der Coordinaten auf der x-Axe. Um das zu zeigen, führe man, ähnlich wie oben, neben dem Coordinatensystem der x, y, z ein zweites, das der x', y', z' ein, das so gewählt sein soll, dass für jeden Punkt

$$x = x' + a, \quad y = y', \quad z = z'$$

ist. Bei einer ähnlichen Bezeichnung, wie sie oben gebraucht ist, hat man dann:

$$\begin{aligned} u + ry - qz &= u' + r'y' - q'z', \\ v + pz - rx &= v' + p'z' - r'x', \\ w + qx - py &= w' + q'x' - p'y', \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} u &= u', & p &= p', \\ v &= v' + r'a, & q &= q', \\ w &= w' - q'a, & r &= r' \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &c_{11}u^2 + c_{22}(v^2 + w^2) + c_{44}p^2 + c_{55}(q^2 + r^2) + 2c_{26}(v\,r - w\,q) \\ &= c'_{11}u'^2 + c'_{22}(v'^2 + w'^2) + c'_{44}p'^2 + c'_{55}(q'^2 + r'^2) + 2c'_{26}(v'r' - w'q'), \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} &c_{11} = c'_{11}, \quad c_{22} = c'_{22}, \quad c_{44} = c'_{44}, \\ &c_{55} = c'_{55} - 2c'_{26}a + c'_{22}a^2, \\ &c_{26} = c'_{26} - c'_{22}a. \end{aligned}$$

Hieraus geht hervor, dass, wenn der Anfangspunkt der x' beliebig gewählt ist, a so bestimmt werden kann, dass

$$c_{26} = 0,$$

also

$$(13)\qquad 2T = c_{11}u^2 + c_{22}(v^2+w^2) + c_{44}p^2 + c_{55}(q^2+r^2)$$

wird.

Es möge bemerkt werden, dass diese Gleichung, wie aus ihrer Herleitung ersichtlich ist, auch gilt, wenn der Körper kein Rotationskörper ist, sobald er nur symmetrisch ist in Bezug auf zwei oder mehr Paare aufeinander senkrechter Ebenen, die durch die x-Axe gehn; was z. B. bei einem homogenen, geraden Prisma oder einer solchen Pyramide von quadratischem oder regelmässig sechseckigem Querschnitt bei passender Wahl der x-Axe stattfindet. Auch für solche Fälle werden also die Folgerungen gelten, die an die Gleichung (13.) geknüpft werden sollen.

§. 6.

Den durch die Gleichung (13.) bestimmten Werth von T denke man sich nun in die Gleichungen (7.) substituirt. Die vierte von diesen wird dann:

$$\frac{dp}{dt} = 0 \quad \text{d. h.} \quad p = \text{const.};$$

die andern werden:

$$(14.)\qquad \begin{cases} c_{11}\dfrac{du}{dt} = -c_{22}(vr-wq), \\ c_{22}\dfrac{dv}{dt} = c_{11}ur - c_{22}wp, \\ c_{22}\dfrac{dw}{dt} = -c_{11}uq + c_{22}vp, \\ c_{55}\dfrac{dq}{dt} = (c_{11}-c_{22})uw + (c_{44}-c_{55})pr, \\ c_{55}\dfrac{dr}{dt} = -(c_{11}-c_{22})uv - (c_{44}-c_{55})pq. \end{cases}$$

An Stelle der Variabeln v, w, q, r sollen hier neue s, σ, φ, ψ eingeführt werden, so dass

$$(15.)\qquad \begin{cases} v = s\cos\varphi, & q = \sigma\cos(\varphi+\psi), \\ w = s\sin\varphi, & r = \sigma\sin(\varphi+\psi), \end{cases}$$

also

$$v^2+w^2 = s^2, \quad q^2+r^2 = \sigma^2,$$
$$vq+wr = s\sigma\cos\psi,$$
$$vr-wq = s\sigma\sin\psi$$

ist. Die erste der Gleichungen (14.) wird dann:

$$(16.) \qquad c_{11}\frac{du}{dt} = -c_{22}s\sigma\sin\psi,$$

und, da

$$s^2 d\varphi = -w\,dv + v\,dw$$

ist, so folgt aus der zweiten und dritten:

$$(17.) \qquad c_{22}\frac{d\varphi}{dt} = -c_{11}\frac{u\sigma}{s}\cos\psi + c_{22}p.$$

Die drei Integralgleichungen (8.) werden:

$$(18.) \qquad \begin{cases} c_{11}u^2 + c_{22}s^2 + c_{44}p^2 + c_{55}\sigma^2 = L, \\ c_{11}^2u^2 + c_{22}^2s^2 = M, \\ c_{11}c_{44}up + c_{22}c_{55}s\sigma\cos\psi = N, \end{cases}$$

oder

$$(19.) \qquad \begin{cases} s = \sqrt{f - f'u^2}, \\ \sigma = \sqrt{g - g'u^2}, \\ s\sigma\cos\psi = h - h'u, \end{cases}$$

wenn f, g, h, f', g', h' Constanten bedeuten, die in gewisser Weise von L, M, N, p und den Grössen c abhängen. Hieraus folgt:

$$s\sigma\sin\psi = \sqrt{(f - f'u^2)(g - g'u^2) - (h - h'u)^2};$$

die Gleichungen (16.) und (17.) geben daher:

$$(20.) \qquad c_{22}dt = -c_{11}\frac{du}{\sqrt{(f - f'u^2)(g - g'u^2) - (h - h'u)^2}}$$

und

$$c_{22}^2 d\varphi = c_{11}\frac{c_{11}u(h - h'u) - c_{22}p(f - f'u^2)}{(f - f'u^2)\sqrt{(f - f'u^2)(g - g'u^2) - (h - h'u)^2}}\,du.$$

Diese beiden Gleichungen erlauben t und φ durch elliptische Integrale als Functionen von u darzustellen und u und φ mit Hülfe elliptischer Functionen durch t auszudrücken. Ist das geschehen, so kann man durch Benutzung von (19.) und (15.) alle in (14.) vorkommenden Unbekannten als Functionen von t darstellen.

§. 7.

Hat man bei einer beliebigen Gestalt des in der Flüssigkeit bewegten Körpers u, v, w, p, q, r durch die Gleichungen (7.) als Functionen von t be-

stimmt, so erfordert die Berechnung der eigentlichen Unbekannten des Problems, nämlich der Coordinaten α, β, γ und der Cosinus α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3 immer nur die Ausführung von Quadraturen.

Von den willkürlichen Constanten A, B, C, die in den Gleichungen (9.) vorkommen, kann man zwei, etwa B und C, gleich Null setzen, ohne die Allgemeinheit der betrachteten Bewegung zu beeinträchtigen; man verfügt dadurch nur über die Richtung der ξ-Axe. Betrachtet man nämlich $\frac{\partial T}{\partial u}$, $\frac{\partial T}{\partial v}$, $\frac{\partial T}{\partial w}$ als die Componenten einer Geschwindigkeit nach den Axen der x, y, z, so zeigen die Gleichungen (9.), dass die Componenten dieser Geschwindigkeit nach den Axen der ξ, η, ζ den Constanten A, B, C gleich sind; giebt man der ξ-Axe die Richtung dieser Geschwindigkeit, so wird $B = 0$ und $C = 0$. Zugleich wird nach (11.):

$$A^2 = M.$$

Multiplicirt man nach dieser Festsetzung die Gleichungen (9.)

mit α_1 oder mit α_2 oder mit α_3

β_1 β_2 β_3

γ_1 γ_2 γ_3

und addirt sie jedesmal, so erhält man:

$$\alpha_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial T}{\partial u}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{A}\frac{\partial T}{\partial v}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{A}\frac{\partial T}{\partial w}.$$

Um für die übrigen Cosinus Ausdrücke zu finden, setze man:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \cos\theta, \\
\alpha_2 &= -\sin\Phi\sin\theta, \\
\alpha_3 &= \cos\Phi\sin\theta, \\
\beta_1 &= \sin\Psi\sin\theta, \\
\beta_2 &= \cos\Phi\cos\Psi + \sin\Phi\sin\Psi\cos\theta, \\
\beta_3 &= \sin\Phi\cos\Psi - \cos\Phi\sin\Psi\cos\theta, \\
\gamma_1 &= -\cos\Psi\sin\theta, \\
\gamma_2 &= \cos\Phi\sin\Psi - \sin\Phi\cos\Psi\cos\theta, \\
\gamma_3 &= \sin\Phi\sin\Psi + \cos\Phi\cos\Psi\cos\theta.
\end{aligned}$$

Die Winkel θ und Φ sind dann aus den Werthen von α_1, α_2, α_3 zu bestimmen, und es bleibt nur Ψ zu ermitteln. Man hat aber

$$\operatorname{tg}\Psi = -\frac{\beta_1}{\gamma_1}$$

und, nach den Definitionsgleichungen von p, q, r:

$$\frac{d\beta_1}{dt} = \beta_3 q - \beta_2 r, \qquad \frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_3 q - \gamma_2 r;$$

mit Hülfe hiervon findet man:

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{\alpha_2 q + \alpha_3 r}{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}$$

oder

$$(21.) \qquad \frac{d\Psi}{dt} = -A\,\frac{q\frac{\partial T}{\partial v} + r\frac{\partial T}{\partial w}}{\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2}.$$

Zur Bestimmung der Coordinaten β und γ führen die Gleichungen (10.). Die beiden letzten von diesen geben, wenn man die in ihnen vorkommenden Constanten B und l' gleich Null setzt, was darauf hinauskommt, dass man über die Lage der ξ-Axe verfügt:

$$\gamma = \frac{1}{A}\left(\beta_1\frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2\frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3\frac{\partial T}{\partial r}\right),$$

$$\beta = -\frac{1}{A}\left(\gamma_1\frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2\frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3\frac{\partial T}{\partial r}\right).$$

Die erste der Gleichungen (10.) führt auf die letzte der Gleichungen (8.) zurück. Die Ordinate α endlich ergiebt sich aus der Gleichung

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w$$

oder

$$(22.) \qquad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{A}\left(u\frac{\partial T}{\partial u} + v\frac{\partial T}{\partial v} + w\frac{\partial T}{\partial w}\right).$$

In dem im vorigen Paragraphen behandelten Falle, dass der Körper ein Rotationskörper ist, kann man setzen:

$$\cos\theta = \frac{1}{A}c_{11}u, \quad \sin\theta = -\frac{1}{A}c_{22}s,$$

$$\Phi = \frac{\pi}{2} + \varphi;$$

die Gleichung (21.) wird:

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{A}{c_{22}}\,\frac{h - h'u}{f - f'u^2},$$

die Gleichung (22.):

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{A}\left(c_{22}f + (c_{11} - c_{22}f')u^2\right)$$

oder, da nach (18.) und (19.):

$$f = \frac{A^2}{c_{22}^2}, \qquad f' = \frac{c_{11}^2}{c_{22}^2},$$

$$(23.) \qquad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{A}{c_{22}}\left(1 - c_{11}(c_{11} - c_{22})\frac{u^2}{A^2}\right).$$

Führt man nun für dt den aus (20.) sich ergebenden Werth ein, so erhält man auch Ψ und α als elliptische Integrale durch u ausgedrückt.

§. 8.

Lässt man die Constanten h und h', die durch die Gleichungen (19.) eingeführt sind, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Constanten p und N verschwinden, so gelangt man zu dem, im Eingange angeführten, von den Herren *Thomson* und *Tait* behandelten Falle. Es wird dann φ einer willkürlichen Constanten gleich; setzt man diese gleich Null, d. h. verfügt man bei gegebener Anfangsbewegung in gewisser Weise über die Richtung der y-Axe, so wird

$$w = 0, \qquad q = 0, \qquad \Phi = \frac{\pi}{2}.$$

Ferner wird auch Ψ gleich einer willkürlichen Constanten; macht man diese gleich $\frac{\pi}{2}$, indem man die Richtung der η-Axe passend wählt, so hat man:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos\theta, & \beta_1 &= \sin\theta, & \gamma_1 &= 0, \\ \alpha_2 &= -\sin\theta, & \beta_2 &= \cos\theta, & \gamma_2 &= 0, \\ \alpha_3 &= 0, & \beta_3 &= 0, & \gamma_3 &= 1, \end{aligned}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{A} c_{11} u, \qquad \sin\theta = -\frac{1}{A} c_{22} v.$$

Endlich findet man

$$\gamma = 0, \qquad \beta = -\frac{1}{A} c_{55} r,$$

während α aus Gleichung (23.) zu berechnen ist.

Es hat keine Schwierigkeit für diesen Fall die in den beiden vorigen Paragraphen abgeleiteten Gleichungen weiter zu discutiren und durch sie die Unbekannten des Problems als elliptische Functionen der Zeit auszudrücken. Einfacher aber gelangt man zu demselben Ziele durch Betrachtungen, die sich an die Differentialgleichungen knüpfen, die in diesem Falle gelten.
Setzt man in den Gleichungen (14.)

$$w = 0, \qquad p = 0, \qquad q = 0,$$

so werden sie:

$$c_{11}\frac{du}{dt} = -c_{22}vr,$$
$$c_{22}\frac{dv}{dt} = c_{11}ur,$$
$$c_{55}\frac{dr}{dt} = -(c_{11}-c_{22})uv.$$

Vergleicht man dieselben mit den identischen Gleichungen:

$$\frac{d\sin\operatorname{am}\lambda t}{dt} = \lambda\cos\operatorname{am}\lambda t\,\Delta\operatorname{am}\lambda t,$$
$$\frac{d\cos\operatorname{am}\lambda t}{dt} = -\lambda\sin\operatorname{am}\lambda t\,\Delta\operatorname{am}\lambda t,$$
$$\frac{d\Delta\operatorname{am}\lambda t}{dt} = -\lambda x^2\sin\operatorname{am}\lambda t\cos\operatorname{am}\lambda t,$$

in denen x den Modul der elliptischen Functionen bedeutet, so sieht man, dass bei passender Wahl des Anfangspunktes der Zeit die Grössen u, v, r die Werthe

$$l\sin\operatorname{am}\lambda t, \quad m\cos\operatorname{am}\lambda t, \quad n\Delta\operatorname{am}\lambda t$$

annehmen müssen, wenn die Constanten passend bestimmt werden. Diese Werthe können unter jene Grössen so vertheilt werden, dass alle Constanten reell sind und x ein echter Bruch ist. Um das zu bewirken, gehe man von den Gleichungen

$$c_{11}u^2+c_{22}v^2+c_{55}r^2 = L,$$
$$c_{11}^2u^2+c_{22}^2v^2 = M$$

aus, in welche sich durch die jetzt eingeführten Annahmen die Gleichungen (18.) verwandeln, und welche Integrale der jetzt vorliegenden Differentialgleichungen sind. Bedenkt man, dass, wenn die genannte Absicht erreicht ist, $\cos^2\operatorname{am}$ und $\Delta^2\operatorname{am}$ abnehmen, wenn $\sin^2\operatorname{am}$ wächst, so folgt aus der zweiten von diesen Gleichungen, dass eine von den beiden Grössen u und v durch $\sin\operatorname{am}$ ausgedrückt werden muss, weil ihr zufolge u^2 und v^2 in entgegengesetztem Sinne sich gleichzeitig ändern. Aus den beiden Gleichungen ergiebt sich

$$(24.)\quad \begin{cases} c_{11}(c_{22}-c_{11})u^2+c_{22}c_{55}r^2 = \text{Const.} \\ \text{und} \\ c_{22}(c_{11}-c_{22})v^2+c_{11}c_{55}r^2 = \text{Const.} \end{cases}$$

Da nun c_{11}, c_{22}, c_{55} positive Grössen sind, so folgt aus derselben Eigenschaft der in Rede stehenden elliptischen Functionen, dass u durch $\sin\operatorname{am}$ ausgedrückt werden muss, wenn $c_{22} > c_{11}$, und v, wenn $c_{11} > c_{22}$ ist. Jeder dieser beiden Fälle theilt sich wieder in zwei.

Ist u durch $\sin am$ ausgedrückt, also $c_{22} > c_{11}$, so kann v durch $\cos am$ und r durch Δam auszudrücken sein oder umgekehrt. Maassgebend ist dabei, dass $\cos^2 am$ für gewisse Werthe des reellen Arguments verschwindet, $\Delta^2 am$ aber nicht. Bezeichnen v_1 und r_1 die Werthe, die v und r zu einer beliebig gewählten Zeit besitzen, so ist nach (24.)

$$-c_{22}(c_{22}-c_{11})v^2+c_{11}c_{55}r^2 = -c_{22}(c_{22}-c_{11})v_1^2+c_{11}c_{55}r_1^2.$$

Es kann hiernach v^2 verschwinden und r^2 kann nicht verschwinden, sobald der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung positiv ist; das Umgekehrte findet statt, sobald dieser Ausdruck negativ ist; im ersten Falle ist v, im zweiten r durch $\cos am$ auszudrücken.

Eine ähnliche Betrachtung ist auf den Fall, dass $c_{11} > c_{22}$ ist, anwendbar.

Es sollen für die vier Fälle, die hiernach zu unterscheiden sind, die Formeln angegeben werden, welche die Unbekannten des Problems in reeller Form als Functionen der Zeit darstellen. Dabei sollen durch u_0, v_0, r_0 die Werthe von u, v, w für $t=0$ bezeichnet werden. Eine von den Grössen u_0, v_0 ist dann Null, die andere und r_0 sind den Grössen m, n gleich, da, wenn das Argument verschwindet, $\sin am = 0$ und $\cos am = \Delta am = 1$ ist.

Fall 1.

Wenn $c_{22} > c_{11}$ und $c_{11}c_{55}r_1^2 > c_{22}(c_{22}-c_{11})v_1^2$, so ist

$$u = l \sin am\, \lambda t, \qquad c_{11} l = -\frac{c_{22} v_0 r_0}{\lambda},$$

$$v = v_0 \cos am\, \lambda t, \qquad c_{22} v_0 = -\frac{c_{11} l r_0}{\lambda},$$

$$r = r_0 \Delta am\, \lambda t, \qquad c_{55} r_0 = -\frac{(c_{22}-c_{11}) l v_0}{\lambda \varkappa^2},$$

$$\varkappa^2 = \frac{c_{22}(c_{22}-c_{11})v_0^2}{c_{11}c_{55}r_0^2},$$

$$\lambda = r_0,$$

$$l = -\frac{c_{22}}{c_{11}} v_0,$$

$$A = c_{22} v_0,$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2} - am\, \lambda t,$$

$$\beta = -\frac{c_{55} r_0}{c_{22} v_0} \Delta am\, \lambda t,$$

$$\alpha = \frac{v_0}{r_0}\left\{\left(1+\frac{c_{55} r_0^2}{c_{22} v_0^2}\right)\lambda t - \frac{c_{55} r_0^2}{c_{22} v_0^2} E(\lambda t)\right\},$$

wo

$$E(u) = \int_0^u \Delta^2 \operatorname{am} u \, du$$

und $\alpha = 0$ für $t = 0$ angenommen ist.

Fall 2.

Wenn $c_{22} > c_{11}$ und $c_{22}(c_{22} - c_{11}) v_1^2 > c_{11} c_{55} r_1^2$, so ist:

$$u = l \sin \operatorname{am} \lambda t, \qquad c_{11} l = -\frac{c_{22} v_0 r_0}{\lambda},$$

$$v = v_0 \Delta \operatorname{am} \lambda t, \qquad c_{22} v_0 = -\frac{c_{11} l r_0}{\lambda \varkappa^2},$$

$$r = r_0 \cos \operatorname{am} \lambda t, \qquad c_{55} r_0 = -\frac{(c_{22} - c_{11}) l v_0}{\lambda},$$

$$\varkappa^2 = \frac{c_{11} c_{55} r_0^2}{c_{22}(c_{22} - c_{11}) v_0^2},$$

$$\lambda = \frac{r_0}{\varkappa},$$

$$l = -\varkappa \frac{c_{22}}{c_{11}} v_0,$$

$$A = c_{22} v_0,$$

$$\cos\theta = -\varkappa \sin \operatorname{am} \lambda t, \qquad \sin\theta = -\Delta \operatorname{am} \lambda t,$$

$$\beta = -\frac{c_{55} r_0}{c_{22} v_0} \cos \operatorname{am} \lambda t,$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{c_{22} c_{55}}{c_{11}(c_{22} - c_{11})}} \left(\lambda t - \frac{c_{22} - c_{11}}{c_{22}} E(\lambda t) \right).$$

Fall 3.

Wenn $c_{11} > c_{22}$ und $c_{22} c_{55} r_1^2 > c_{11}(c_{11} - c_{22}) u_1^2$, so ist

$$u = u_0 \cos \operatorname{am} \lambda t, \qquad c_{11} u_0 = \frac{c_{22} l r_0}{\lambda},$$

$$v = l \sin \operatorname{am} \lambda t, \qquad c_{22} l = \frac{c_{11} u_0 r_0}{\lambda},$$

$$r = r_0 \Delta \operatorname{am} \lambda t, \qquad c_{55} r_0 = \frac{(c_{11} - c_{22}) u_0 l}{\lambda \varkappa^2},$$

$$\varkappa^2 = \frac{c_{11}(c_{11} - c_{22}) u_0^2}{c_{22} c_{55} r_0^2},$$

$$\lambda = r_0,$$

$$l = \frac{c_{11}}{c_{22}} u_0,$$
$$A = c_{11} u_0,$$
$$\theta = -\operatorname{am} \lambda t,$$
$$\beta = -\frac{c_{55} r_0}{c_{11} u_0} \Delta \operatorname{am} \lambda t,$$
$$\alpha = \frac{u_0}{r_0} \left\{ \left(1 + \frac{c_{55} r_0^2}{c_{11} u_0^2}\right) \lambda t - \frac{c_{55} r_0^2}{c_{11} u_0^2} E(\lambda t) \right\}.$$

Fall 4.

Wenn $c_{11} > c_{22}$ und $c_{11}(c_{11} - c_{22}) u_1^2 > c_{22} c_{55} r_1^2$, so ist

$$u = u_0 \Delta \operatorname{am} \lambda t, \qquad c_{11} u_0 = \frac{c_{22} l r_0}{\lambda \varkappa^2},$$
$$v = l \sin \operatorname{am} \lambda t, \qquad c_{22} l = \frac{c_{11} u_0 r_0}{\lambda},$$
$$r = r_0 \cos \operatorname{am} \lambda t, \qquad c_{55} r_0 = \frac{(c_{11} - c_{22}) u_0 l}{\lambda},$$
$$\varkappa^2 = \frac{c_{22} c_{55} r_0^2}{c_{11}(c_{11} - c_{22}) u_0^2},$$
$$\lambda = \frac{r_0}{\varkappa},$$
$$l = \varkappa \frac{c_{11} u_0}{c_{22}},$$
$$A = c_{11} u_0,$$
$$\cos \theta = \Delta \operatorname{am} \lambda t, \qquad \sin \theta = -\varkappa \sin \operatorname{am} \lambda t,$$
$$\beta = -\frac{c_{55} r_0}{c_{11} u_0} \cos \operatorname{am} \lambda t,$$
$$\alpha = \sqrt{\frac{c_{11} c_{55}}{c_{22}(c_{11} - c_{22})}} \left\{ \lambda t - \frac{c_{11} - c_{22}}{c_{11}} E(\lambda t) \right\}.$$

§. 9.

Noch ein zweiter specieller Fall des hier behandelten Problems möge erwähnt werden.

Die Differentialgleichungen, die aus (14.) durch die Substitution (15.) entstehen, und die oben nur theilweise angegeben sind, sind vollständig diese:

$$c_{11}\frac{du}{dt} = -c_{22}s\sigma\sin\psi,$$

$$c_{22}\frac{ds}{dt} = c_{11}u\sigma\sin\psi,$$

$$c_{55}\frac{d\sigma}{dt} = -(c_{11}-c_{22})us\sin\psi,$$

$$c_{22}\frac{d\varphi}{dt} = -c_{11}u\frac{\sigma}{s}\cos\psi+c_{22}p,$$

$$c_{22}c_{55}\frac{\partial\psi}{\partial t} = u\cos\psi\left(c_{11}c_{55}\frac{\sigma}{s}-c_{22}(c_{11}-c_{22})\frac{s}{\sigma}\right)-c_{22}c_{44}p.$$

Eine particuläre Lösung derselben erhält man, wenn man ψ gleich Null, ferner u, s, σ gleich Constanten, die der Gleichung

$$u\left(c_{11}c_{55}\frac{\sigma}{s}-c_{22}(c_{11}-c_{22})\frac{s}{\sigma}\right) = c_{22}c_{44}p$$

genügen, und

$$\varphi = \left(p-\frac{c_{11}u\sigma}{c_{22}s}\right)t$$

setzt. Man hat dann weiter:

$$A = \sqrt{c_{11}^2u^2+c_{22}^2s^2},$$

$$\cos\theta = \frac{c_{11}u}{A}, \qquad \sin\theta = -\frac{c_{22}s}{A},$$

$$\Phi = \frac{\pi}{2}+\varphi,$$

$$\Psi = -\frac{A\sigma}{c_{22}s}t,$$

$$\alpha = \frac{1}{A}(c_{11}u^2+c_{22}s^2)t,$$

$$\beta = \frac{1}{A^2}(c_{11}c_{55}u\sigma-c_{22}c_{44}sp)\cos\Psi,$$

$$\gamma = \frac{1}{A^2}(c_{11}c_{55}u\sigma-c_{22}c_{44}sp)\sin\Psi.$$

Aus diesen Ausdrücken von α, β, γ folgt, dass der Anfangspunkt der x, y, z mit gleichbleibender Geschwindigkeit eine Schraubenlinie durchläuft, deren Axe die ξ-Axe ist. Nennt man R den Radius der Cylinderfläche, auf der die Schraubenlinie liegt, so ist:

$$R = \pm\frac{1}{A^2}(c_{11}c_{55}u\sigma-c_{22}c_{44}sp)$$

oder wegen der Relation, die zwischen u, s, p, σ bestehen soll:

$$R = \pm \frac{1}{A^2} c_{22} (c_{11} - c_{22}) \frac{us^2}{\sigma} .$$

Die Geschwindigkeitscomponente des genannten Punktes senkrecht zur ξ-Axe ist daher

$$\pm \frac{1}{A} (c_{11} - c_{22}) us.$$

Bezeichnet man durch μ die Tangente des Winkels, den die Richtung eines Elementes der Schraubenlinie mit der Richtung der ξ-Axe bildet, so ist hiernach

$$\pm \mu = \frac{(c_{11} - c_{22}) us}{c_{11} u^2 + c_{22} s^2} .$$

Soll μ einen gegebenen Werth haben, so ist das Verhältniss $u:s$ aus dieser Gleichung zu bestimmen; dieselbe hat zwei reelle Wurzeln, sobald

$$\mu^2 < \frac{(c_{11} - c_{22})^2}{4 c_{11} c_{22}} .$$

Ist weiter der Radius R gegeben, so dient die für diesen aufgestellte Gleichung zur Bestimmung von $\sigma:s$. Die zwischen u, s, p, σ angenommene Relation lehrt dann $p:u$ kennen, so dass die Verhältnisse der genannten vier Grössen bestimmt sind. Diese können selbst berechnet werden, sobald noch die Geschwindigkeit, mit der die Schraubenlinie durchlaufen wird, gegeben ist. Man sieht, dass die Realität ihrer Werthe allein durch die Ungleichheit bedingt ist, die erfüllt sein muss, damit das Verhältniss $s:u$ reell ist.

Die in diesem Paragraphen angegebenen Resultate sind aus den Differentialgleichungen (14.) hergeleitet; sie lassen sich auch herleiten aus den Integralgleichungen, die im §. 6 entwickelt sind. Zu diesem Zwecke hat man *die* Relationen zwischen den Constanten der Integration aufzustellen, die erfüllt sein müssen, damit die Gleichung für u, die man erhält, wenn man den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in Gleichung (20.) gleich Null setzt, zwei gleiche Wurzeln hat, die dem Anfangswerthe von u gleich sind.

Heidelberg, im November 1869.

Ueber die Kräfte, welche zwei unendlich dünne, starre Ringe in einer Flüssigkeit scheinbar auf einander ausüben können.

(Von Herrn *G. Kirchhoff* in Heidelberg.)

Auf einen starren Körper, der in einer bewegten Flüssigkeit sich befindet, werden von dieser Druckkräfte ausgeübt, die im Allgemeinen sich nicht aufheben. Ist in der Nähe des Körpers ein zweiter vorhanden, so wird dieser von Einfluss auf die Bewegung der Flüssigkeit, also auch auf die Druckkräfte sein, die auf den ersten wirken. In einem Falle, in dem diese Druckkräfte sich aufheben, sobald der zweite Körper in die Unendlichkeit gerückt ist, sonst aber von Null verschiedene Resultanten haben, wird man sagen dürfen, dass der zweite Körper auf den ersten scheinbar Kräfte ausübt, die diesen Resultanten gleich sind. Ein solcher Fall findet statt, wenn die beiden Körper unendlich dünne Ringe sind und die Flüssigkeit die allgemeinste Bewegung hat, die sie haben kann, während sie in der Unendlichkeit ruht.

Genauer präcisirt sind die Voraussetzungen, welche hier zu Grunde gelegt werden sollen, diese: Die Flüssigkeit ist unzusammendrückbar und ohne Reibung; sie ist vollständig begrenzt durch die Oberflächen der beiden Ringe und eine im Unendlichen liegende, geschlossene, feste Fläche; auf ihre Theile wirken keine Kräfte; diese Theile rotiren nicht und haben Geschwindigkeiten, die sich überall stetig im Raume ändern. In Bezug auf die Gestalt der Ringe wird angenommen werden, dass ein jeder von ihnen eine Mittellinie hat, die eine beliebig gestaltete geschlossene Curve ist, und dass die auf dieser Mittellinie senkrechten Querschnitte Kreise von einem unendlich kleinen, constanten Radius sind, deren Mittelpunkte in der Mittellinie liegen.

Unter diesen Voraussetzungen wird bewiesen werden, dass die beiden Ringe scheinbar Kräfte auf einander ausüben, die denjenigen gleich sind, mit welchen sie aufeinander wirken würden, wenn zwei elektrische Ströme in ihnen flössen.

Bei den gemachten Festsetzungen giebt es für die Bewegung der Flüssigkeit ein Geschwindigkeitspotential; es möge dieses durch φ bezeichnet

werden, die Zeit durch t, die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes des zur Zeit t von der Flüssigkeit erfüllten Raumes durch x, y, z, der Druck durch p, die Dichtigkeit durch ϱ; dann sind

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

die Componenten der Geschwindigkeit zur Zeit t im Punkte x, y, z, und es ist

$$\frac{p}{\varrho} = -\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \tfrac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right).$$

Dabei ist φ eine in dem ganzen Gebiete seiner Argumente stetige, aber im Allgemeinen vielwerthige Function von x, y, z, t. Sind φ' und φ'' zwei Werthe von φ für dieselben Werthe von x, y, z, t und ist

$$\varphi' - \varphi'' = \varkappa,$$

so ist $\varkappa$ unabhängig von x, y, z, da die Geschwindigkeiten einwerthig sein müssen, und auch unabhängig von t, da der Druck einwerthig sein muss; es ist $\varkappa$ also eine Constante.

Dass φ mehrwerthig sein kann, ist eine Folge davon, dass der von der Flüssigkeit erfüllte Raum ein mehrfach, und zwar dreifach, zusammenhängender ist. Man denke sich diesen Raum in einen einfach zusammenhängenden durch zwei Querschnitte verwandelt; als solche mögen zwei Flächen genommen werden, von denen die erste vollständig begrenzt wird durch eine Linie, die auf der Oberfläche des ersten Ringes der Mittellinie dieses parallel verläuft, die zweite durch eine Linie, die in gleicher Weise auf der Oberfläche des zweiten Ringes gezogen ist. Dazu, dass es solche Flächen giebt, wird erfordert, dass die Ringe sich nicht gegenseitig umschlingen. Der Fall, dass dieses geschieht, soll von der Betrachtung ausgeschlossen werden, obwohl auch in ihm, wie sich leicht erweisen lässt, der zu beweisende Satz seine Gültigkeit behält. In dem, auf die angegebene Weise gebildeten, einfach zusammenhängenden Raume ist φ einwerthig, hat aber auf beiden Seiten eines jeden Querschnitts im Allgemeinen verschiedene Werthe. Für den ersten Querschnitt sei die Differenz dieser Werthe $\varkappa_1$, für den zweiten $\varkappa_2$, wobei dann nach der vorher gemachten Bemerkung $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ Constanten sind.

Die Bedingungen, denen die Function φ nun zu genügen hat, sind diese:

1) In dem ganzen Gebiete von x, y, z ist

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0,$$

oder, wie hierfür gesetzt werden soll,

$$\Delta\varphi = 0.$$

2) Bei dem Durchgange durch den ersten Querschnitt ändert sich φ sprungweise um $\varkappa_1$, bei dem Durchgange durch den zweiten um $\varkappa_2$.

3) Bedeutet N die nach dem Innern der Flüssigkeit gerichtete Normale eines Elementes der Grenzflächen derselben, so ist für alle Punkte der Oberfläche eines jeden Ringes $\frac{\partial\varphi}{\partial N}$ gleich der Componente der Geschwindigkeit des anliegenden Theiles des Ringes nach der Richtung von N.

4) Für die Punkte der im Unendlichen liegenden Grenzfläche der Flüssigkeit ist $\frac{\partial\varphi}{\partial N} = 0$.

Diese Bedingungen bestimmen die Function φ vollständig bis auf eine additive von x, y, z unabhängige Grösse, sobald die Lagen und Geschwindigkeiten der beiden Ringe und die Werthe der beiden Constanten $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ gegeben sind. Es folgt das durch eine bekannte Schlussweise aus der bekannten Gleichung

$$\iiint dx\,dy\,dz\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right) = -\iint dS\,\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial N},$$

in der dS ein Element der Grenze des Gebietes von x, y, z bedeutet, wenn man erwägt, dass *der* Theil des hier vorkommenden Doppelintegrals, der sich auf die beiden Seiten eines der beiden Querschnitte bezieht,

$$= \varkappa\iint dS\,\frac{\partial\varphi}{\partial N}$$

ist, wo dem $\varkappa$ der Index 1 oder 2 zu geben und die Integration nur über die *eine* Seite des Querschnitts auszudehnen ist.

Um einen Ausdruck zu finden, der den für φ aufgestellten Bedingungen genügt, bezeichne man mit U_1 und U_2 die Potentiale zweier elektrischen Ströme, die die Mittellinien der beiden Ringe mit den Intensitäten $\frac{\varkappa_1}{4\pi}$ und $\frac{\varkappa_2}{4\pi}$ durchfliessen, in Bezug auf einen Magnetpol, der sich im Punkte x, y, z befindet und eine Menge magnetischer Flüssigkeit, die der Einheit gleich ist, enthält. Es sind dann bekanntlich U_1 und U_2 die scheinbaren Grössen zweier von den Mittellinien der beiden Ringe begrenzten Flächen von dem Punkte x, y, z aus gesehen, multiplicirt mit $\frac{\varkappa_1}{4\pi}$ und $\frac{\varkappa_2}{4\pi}$. Setzte man $\varphi = U_1+U_2$, so würde man den Bedingungen 1) und 2) genügen. Man mache nun

$$\varphi = U_1+U_2+\psi,$$

so ist ψ eine in dem ganzen von der Flüssigkeit erfüllten Raume einwerthige und stetige Function, die der Differentialgleichung $\Delta\psi = 0$ genügt, also als ein Potential von Massen angesehen werden kann, die theils auf den Ringoberflächen theils auf der äusseren Grenzfläche der Flüssigkeit angeordnet sind. Um die Bedingung auszusprechen, die ψ an den Ringoberflächen zu erfüllen hat, drücke man die Lage eines Punktes, der unendlich nahe an der Oberfläche eines der Ringe liegt, durch drei Coordinaten aus, die s, r, ϑ genannt werden und folgendermassen definirt sein sollen. Durch den Punkt lege man eine Ebene senkrecht zur Mittellinie des Ringes; s sei der Bogen dieser Linie zwischen ihrem Schnittpunkt mit der genannten Ebene und einem festen Punkte; r der Abstand desselben Schnittpunktes von dem fraglichen Punkte und ϑ der Winkel, den die Linie r bildet mit der in der Schmiegungsebene von ds liegenden Normale dieses Elementes. Ist A die Componente der Geschwindigkeit des Punktes der Mittellinie, der durch den Werth von s bestimmt ist, senkrecht zu ds, und bildet die Richtung dieser Componente mit der Linie, von der aus der Winkel ϑ gezählt wird, den Winkel α, so soll der Bedingung 3) zufolge für die Oberfläche des Ringes

$$\frac{\partial\varphi}{\partial N} = A.\cos(\vartheta-\alpha)$$

sein. Für die Oberfläche des ersten Ringes ist $\frac{\partial U_1}{\partial N} = 0$, für die des zweiten $\frac{\partial U_2}{\partial N} = 0$; da ferner $\frac{\partial U_1}{\partial x}$, $\frac{\partial U_1}{\partial y}$, $\frac{\partial U_1}{\partial z}$ für die Punkte in der Nähe des zweiten Ringes und $\frac{\partial U_2}{\partial x}$, $\frac{\partial U_2}{\partial y}$, $\frac{\partial U_2}{\partial z}$ für die Punkte in der Nähe des ersten endliche Werthe haben, so ist für beide Oberflächen

$$\frac{\partial(U_1+U_2)}{\partial N} = B\cos(\vartheta-\beta),$$

wo B und β, ebenso wie A und α von s abhängen und endlich sind. Für ψ ergiebt sich hieraus die Bedingung, dass für die Oberfläche eines jeden Ringes

$$\frac{\partial\psi}{\partial N} = A\cos(\vartheta-\alpha) - B\cos(\vartheta-\beta),$$

d. h.

$$= C.\cos(\vartheta-\gamma)$$

ist, wo C endliche Werthe besitzt. An der im Unendlichen liegenden Grenzfläche der Flüssigkeit muss nach der Bedingung (4.):

$$\frac{\partial\psi}{\partial N} = -\frac{\partial(U_1+U_2)}{\partial N}$$

sein.

Um hiernach ψ zu bestimmen, setze man

$$\psi = V + W,$$

indem man unter V ein Potential von Massen versteht, die auf den Ringoberflächen liegen, unter W ein Potential von Massen, die auf der äusseren Grenzfläche der Flüssigkeit sich befinden. Für die Punkte dieser Grenzfläche ist

$$\frac{\partial W}{\partial N} = -\frac{\partial (V + U_1 + U_2)}{\partial N};$$

bezeichnet man mit dS ein Element derselben Fläche, so muss

$$\int dS \frac{\partial W}{\partial N} = 0$$

sein; es ist aber

$$\int dS \frac{\partial (U_1 + U_2)}{\partial N} = 0,$$

da nach einem bekannten, von *Ampère* aufgestellten Satze U_1 und U_2 sich als Potentiale von Massen, deren Summe gleich Null ist, darstellen lassen; es ist also auch

$$\int dS \frac{\partial V}{\partial N} = 0,$$

d. h. es ist auch V ein Potential von Massen, deren Summe gleich Null ist. Bezeichnet L eine unendlich grosse Länge von der Ordnung der Dimensionen der Grenzfläche, so ist an dieser hiernach

$$\frac{\partial W}{\partial N} = \frac{a}{L^3},$$

wo a eine endliche Grösse bedeutet. Von der Grenzfläche soll vorausgesetzt werden, dass, wenn man in ihrer Gleichung

$$x = L\xi, \quad y = L\eta, \quad z = L\zeta$$

macht, eine Gleichung zwischen ξ, η, ζ entsteht, deren sämmtliche Constanten endlich sind; unter dieser Voraussetzung sind die Differentialquotienten von W nach x, y, z in dem ganzen Gebiete von x, y, z, also auch im Endlichen von derselben oder einer niederen Ordnung als $\frac{\partial W}{\partial N}$ an der Grenzfläche; wie man sieht, wenn man in die Gleichungen, aus denen W zu bestimmen ist, ξ, η, ζ an Stelle von x, y, z einführt. In der Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial N} = -\frac{\partial W}{\partial N} + C\cos(\vartheta - \gamma),$$

die an den Ringoberflächen zu erfüllen ist, ist daher $\frac{\partial W}{\partial N}$ unendlich klein und

man kann bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen zur Bestimmung von V die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial N} = C\cos(\vartheta - \gamma)$$

benutzen. Verfügt man über die in W enthaltene willkürliche additive Constante in passender Weise, so ist ferner W überall unendlich klein, und man kann daher

$$\psi = V$$

und

$$\varphi = U_1 + U_2 + V$$

setzen.

Um das Potential V zu finden, soll zunächst das Potential einer Masse, die auf einer geschlossenen Linie angeordnet ist, in Bezug auf einen Punkt, der dieser unendlich nahe liegt, untersucht werden. Es sei ϱ der kürzeste Abstand des Punktes von der Linie, s der Bogen der Linie zwischen dem einen Endpunkte von ϱ und einem festen Punkte, ϑ der Winkel zwischen der Richtung von ϱ und der in der Schmiegungsebene liegenden Normale von ds. Man führe ein rechtwinkliges Coordinatensystem ein, dessen Anfangspunkt der durch den Werth von s bestimmte Punkt der mit Masse belegten Linie, dessen x-Axe die Tangente, dessen y-Axe die in der Schmiegungsebene liegende Normale von ds ist, und nenne x, y, z die Coordinaten des Punktes, zu dem man kommt, wenn man $s+\sigma$ aus s werden lässt. $Md\sigma$ bezeichne die Masse, die auf dem Elemente $d\sigma$ sich befindet. Es soll angenommen werden, dass die Gestalt der Linie und die Vertheilung der Masse keine Unstetigkeiten darbietet, der Art, dass für hinreichend kleine Werthe von σ

$$\begin{aligned} M &= m + n\sigma \\ x &= \sigma + a\sigma^2, \\ y &= b\sigma^2, \\ z &= c\sigma^2 \end{aligned}$$

ist, wo m eine endliche Constante, n, a, b, c endliche Grössen bedeuten. Man bezeichne ferner durch l eine Länge, die unendlich klein, aber gegen ϱ unendlich gross ist, und durch P_l das Potential der Linie mit Ausschluss des Theiles, der von $\sigma = -l$ bis $\sigma = l$ reicht; heisst P das gesuchte ganze Potential, so ist dann:

$$P = \int_{-l}^{+l} \frac{(m + n\sigma)\, d\sigma}{\sqrt{(\sigma + a\sigma^2)^2 + (\varrho\cos\vartheta - b\sigma^2)^2 + (\varrho\sin\vartheta - c\sigma^2)^2}} + P_l.$$

Man sieht zunächst, dass bei Vernachlässigung einer unendlich kleinen Grösse in diesem Integrale $n=0$ gesetzt werden kann; denn der Factor von $n\,d\sigma$ unter dem Integralzeichen kann nur unendlich wenig grösser als 1 sein, giebt also, mit $d\sigma$ multiplicirt und zwischen den unendlich nahen Grenzen $-l$ und l integrirt, etwas unendlich Kleines. Die reciproke Wurzelgrösse, die unter dem Integralzeichen vorkommt, lässt sich ferner schreiben:

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\varrho^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{2a\sigma^3-2\varrho\sigma^2(b\cos\vartheta+c\sin\vartheta)+(a^2+b^2+c^2)\sigma^4}{\sigma^2+\varrho^2}}}$$

oder, da die unter dem zweiten Wurzelzeichen zu 1 addirte Grösse unendlich klein ist:

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\varrho^2}}-\tfrac{1}{2}(1+\varepsilon)\frac{2a\sigma^3-2\varrho\sigma^2(b\cos\vartheta+c\sin\vartheta)+(a^2+b^2+c^2)\sigma^4}{(\sigma^2+\varrho^2)^{\frac{3}{2}}},$$

wo ε eine unendlich kleine Grösse bedeutet. Das zweite von diesen beiden Gliedern kann eine gewisse endliche Grenze nicht überschreiten und giebt daher, mit $d\sigma$ multiplicirt und zwischen $\sigma=-l$ und $\sigma=l$ integrirt, etwas unendlich Kleines. Daraus folgt dann, dass bei Vernachlässigung einer unendlich kleinen Grösse

$$P = m\int_{-l}^{l}\frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma^2+\varrho^2}}+P_l,$$

d. h.

$$= m\lg\frac{\sqrt{l^2+\varrho^2}+l}{\sqrt{l^2+\varrho^2}-l}+P_l$$

oder auch

$$= -2m\lg\frac{\varrho}{l}+P_l$$

ist. Da P von l unabhängig sein muss, so muss es auch $2m\lg l+P_l$ sein; bezeichnet man diese Summe durch p, so hat man also

$$P = -2m\lg\varrho+p,$$

wo p bis auf unendlich kleine Grössen von ϱ unabhängig und endlich ist.

Aus der Gleichung

$$\varrho\frac{\partial P}{\partial\varrho}=\int_{-l}^{l}\frac{\varrho(\varrho-\sigma^2(b\cos\vartheta+c\sin\vartheta))(m+n\sigma)\,d\sigma}{((\sigma+a\sigma^2)^2+(\varrho\cos\vartheta-b\sigma^2)^2+(\varrho\sin\vartheta-c\sigma^2)^2)^{\frac{3}{2}}}+\varrho\frac{\partial P_l}{\partial\varrho}$$

kann man durch Betrachtungen derselben Art beweisen, dass bis auf eine unendlich kleine Grösse

$$\varrho\frac{\partial P}{\partial\varrho} = -2m$$

ist.

Es ist von selbst klar, dass diese Resultate auch gelten, wenn die mit Masse belegte Linie aus zwei oder mehr getrennten geschlossenen Linien besteht.

Nun kehre man zur Betrachtung der beiden Ringe zurück. Die Werthe der Grössen s, r, ϑ, welche auf die oben angegebene Weise die Lage eines Punktes in der Nähe ihrer Oberflächen bestimmen, bezeichne man für Punkte der Oberflächen selbst durch s, r', ϑ', wo dann also r' den Radius ihrer Querschnitte bedeutet. Die Oberflächen denke man sich mit Masse der Art bedeckt, dass auf das Flächenelement $ds\,r'\,d\vartheta'$ die Masse $\mu\,ds\,d\vartheta'$ kommt, und nehme μ als eine endliche und stetige Function von s und ϑ' an. Das Potential dieser Massenvertheilung nenne man Ω; es ist dann

$$\Omega = \int_0^{2\pi} P\,d\vartheta',$$

wenn $P\,d\vartheta'$ das Potential des Streifens, welcher dem Elemente $d\vartheta'$ entspricht, bedeutet. Für Punkte, die unendlich nahe an einer Ringoberfläche liegen, hängt P in der vorher erörterten Weise von ϱ ab, wenn

$$\varrho = \sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r\cos(\vartheta' - \vartheta)}$$

gesetzt wird; es ist

$$\Omega = -2\int_0^{2\pi} \mu \lg\sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r\cos(\vartheta' - \vartheta)}\,d\vartheta' + \omega,$$

wo

$$\omega = \int_0^{2\pi} p\,d\vartheta'.$$

Man setze nun, was erlaubt ist:

$$\mu = \mu_0 + \mu_1\cos(\vartheta' - \delta_1) + \mu_2\cos 2(\vartheta' - \delta_2) + \cdots,$$

$$\lg\sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r\cos(\vartheta' - \vartheta)} = \lg r - \frac{r'}{r}\cos(\vartheta' - \vartheta) - \tfrac{1}{2}\frac{r'^2}{r^2}\cos 2(\vartheta' - \vartheta) - \cdots;$$

es ergiebt sich dann:

$$\Omega = \omega - 4\pi\mu_0\lg r + 2\pi\mu_1\frac{r'}{r}\cos(\vartheta - \delta_1) + \frac{2\pi}{2}\mu_2\frac{r'^2}{r^2}\cos 2(\vartheta - \delta_2) + \cdots$$

Was den Werth von ω anbetrifft, so ist dieser von μ_1, μ_2, ... unabhängig und verschwindet, sobald μ_0 für alle Werthe von s verschwindet; es folgt das daraus, dass p unendlich wenig sich ändert, wenn die Linie, auf welche diese Grösse sich bezieht, in ihrer Gestalt und Lage unendlich wenig geändert wird, und dass daher bei der Berechnung von ω die Massen, die in den Ringoberflächen liegen, in den Mittellinien concentrirt gedacht werden können.

Man hat weiter:

$$r\frac{\partial\Omega}{\partial r} = \int_0^{2\pi} \varrho\frac{\partial P}{\partial\varrho}\frac{r(r-r'\cos(\vartheta'-\vartheta))}{\varrho^2}d\vartheta';$$

bei Vernachlässigung einer unendlich kleinen Grösse aber ist

$$\varrho\frac{\partial P}{\partial\varrho} = -2\mu;$$

unter der Voraussetzung, dass $\frac{r'}{r}$ um etwas Endliches kleiner als 1 ist, ist ferner

$$\frac{r(r-r'\cos(\vartheta'-\vartheta))}{\varrho^2}$$

endlich, und daher unter derselben Voraussetzung:

$$r\frac{\partial\Omega}{\partial r} = -2\int_0^{2\pi}\mu\frac{r(r-r'\cos(\vartheta-\vartheta'))}{\varrho^2}d\vartheta'$$

oder, da

$$\frac{r(r-r'\cos(\vartheta'-\vartheta))}{\varrho^2} = 1+\frac{r'}{r}\cos(\vartheta'-\vartheta)+\frac{r'^2}{r^2}\cos 2(\vartheta'-\vartheta)+\cdots.$$

$$r\frac{\partial\Omega}{\partial r} = -4\pi\mu_0-2\pi\mu_1\frac{r'}{r}\cos(\vartheta-\delta_1)-2\pi\mu_2\frac{r'^2}{r^2}\cos 2(\vartheta-\delta_2)-\cdots.$$

Ist der Werth gegeben, dem $r\frac{\partial\Omega}{\partial r}$ sich nähert, wenn r dem r' sich nähert, so bestimmt diese Gleichung die Grössen μ und δ, und aus diesen lässt sich dann Ω berechnen.

Für das Potential V sollte nun für $r=r'$

$$r\frac{\partial V}{\partial r} = r'C.\cos(\vartheta-\gamma)$$

sein; es ist daher für unendlich kleine Werthe von r

$$V = -\frac{r'^2C}{r}\cos(\vartheta-\gamma),$$

und in endlicher Entfernung von den Ringen ist $V=0$.

Berücksichtigt man, dass C eine endliche Grösse ist, so folgt hieraus, dass V überall in der Flüssigkeit und die Differentialquotienten von V in endlicher Entfernung von den Ringen unendlich klein sind.

Der für φ gefundene Werth soll nun benutzt werden, um die lebendige Kraft der Flüssigkeit, die T genannt werden möge, zu berechnen. Es ist

$$T = \frac{\varrho}{2}\iiint dx\,dy\,dz\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)$$

oder

$$= -\frac{\varrho}{2}\int dS\,\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial N},$$

d. h.

$$= -\frac{\varrho}{2}\int dS\, U_1 \frac{\partial U_1}{\partial N} - \frac{\varrho}{2}\int dS\, U_2 \frac{\partial U_2}{\partial N} - \frac{\varrho}{2}\int dS\, V \frac{\partial V}{\partial N}$$
$$-\varrho\int dS\, U_1 \frac{\partial U_2}{\partial N} - \varrho\int dS\, U_1 \frac{\partial V}{\partial N} - \varrho\int dS\, U_2 \frac{\partial V}{\partial N},$$

wo die Integrationen nach dS über die Oberflächen der beiden Ringe und die beiden Seiten der Querschnitte auszudehnen sind, durch welche der von der Flüssigkeit erfüllte Raum zu einem einfach zusammenhängenden gemacht ist. Die beiden ersten dieser sechs Integrale sind unabhängig von der Lage und der Bewegung der beiden Ringe; ihre Summe bezeichne man durch K; das dritte, das fünfte und das sechste sind unendlich klein, da $\frac{\partial V}{\partial N}$ nur auf unendlich kleinen Theilen der Flächen, über die zu integriren ist, endlich, sonst unendlich klein ist, da V überall unendlich klein ist und U_1 und U_2 überall endlich sind. Mithin ist

$$T = K - \varrho\int dS\, U_1 \frac{\partial U_2}{\partial N}.$$

Ueber die Oberflächen der beiden Ringe genommen, ist das allein übrig gebliebene Integral auch unendlich klein, da $\frac{\partial U_2}{\partial N}$ an der Oberfläche des ersten Ringes endlich, an der des zweiten gleich Null ist; über die beiden Seiten des zweiten Querschnittes ausgedehnt, ist dasselbe Integral gleich Null, denn hier hat $\frac{\partial U_2}{\partial N}$ entgegengesetzte und U_1 gleiche Werthe. Es braucht also die Integration nur über den ersten Querschnitt ausgedehnt zu werden. Bezeichnet man durch dS_1 ein Element desselben und durch N_1 die eine Normale dieses, so ist hiernach, da $\frac{\partial U_2}{\partial N}$ auf beiden Seiten von dS_1 entgegengesetzte Werthe und U_1 Werthe hat, die um $\varkappa_1$ verschieden sind,

$$T = K - \varrho\varkappa_1\int dS_1 \frac{\partial U_2}{\partial N_1}.$$

Da die Grenzlinie des Querschnitts von der Mittellinie des Ringes nur unendlich wenig absteht, so kann man hier dS_1 auch definiren als ein Element einer durch die Mittellinie des ersten Ringes begrenzten Fläche. Nach dem *Ampère*schen Satze, auf welchen oben bereits hingewiesen wurde, ist das in der angegebenen Weise genommene Integral aber nichts Anderes, als das Potential zweier elektrischen Ströme, die die Mittellinien der beiden Ringe durchfliessen, in Bezug auf einander. Sind ds_1 und ds_2 zwei Elemente dieser Mittellinien, r ihre Entfernung, (ds_1, ds_2) der Winkel, den ihre Richtungen mit

einander bilden, so ist das Potential zweier Ströme, die mit der Intensität 1 die Mittellinien durchfliessen, in Bezug auf einander

$$= \iint \frac{ds_1\, ds_2}{r} \cos(ds_1, ds_2)$$

und

$$T = K - \frac{\varkappa_1 \varkappa_2 \varrho}{4\pi} \iint \frac{ds_1\, ds_2}{r} \cos(ds_1, ds_2).$$

Hieraus folgt nun unmittelbar der im Eingange ausgesprochene Satz. Denkt man sich nämlich die Ringe durch Kräfte, die man auf sie wirken lässt, irgend wie bewegt, und bezeichnet durch δT den Zuwachs, den dabei T in einem Zeitelement erfährt, so ist δT gleich dem Moment der Druckkräfte, welche die Ringe auf die Flüssigkeit ausüben, für die in dem Zeitelement geschehene Verrückung, und also $-\delta T$ das entsprechende Moment der Druckkräfte, welche umgekehrt die Flüssigkeit auf die Ringe ausübt. Nach dem für T gefundenen Ausdrucke ist dieses Moment so gross, als das der Kräfte, mit welchen zwei elektrische Ströme auf einander wirken, die die Mittellinien der Ringe mit den Intensitäten $\varkappa_1 \sqrt{\frac{\varrho}{4\pi}}$ und $\varkappa_2 \sqrt{\frac{\varrho}{4\pi}}$ durchfliessen, für dieselbe Verrückung: d. h. die Ringe üben scheinbar dieselben Kräfte auf einander aus, als diese elektrischen Ströme oder auch als *die* elektrischen Ströme, die mit den genannten Intensitäten die Ringe selbst durchfliessen.

Bei dem Beweise dieses Satzes ist, um die Darstellung zu erleichtern, vorausgesetzt, dass die Querschnitte der Ringe Kreise von demselben Radius sind; der Satz gilt aber auch, wenn diese Querschnitte von anderer Gestalt sind, sobald sie nur unendlich kleine Dimensionen haben.

Heidelberg, im Dezember 1869.

Entwickelung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von n Differentialen.

(Erste Mittheilung.)

(Von Herrn *R. Lipschitz* in Bonn.)

Herr *Kronecker* hat an den von ihm gegründeten Begriff der Characteristik eines Functionensystems eine Ausdehnung der Theorie der Krümmung von Flächen auf Functionen mehrerer Variabeln angeschlossen. Die betreffenden Resultate, welche in dem Monatsbericht der Berliner Akademie vom August 1869 mitgetheilt sind, stehen in einer gewissen Verwandtschaft mit den Ergebnissen einer Arbeit über die ganzen homogenen Functionen von n Differentialen, die ich ausgeführt habe, ehe ich zu derjenigen Auffassung dieses Gegenstandes kam, welche in der bezüglichen publicirten Abhandlung *) festgehalten ist. Bei der Bemühung, das Wesen des *Gauss*ischen Krümmungsmasses tiefer zu ergründen, bin ich von der Bemerkung ausgegangen, dass, wenn ein materieller Punkt ohne die Einwirkung beschleunigender Kräfte auf einer bestimmten Fläche sich zu bewegen gezwungen ist, der an jedem Punkte der Bahncurve stattfindende Druck dem Krümmungshalbmesser der Bahncurve umgekehrt proportional ist. Mithin kann der Druck zur Definition des Krümmungshalbmessers dienen. Auf diese Analogie gestützt, studirte ich das folgende isoperimetrische Problem.

Es sei $f(dx) = \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, dx_{\mathfrak{a}}\, dx_{\mathfrak{b}}$ eine quadratische Form der Differentiale $dx_{\mathfrak{a}}$, deren Coefficienten von den Variabeln $x_{\mathfrak{a}}$ in irgend einer Weise abhängen, und es seien y_α beliebige von einander unabhängige Functionen der Variabeln $x_{\mathfrak{a}}$. Die Zeiger $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... sollen sich immer auf die Zahlen von 1 bis n, die Zeiger α, β, γ, ... auf die Zahlen von 1 bis l erstrecken, während die Zahl l kleiner ist als die Zahl n. Die Form $f(dx)$ sei wesentlich positiv, die Determinante derselben $|a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}| = \Delta$ nicht verschwindend. Man verlangt nun, die Variabeln $x_{\mathfrak{a}}$ in solcher Art als Functionen einer independenten

---

*) Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen. Journal f. Mathematik Bd. 70.

Variable t zu bestimmen, dass die erste Variation des zwischen festen Grenzen genommenen Integrals

$$(1.) \qquad \int f(x')\,dt,$$

unter Voraussetzung der l Gleichungen

$$(2.) \qquad y_\alpha = \text{const.}$$

gleich Null wird. Die Function $f(x')$ ist aus $f(dx)$ entstanden, indem man dx_a durch $\frac{dx_a}{dt} = x_a'$ ersetzt hat.

Bezeichnet man mit δ die Characteristik der Variation, mit λ_α l unbestimmte Grössen und bildet die Gleichung

$$(3.) \qquad \delta f(x') + \sum_\alpha \lambda_\alpha \delta y_\alpha = \sum_a \left(\frac{\partial f(x')}{\partial x_a} - \frac{d\frac{\partial f(x')}{\partial x_a'}}{dt} \right) \delta x_a + \frac{d\sum_a \frac{\partial f(x')}{\partial x_a'} \delta x_a}{dt} + \sum_a \lambda_\alpha \delta y_\alpha,$$

so hängt bekanntlich die Lösung des isoperimetrischen Problems davon ab, zu bewirken, dass der Ausdruck

$$(4.) \qquad \sum_a \left(\frac{\partial f(x')}{\partial x_a} - \frac{d\frac{\partial f(x')}{\partial x_a}}{dt} \right) \delta x_a + \sum_\alpha \lambda_\alpha \delta y_\alpha,$$

unabhängig von den n Differentialen δx_a, mit Berücksichtigung der Gleichungen (2.), gleich Null werde. Die Betrachtung der Gleichung (3.) lehrt aber auch, dass, wenn in der Form $f(dx)$ wie in den Functionen y_α das System der Variabeln x_a durch ein beliebiges System von neuen independenten Variabeln ersetzt wird, der Ausdruck (4.) in den correspondirenden, mittelst der neuen Variabeln gebildeten Ausdruck übergeht. Das isoperimetrische Problem bleibt ebenfalls ungeändert, wenn man statt der l Gleichungen (2.) l neue Gleichungen

$$(2^*.) \qquad \overline{y}_\alpha = \text{const.}$$

einführt, in denen die $\overline{y}_\alpha$ l independente Functionen der y_β sind. Alsdann geht in dem Ausdruck (4.) der Bestandtheil $\sum_\alpha \lambda_\alpha \delta y_\alpha$ in einen Bestandtheil $\sum_\alpha \overline{\lambda}_\alpha \overline{\delta y}_\alpha$ über, und der Ausdruck (4.) bleibt unter der Bedingung ungeändert, dass die Grössen λ_α und $\overline{\lambda}_\alpha$, unabhängig von den Differentialen δy_α, die Gleichung

$$(5.) \qquad \sum_\alpha \lambda_\alpha \delta y_\alpha = \sum_\alpha \overline{\lambda}_\alpha \overline{\delta y}_\alpha$$

befriedigen. Vermöge dieser Erwägungen kann man sich die Aufgabe stellen, aus dem Ausdrucke (4.) solche Grössenverbindungen abzuleiten, die bei einer

beliebigen Transformation der Form $f(dx)$ und bei der Ersetzung des Functionensystems y_α durch ein independentes System von Functionen dieser Functionen invariant bleiben. Diese Aufgabe wird im Folgenden gelöst werden.

1.

Das in Rede stehende isoperimetrische Problem fällt zusammen mit dem Problem der Bewegung eines Systems materieller Punkte, das unter dem Einflusse gewisser Bedingungen, jedoch keiner beschleunigenden Kräfte steht, wofern die Form $f(dx)$ gleich dem Aggregat der Quadrate von n Differentialen ist, oder doch in ein solches Aggregat transformirt werden kann. Nun besteht der erste Schritt des gegenwärtig zurückzulegenden Weges darin, dass die Grössen λ_α vermittelst der Differentialgleichungen des isoperimetrischen Problems als Functionen der Grössen $x'_\mathfrak{a}$ dargestellt werden. Man kann daher das Verfahren, welches *Jacobi* für den entsprechenden Zweck bei dem mechanischen Problem in der *theoria novi multiplicatoris* etc. §. 22 ausgeführt hat, unmittelbar übertragen. Es sei

$$(6.)\quad \begin{cases} \sum_\mathfrak{a}\left(\dfrac{\partial f(x')}{\partial x_\mathfrak{a}} - \dfrac{d\dfrac{\partial f(x')}{\partial x'_\mathfrak{a}}}{dt}\right)\delta x_\mathfrak{a} = -\sum_\mathfrak{a}\left(f_\mathfrak{a}(x') + \sum_\mathfrak{b} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} x''_\mathfrak{b}\right)\delta x_\mathfrak{a}, \\ f_\mathfrak{a}(x') = \tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}} f_{\mathfrak{a},\mathfrak{g},\mathfrak{h}} x'_\mathfrak{g} x'_\mathfrak{h}, \\ \dfrac{\partial \Delta}{\partial a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}} = A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}, \end{cases}$$

so liefern die n isoperimetrischen Differentialgleichungen

$$(7.)\qquad \sum_\mathfrak{b} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} x''_\mathfrak{b} + f_\mathfrak{a}(x') = \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\mathfrak{a}}$$

die Bestimmungen

$$(8.)\qquad x''_\mathfrak{b} = -\sum_\mathfrak{a} \frac{A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{\Delta}\left(f_\mathfrak{a}(x') - \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\mathfrak{a}}\right).$$

Aus den l Gleichungen (2.) ergeben sich die folgenden

$$(9.)\qquad \frac{dy_\beta}{dt} = \sum_\mathfrak{b} \frac{\partial y_\beta}{\partial x_\mathfrak{b}} x'_\mathfrak{b} = 0,$$

$$(10.)\qquad \frac{d^2 y_\beta}{dt^2} = \sum_\mathfrak{b} \frac{\partial y_\beta}{\partial x_\mathfrak{b}} x''_\mathfrak{b} + \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{\partial^2 y_\beta}{\partial x_\mathfrak{a}\partial x_\mathfrak{b}} x'_\mathfrak{a} x'_\mathfrak{b} = 0,$$

und die Substitution der Werthe der $x''_\mathfrak{b}$ aus (8.) in (10.) bringt das System von Gleichungen hervor

$$(11.)\qquad \sum_\alpha (\alpha, \beta)\lambda_\alpha + \eta_\beta = 0,$$

wo der Kürze halber

$$(12.)\quad \sum_{a,b}\frac{A_{a,b}}{\Delta}\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_a}\frac{\partial y_\beta}{\partial x_b}=(\alpha,\beta),\quad -\sum_{a,b}\frac{A_{a,b}}{\Delta}f_a(x')\frac{\partial y_\beta}{\partial x_b}+\sum_{a,b}\frac{\partial^2 y_\beta}{\partial x_a\partial x_b}x_a'x_b'=\eta_\beta$$

gesetzt ist.

Der wesentlich positive Character der Form $f(dx)$ giebt die Sicherheit, dass die Determinante $|(\alpha,\beta)|$ nicht verschwindet. Die Auflösung des Systems (11.) nach den λ_α möge daher durch die folgende Bezeichnung angedeutet werden

$$(13.)\quad \lambda_\alpha+\sum_\beta[\alpha,\beta]\eta_\beta=0.$$

Man legt nun den Grössen δy_α beliebige, aber festzuhaltende Werthe bei, und substituirt die so eben bestimmten Werthe der λ_α in den Ausdruck

$$(14.)\quad \sum_\alpha\lambda_\alpha\delta y_\alpha=2\lambda(x')=\sum_{a,b}\lambda_{a,b}x_a'x_b',$$

der eine quadratische Form der Grössen x_a' ist. Diese Grössen sind beschränkt durch die l linearen Gleichungen (9.) und durch das bekannte Integral des Systems von Differentialgleichungen (7.) $f(x')=\text{const.}$, welchem die specielle Gestalt

$$(15.)\quad 2f(x')=1$$

gegeben werden soll. Man bildet jetzt ein neues Problem *de maximis et minimis*, indem man dasjenige System von Werthen x_a' fordert, für welches das erste Differential der Form $\lambda(x')$ von diesen Grössen verschwindet. Wenn ω und ϑ_α unbestimmte Factoren bedeuten, so bestehen die Gleichungen dieses Problems darin, dass die n Ableitungen des Ausdrucks

$$(16.)\quad -\lambda(x')+\omega f(x')+\sum_\alpha\vartheta_a\frac{dy_\alpha}{dt},$$

in Bezug auf die Variabeln x_a' genommen, gleich Null werden müssen. Fügt man zu diesen n Gleichungen die l Gleichungen (9.) hinzu, so entsteht das System

$$(17.)\quad \begin{cases} (-\lambda_{1,1}+\omega a_{1,1})x_1'+\cdots+(-\lambda_{1,n}+\omega a_{1,n})x_n'+\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\vartheta_1+\cdots+\frac{\partial y_l}{\partial x_1}\vartheta_l=0,\\ \quad\cdots\cdots\cdots

Die $(n+l)$ Ausdrücke der linken Seite sind linear nach den n Grössen x'_α und den l Grössen ϑ_α. Wenn daher $D(\omega)$ die symmetrische Determinante dieser $n+l$ linearen Functionen bezeichnet, so enthält die Gleichung

$$(18.) \qquad D(\omega) = 0,$$

die nothwendige Bestimmung der Grösse ω. Der Ausdruck $D(\omega)$ ist in Bezug auf ω eine rationale ganze Function vom $(n-l)^{\text{ten}}$ Grade, und die Coefficienten der Potenzen ω^{n-l}, ω^{n-l-1}, ω^{n-l-2}, ... sind homogene ganze Functionen der Grössen δy_α, beziehungsweise von den Graden 0, 1, 2, ... Der Coefficient von ω^{n-l} kann unter den obwaltenden Umständen nicht gleich Null werden; deshalb ist die Gleichung (18.) immer vom $(n-l)^{\text{ten}}$ Grade. Denkt man sich für ω eine Wurzel der Gleichung (18.) genommen, und die Werthe x'_α den Gleichungen (17.) und (15.) gemäss bestimmt, so folgt die Gleichung

$$(19.) \qquad \omega = 2\lambda(x').$$

Die Gleichung (18.) liefert also direct die betreffenden Werthe der Function

$$2\lambda(x') = \sum_\alpha \lambda_\alpha \delta y_\alpha.$$

2.

Es leuchtet ein, dass die Coefficienten der Potenzen von ω in $D(\omega)$ durch den Coefficienten der höchsten Potenz ω^{n-l} dividirt, oder die Coefficienten der Gleichung $D(\omega)=0$, die Beschaffenheit haben, bei der Einführung eines neuen Systems von Variabeln statt der x_α, sich mit der Form $f(dx)$ mitzuändern. Wofern man aber statt der Gleichungen (2.) die Gleichungen

$$(2^*.) \qquad \overline{y_\alpha} = \text{const.}$$

eintreten lässt, und die sämmtlichen mit den y_α ausgeführten Schritte wiederholt, so ergiebt das mit (13.) correspondirende System die den λ_α entsprechenden Grössen $\overline{\lambda_\alpha}$. Werden nun die entsprechenden Grössen $\delta\overline{y_\alpha}$ durch die Gleichungen

$$(20.) \qquad \delta\overline{y_\alpha} = k_{\alpha,1}\delta y_1 + \cdots + k_{\alpha,l}\delta y_l$$

definirt, in denen $\frac{\partial\overline{y_\alpha}}{\partial y_\beta} = k_{\alpha,\beta}$ gesetzt ist, so hat dies, wie leicht zu erkennen, die Gleichung

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha \delta y_\alpha = \sum_\alpha \overline{\lambda}_\alpha \delta\overline{y_\alpha}$$

zur Folge. Das System

$$(9^*.) \qquad \frac{d\overline{y_\beta}}{dt} = 0$$

ist mit dem System (9.) von gleicher Tragweite. Daher muss die Gleichung für die Grösse $\overline{\omega}$, welche der Grösse ω entspricht, unter der Voraussetzung der Gleichungen (20.), in ihren sämmtlichen Coefficienten mit der Gleichung (18.) zusammenfallen, und dasselbe gilt mithin von jeder rationalen ganzen Function dieser Coefficienten. Dieser Satz kann aber ohne wesentliche Beeinträchtigung seiner Allgemeinheit folgendermassen formulirt werden. Es sei $F(\delta y_1, \delta y_2, \ldots r_1, r_2, \ldots)$ eine rationale ganze Function der Coefficienten der Gleichung (18.), und zwar eine homogene ganze Function der Grössen $\delta y_1, \delta y_2, \ldots$, und zugleich eine lineare Function von gewissen Elementen r_1, $r_2, \ldots$; bei der Einführung des Systems $\overline{y}_\alpha$ statt des Systems y_α mögen sich die Elemente $r_1, r_2, \ldots$ beziehlich in die Elemente $\overline{r}_1, \overline{r}_2, \ldots$ verwandeln. Dann ist die Gleichung

$$(21.) \qquad F(\delta\overline{y}_1, \delta\overline{y}_2, \ldots \overline{r}_1, \overline{r}_2, \ldots) = F(\delta y_1, \delta y_2, \ldots r_1, r_2, \ldots)$$

durch die Voraussetzung der Gleichungen (20.) identisch erfüllt.

Diese Eigenschaft der Gleichung $D(\omega) = 0$ ist die Quelle von Grössenverbindungen, welche in dem oben definirten Sinne invariant sind. Zunächst bemerke ich, dass die Function

$$(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{\Delta} \frac{\partial y_{\alpha_1}}{\partial x_{\mathfrak{a}}} \frac{\partial y_{\alpha_2}}{\partial x_{\mathfrak{b}}}$$

bei der Substitution eines Systems neuer Variabeln statt der $x_{\mathfrak{a}}$ in den entsprechenden Ausdruck übergeht, der von den adjungirten Elementen der transformirten Form abhängt. Wenn aber (α_1, α_2) durch Einführung der $\overline{y}_\alpha$ statt der y_α in $(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2)$ verwandelt wird, so gilt die Gleichung

$$(22.) \qquad (\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2) = \sum_{\beta_1,\beta_2} k_{\alpha_1,\beta_1} k_{\alpha_2,\beta_2} (\beta_1, \beta_2).$$

Eine genau ebenso gebildete Gleichung

$$(23.) \qquad \delta\overline{y}_{\alpha_1} \delta\overline{y}_{\alpha_2} = \sum_{\beta_1,\beta_2} k_{\alpha_1,\beta_1} k_{\alpha_2,\beta_2} \delta y_{\beta_1} \delta y_{\beta_2}$$

ist eine Folgerung von (20.). Auf diesem Umstande beruht das Mittel zur Erreichung des gesteckten Zieles.

Ein beliebiges in der Function $F(\delta y_1, \delta y_2, \ldots r_1, r_2, \ldots)$ als Summand auftretendes Product von Potenzen der Grössen δy_α und von einem der Elemente $r_1, r_2, \ldots$ werde, abgesehen von dem letztern Factor, mit

$$\delta y_{\alpha_1} \delta y_{\alpha_2} \ldots \delta y_{\alpha_q}$$

bezeichnet, wo unter den Zeigern $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ beliebig viele unter einander

gleiche vorkommen dürfen. Aus (20.) folgt dann die Gleichung

$$(24.)\qquad \delta\bar{y}_{\alpha_1}\delta\bar{y}_{\alpha_2}\ldots\delta\bar{y}_{\alpha_q} = \sum_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_q} k_{\alpha_1,\beta_1}k_{\alpha_2,\beta_2}\ldots k_{\alpha_q,\beta_q}\delta y_{\beta_1}\delta y_{\beta_2}\ldots\delta y_{\beta_q},$$

und die Substitution derselben in (21.) muss diese identisch befriedigen. Weil nun das Product $\delta\bar{y}_{\alpha_1}\delta\bar{y}_{\alpha_2}\ldots\delta\bar{y}_{\alpha_q}$ seinen Werth nicht ändert, sobald man die q Zeiger

$$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \ldots \quad \alpha_q$$

ihren sämmtlichen $q!$ Permutationen unterwirft, so hat die Ausführung derselben auf beiden Seiten der Gleichung (24.) und die nachherige Addition der linken wie der rechten Seiten den Effect, dass die linke Seite gleich $q!\,\delta\bar{y}_{\alpha_1}\delta\bar{y}_{\alpha_2}\ldots\delta\bar{y}_{\alpha_q}$ wird. Hält man auf der rechten Seite eine beliebige Combination $\beta_1\beta_2\ldots\beta_q$ fest, so ist leicht zu übersehn, dass die Gleichung

$$\mathop{\mathbf{S}}_{\alpha} k_{\alpha_1,\beta_1}k_{\alpha_2,\beta_2}\ldots k_{\alpha_q,\beta_q} = \mathop{\mathbf{S}}_{\beta} k_{\alpha_1,\beta_1}k_{\alpha_2,\beta_2}\ldots k_{\alpha_q,\beta_q}$$

besteht, wo die Summation links auf alle Permutationen der Combination $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_q$, die Summation rechts auf alle Permutationen der Combination $\beta_1\beta_2\ldots\beta_q$ auszudehnen ist. So entsteht die folgende Umformung der Gleichung (24.)

$$(25.)\qquad q!\,\delta\bar{y}_{\alpha_1}\delta\bar{y}_{\alpha_2}\ldots\delta\bar{y}_{\alpha_q} = \sum_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_q}\mathop{\mathbf{S}}_{\beta} k_{\alpha_1,\beta_1}k_{\alpha_2,\beta_2}\ldots k_{\alpha_q,\beta_q}\cdot\delta y_{\beta_1}\delta y_{\beta_2}\ldots\delta y_{\beta_q}.$$

Ich nehme nun an, dass q eine gerade Zahl sei, und setze das folgende Verfahren fest. Man schreibe die sämmtlichen $q!$ Permutationen der q Zeiger $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_q$ unter einander hin, und theile jede Permutation in Gruppen von je zwei Zeigern

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1\alpha_2 & \alpha_3\alpha_4 & \ldots & \alpha_{q-1}\alpha_q \\ \alpha_1'\alpha_2' & \alpha_3'\alpha_4' & \ldots & \alpha_{q-1}'\alpha_q' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}.$$

Aus jeder Zeile bilde man das Product der $\frac{1}{2}q$ Functionen

$$(\alpha_1,\alpha_2)(\alpha_3,\alpha_4)\ldots(\alpha_{q-1},\alpha_q)$$

und bezeichne die über alle Zeilen genommene Summe mit

$$\mathop{\mathbf{S}}_{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2)(\alpha_3,\alpha_4)\ldots(\alpha_{q-1},\alpha_q).$$

Dann gilt der Satz, dass die Gleichung (25.) bestehen bleibt, wofern man auf

der linken Seite $\delta\bar{y}_{\alpha_1}\delta\bar{y}_{\alpha_2}\ldots\delta\bar{y}_{\alpha_q}$ durch $\frac{1}{q!}\mathop{\mathbf{S}}_{\alpha}(\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2)\ldots(\bar{\alpha}_{q-1},\bar{\alpha}_q)$, und auf der rechten Seite $\delta y_{\beta_1}\delta y_{\beta_2}\ldots\delta y_{\beta_q}$ durch $\frac{1}{q!}\mathop{\mathbf{S}}_{\beta}(\beta_1,\beta_2)\ldots(\beta_{q-1},\beta_q)$ ersetzt. In der That liefert die Gleichung (22.) unmittelbar das Resultat

$$\mathop{\mathbf{S}}_{\alpha}(\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2)\ldots(\bar{\alpha}_{q-1},\bar{\alpha}_q)=\mathop{\mathbf{S}}_{\alpha}\sum_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_q}k_{\alpha_1,\beta_1}k_{\alpha_2,\beta_2}\ldots k_{\alpha_q,\beta_q}(\beta_1,\beta_2)\ldots(\beta_{q-1},\beta_q).$$

Nimmt man hier eine beliebige Combination $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$ heraus, permutirt diese Zeiger auf alle $q!$ Arten, und lässt die betreffenden Zeiger $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ gleichzeitig dieselben Permutationen durchlaufen, so entstehen die neuen Gleichungen

$$\mathop{\mathbf{S}}_{\alpha'}(\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2')\ldots(\bar{\alpha}_{q-1}',\bar{\alpha}_q')=\mathop{\mathbf{S}}_{\alpha'}\sum_{\beta_1',\beta_2',\ldots\beta_q'}k_{\alpha_1',\beta_1'}\ldots k_{\alpha_q',\beta_q'}(\beta_1',\beta_2')\ldots(\beta_{q-1}',\beta_q'),$$

deren linke Seiten sämmtlich denselben Werth haben. Addirt man daher alle linken und alle rechten Seiten, so kommt links $q!\mathop{\mathbf{S}}_{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2)\ldots(\alpha_{q-1},\alpha_q)$. Auf der rechten Seite hat man, nach der oben benutzten Bemerkung,

$$\mathop{\mathbf{S}}_{\alpha'}k_{\alpha_1',\beta_1'}\ldots k_{\alpha_q',\beta_q'}=\mathop{\mathbf{S}}_{\beta'}k_{\alpha_1',\beta_1'}\ldots k_{\alpha_q',\beta_q'};$$

es ist aber auch, weil $\beta_1', \beta_2', \ldots \beta_q'$ aus einer Permutation von $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$, $\alpha_1', \alpha_2', \ldots \alpha_q'$ aus einer Permutation von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ hervorgegangen ist,

$$\mathop{\mathbf{S}}_{\beta'}k_{\alpha_1',\beta_1'}\ldots k_{\alpha_q',\beta_q'}=\mathop{\mathbf{S}}_{\beta}k_{\alpha_1',\beta_1}\ldots k_{\alpha_q',\beta_q}=\mathop{\mathbf{S}}_{\beta}k_{\alpha_1,\beta_1}\ldots k_{\alpha_q,\beta_q}.$$

Daher liefert die auszuführende Addition, wenn man nach derselben noch mit $q!$ auf beiden Seiten dividirt, das Resultat

$$(26.)\quad \mathop{\mathbf{S}}_{\alpha}(\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2)\ldots(\bar{\alpha}_{q-1},\bar{\alpha}_q)=\frac{1}{q!}\sum_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_q}\mathop{\mathbf{S}}_{\beta}k_{\alpha_1,\beta_1}\ldots k_{\alpha_q,\beta_q}\mathop{\mathbf{S}}_{\beta}(\beta_1,\beta_2)\ldots(\beta_{q-1},\beta_q),$$

welches durch die angegebene Substitution aus der Gleichung (25.) hervorgeht, und bewiesen werden sollte.

Vereinigt man mit diesem Satze die erwähnte Eigenschaft der Function (α_1, α_2), bei der Einführung eines Systems von neuen Variabeln sich mit der Form $f(dx)$ mitzuändern, so ergiebt sich die folgende Auflösung der gestellten Aufgabe.

Es bezeichne $F(\delta y_1, \delta y_2, \ldots r_1, r_2, \ldots)$ eine ganze rationale Function der Coefficienten der Gleichung $D(\omega)=0$, welche eine ganze homogene Function

der Grössen δy_α von der geraden Ordnung q ist. Die Producte positiver Potenzen der Grössen δy_α, welche, mit den Elementen $r_1, r_2, \ldots$ multiplicirt, in $F(\delta y_1, \delta y_2, \ldots r_1, r_2, \ldots)$ vorkommen, bezeichne man indefinite mit $\delta y_{\alpha_1} \delta y_{\alpha_2} \ldots \delta y_{\alpha_q}$. Sobald man jedes dieser Producte respective durch den Ausdruck

$$\frac{1}{q!} \mathop{\mathbf{S}}_{\alpha} (\alpha_1, \alpha_2) \ldots (\alpha_{q-1}, \alpha_q)$$

ersetzt, so verwandelt sich $F(\delta y_1, \delta y_2, \ldots r_1, r_2, \ldots)$ in eine Grössenverbindung, welche sowohl bei der Einführung eines Systems neuer Variabeln statt der Variabeln x_a, wie auch bei der Ersetzung des Functionensystems y_α durch ein independentes System von Functionen dieser Functionen, invariant bleibt.

3.

Die so eben entwickelte Methode vereinfacht sich bedeutend, wenn die Zahl $l = 1$ ist, oder, wenn nur *eine* Function y_1 existirt. Dann giebt es auch nur die *eine* Function

$$(27.) \qquad (1,1) = \sum_{a,b} \frac{A_{a.b}}{\Delta} \frac{\partial y_1}{\partial x_a} \frac{\partial y_1}{\partial x_b},$$

und nach der Vorschrift zu der Bildung der Invarianten hat man in der Function F, die nur gerade Potenzen von δy_1 enthalten darf, eine jede solche Potenz durch die gleich hohe Potenz der Grösse $\gamma(1,1)$ zu ersetzen. Offenbar entsteht dasselbe Resultat, wenn man die Function F aus den Coefficienten der Gleichung $D(\omega) = 0$ bildet, nachdem man in diesen δy_1 durch $\gamma(1,1)$ ersetzt hat. Durch diese Substitution erhalten die Coefficienten der Potenzen ω^{n-1}, ω^{n-2}, ω^{n-3}, ω^{n-4}, ... beziehungsweise die Factoren 1, $\gamma(1,1)$, $(1,1)$, $(\gamma(1,1))^3$, ..., und man sieht sogleich, dass der zweite, vierte, sechste, ... Coefficient der Gleichung, und die Producte aus je zweien der übrigen Coefficienten die Elementarinvarianten sind, welche unsere Methode liefert. Denn alle übrigen aus derselben fliessenden Invarianten werden rationale und ganze Functionen von diesen. Der Ausdruck von λ_1 ergiebt sich aus (11.), und für die Grösse $\lambda_1 \gamma(1,1)$, welche an die Stelle von $\lambda_1 \delta y_1$ treten soll, kommt

$$(28.) \qquad \lambda_1 \gamma(1,1) = \frac{1}{\sqrt{(1,1)}} \Big(\sum_{a,b} \frac{A_{a.b}}{\Delta} f_a(x') \frac{\partial y_1}{\partial x_b} - \sum_{a,b} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_a \partial x_b} x'_a x'_b \Big).$$

Demnach wird

$$(29.) \qquad \lambda_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{(1,1)}} \Big(\tfrac{1}{2} \sum_{c,b} \frac{A_{c,b}}{\Delta} f_{c,a,b} \frac{\partial y_1}{\partial x_b} - \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_a \partial x_b} \Big),$$

und $D(\omega)$ ist die Determinante des Systems von $(n+1)^2$ Grössen

$$(30.)\qquad \begin{vmatrix} -\lambda_{1,1}+\omega a_{1,1} \cdots -\lambda_{1,n}+\omega a_{1,n} & \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ -\lambda_{n,1}+\omega a_{n,1} \cdots -\lambda_{n,n}+\omega a_{n,n} & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdots\cdots\cdots \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & 0 \end{vmatrix} .$$

Eine andere Vereinfachung des mitgetheilten Verfahrens tritt ein, sobald die Form $f(dx)$ gleich dem Aggregat der Quadrate von Differentialen $\frac{1}{2}\Sigma dx_a^2$ wird. Die mechanische Bedeutung des aufgestellten isoperimetrischen Problems, welche hieraus folgt, gestattet überdies, das Problem *de maximis et minimis*, welches sich auf den Ausdruck $\Sigma\lambda_\alpha\delta y_\alpha$ bezieht, ebenfalls mechanisch zu interpretiren. *Es sei $\frac{1}{3}n$ eine ganze Zahl, und es seien $x_1, x_2, x_3; x_4, x_5, x_6, \ldots$ beziehungsweise die rechtwinkligen Coordinaten der $\frac{1}{3}n$ mit der Masseneinheit versehenen Punkte, welche das bewegte System bilden. Denkt man sich nun für einen Zeitmoment t die sämmtlichen Ortsbestimmungen x_a und die sämmtlichen Geschwindigkeitscomponenten x_a' gegeben, so sind die sämmtlichen aus den Bedingungen $y_\alpha = const.$ hervorgehenden Drucke, oder die Grössen λ_α, vollständig bestimmt. Wenn man sich jetzt vorstellt, dass den sämmtlichen Punkten des Systems von der gegebenen Lage aus eine durch die Grössen δy_α bestimmte, mit den Bedingungen des Problems vereinbare virtuelle Verschiebung ertheilt sei, so ist der Ausdruck $\sum_\alpha \lambda_\alpha \delta y_\alpha$ die Summe der Momente von den sämmtlichen Drucken, in Bezug auf diese virtuelle Verschiebung des Systems genommen. Gesetzt, die Summe der lebendigen Kräfte des Systems $2f(x')$ sei unveränderlich gleich der Einheit, die Lage des Systems sei gegeben, die Geschwindigkeitscomponenten aber seien wählbar, so entsteht die mit dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten nahe zusammenhängende Frage, auf welche Weise die Momentensumme $\sum_\alpha \lambda_\alpha \delta y_\alpha$ ein verschwindendes Differential erhalte. Dies ist die vorhin erörterte Frage. Weil aber die Gleichung* (18.) *für ω stets reelle Wurzeln liefert**), *so lautet die Antwort dahin, dass die Erfüllung des Geforderten auf $n-l$ Arten möglich ist.*

Bei der Voraussetzung $f(dx) = \frac{1}{2}\sum_a dx_a^2$ wird aus (11.) und (12.) beziehungsweise das System von Gleichungen

$$(31.)\qquad \begin{cases} \sum_a \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_a}\frac{\partial y_\beta}{\partial x_a} = (\alpha,\beta), \quad \sum_{a,b} \frac{\partial^2 y_\beta}{\partial x_a \partial x_b} x_a' x_b' = \eta_\beta, \\ \sum_\alpha (\alpha,\beta)\lambda_\alpha + \sum_{a,b} \frac{\partial^2 y_\beta}{\partial x_a \partial x_b} x_a' x_b' = 0. \end{cases}$$

*) Der Beweis dieser Thatsache wird im nächsten Artikel gegeben.

Eine bemerkenswerthe Folgerung aus (31.) ist die, dass, sobald die y_a lineare Functionen der Grössen x_a werden, die sämmtlichen Grössen λ_a verschwinden. Bei dieser Voraussetzung verschwinden demnach auch die sämmtlichen Coefficienten der Function $D(\omega)$ mit Ausnahme des Coefficienten von ω^{n-l}, und aus diesem Grunde werden die sämmtlichen invarianten Grössenverbindungen, welche durch die angegebene Methode abgeleitet sind, ebenfalls gleich Null.

Sobald die beiden Voraussetzungen $f(dx) = \frac{1}{2}\sum_a dx_a^2$ und $l = 1$ zugleich eintreten, so folgt aus (27.), (28.), (29.) die Bestimmung *)

$$(32.)\qquad \begin{cases} (1,1) = \sum_a \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_a}\right)^2, \quad \lambda_1 \sqrt{(1,1)} = -\frac{1}{\sqrt{(1,1)}} \sum_{a,b} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_a \partial x_b} x'_a x'_b, \\ \lambda_{a,b} = -\frac{1}{\sqrt{(1,1)}} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_a \partial x_b}. \end{cases}$$

Alsdann wird die Grösse $\frac{-1}{\lambda_1 \sqrt{(1,1)}}$ identisch mit derjenigen Grösse, welche Herr *Kronecker* ϱ nennt, und das betrachtete Problem *de maximis et minimis* mit demjenigen, welches Herr *Kronecker* für die Grösse ϱ untersucht hat. Substituirt man $\varrho = -\frac{1}{\omega}$ in den Ausdruck (30.), so liefert die Gleichung $D\left(-\frac{1}{\varrho}\right) = 0$ die ausgezeichneten $n-1$ Werthe der Grösse ϱ. Das Product der reciproken Werthe von diesen gehört zu den oben definirten Invarianten, wofern n eine ungerade Zahl ist, jedoch nur das Quadrat dieses Products, wofern n eine gerade Zahl ist. Wenn $n = 3$ ist, und x_1, x_2, x_3 die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes auf der Fläche $y_1 = \text{const.}$ sind, so ist ϱ der Krümmungshalbmesser dieser Fläche für denjenigen Normalschnitt, bei dem die cosinus der Winkel, welche die Tangente mit den drei Axen bildet, den drei Grössen x'_1, x'_2, x'_3 beziehungsweise proportional sind. Die Gleichung $D\left(-\frac{1}{\varrho}\right) = 0$ giebt den grössten und kleinsten Krümmungshalbmesser, und das *Gauss*ische Krümmungsmass ist das Product der beiden reciproken Werthe von diesen.

---

*) Eine specielle Erwähnung verdient hier die Thatsache, dass für die Function $y_1 = \frac{1}{2}\sum_a x_a^2$ die Gleichung (18.) in die Gestalt $\left(\frac{1}{\sqrt{\sum x_a^2}} + \omega\right)^{n-1} = 0$ verwandelt wird. Das dieser Voraussetzung entsprechende isoperimetrische Problem hat *Jacobi* zu einem Beweise des *Abel*schen Theorems benutzt. Cf. Vorlesungen über Dynamik pag. 234.

4.

Es sei jetzt erlaubt, den Sinn der allgemeinen Methode noch durch eine Umformung zu erläutern. Weil die l Functionen y_α von einander unabhängig sind, so kann man zu denselben $n-l$ beliebige Functionen y_σ dergestalt hinzufügen, dass die y_α und y_σ zusammengenommen ein unabhängiges System von n Functionen der Variabeln x_a darstellen. Die Zeiger σ, τ sollen immer die Reihe der Zahlen von $l+1$ bis n durchlaufen. Man transformire jetzt die Form $f(dx)$ durch Substitution der Variabeln y_α, y_σ statt der Variabeln x_a, und es komme

$$(33.)\quad \left\{\begin{aligned} f(dx) &= g(dy),\\ g(dy) &= \tfrac{1}{2}\sum_{a,b} e_{a,b}\,dy_a\,dy_b,\\ |e_{a,b}| &= \mathrm{E}, \quad \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial e_{a,b}} = E_{a,b},\\ \frac{d\frac{\partial g(y')}{\partial y'_a}}{dt} - \frac{\partial g(y')}{\partial y_a} &= \sum_b e_{a,b}\,y''_b + g_a(y'),\\ g_a(y') = \tfrac{1}{2}\sum_{c,b} g_{a,c,b}\,y'_c y'_b, &\qquad g_{a,c,b} = \frac{\partial e_{a,c}}{\partial y_b} + \frac{\partial e_{a,b}}{\partial y_c} - \frac{\partial e_{c,b}}{\partial y_a}. \end{aligned}\right.$$

Dann folgen aus (7.) die Gleichungen

$$(34.)\quad \left\{\begin{aligned} \sum_b e_{\alpha,b}\,y''_b + g_\alpha(y') &= \lambda_\alpha,\\ \sum_b e_{\sigma,b}\,y''_b + g_\sigma(y') &= 0, \end{aligned}\right.$$

ferner aus (11.) und (12.) die Relationen

$$\frac{E_{\alpha,\beta}}{\mathrm{E}} = (\alpha,\beta), \qquad -\sum_a \frac{E_{a,\beta}}{\mathrm{E}}\,g_a(y') = \eta_\beta,$$

und

$$(35.)\quad \sum_\alpha E_{\alpha,\beta}\lambda_\alpha = \sum_a E_{a,\beta}\,g_a(y').$$

Demnach wird der Ausdruck

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha \delta y_\alpha = 2\lambda(x') = 2\mu(y')$$

gleich einer quadratischen Form der Grössen y'_a, deren Coefficienten, wie folgt,

$$(36.)\quad 2\mu(y') = \sum_{a,b} \mu_{a,b}\,y'_a y'_b$$

bezeichnet werden mögen. Da nun das für die Function $\lambda(x') = \mu(y')$ aufgestellte Problem *de maximis et minimis* an die Bedingungen

$$(9.)\quad \frac{dy_\beta}{dt} = 0$$

geknüpft ist, so kann man dieselben in die Ausdrücke $\mu(y')$ und $f(x') = g(y')$ direct einführen. Der Ausdruck (16.) nimmt dann die Gestalt an

$$(37.) \qquad \tfrac{1}{2}\sum_{\sigma,\tau}(-\mu_{\sigma,\tau}+\omega e_{\sigma,\tau})y'_\sigma y'_\tau,$$

und die Gleichung (18.) erhält den einfachen Ausdruck

$$(38.) \qquad |-\mu_{\sigma,\tau}+\omega e_{\sigma,\tau}| = 0.$$

Da die Form $\frac{1}{2}\sum_{\sigma,\tau} e_{\sigma,\tau}y'_\sigma y'_\tau$ unter der bestehenden Voraussetzung eine wesentlich positive Form der $n-l$ Differentialquotienten y'_σ ist, deren Determinante $|e_{\sigma,\tau}|$ nicht verschwindet, so wird hierdurch in Evidenz gesetzt, dass in der Gleichung für ω der Factor von ω^{n-l} nicht gleich Null werden kann, und es folgt aus bekannten Sätzen, dass die Gleichung (38.) lauter reelle Wurzeln hat.

In dem Falle, dass $l=1$ ist, wird $(1,1)=\frac{E_{1,1}}{\mathrm{E}}$, und in Folge von (28.) hat man

$$(39.) \qquad \lambda_1\sqrt{(1,1)} = \sqrt{\frac{E_{1,1}}{\mathrm{E}}}\sum_{\mathfrak{a}}\frac{E_{\mathfrak{a},1}}{E_{1,1}}g_{\mathfrak{a}}(y').$$

Weil aber bei der Ersetzung von δy_1 durch $\sqrt{(1,1)}$ die Function

$$\lambda_1\sqrt{(1,1)} = 2\lambda(x') = 2\mu(y')$$

wird, so folgt hieraus die Bestimmung der Grössen $\mu_{\sigma,\tau}$:

$$(40.) \qquad \mu_{\sigma,\tau} = \frac{1}{2\sqrt{E_{1,1}\mathrm{E}}}\sum_{\mathfrak{a}} E_{\mathfrak{a},1}g_{\mathfrak{a},\sigma,\tau}.$$

Die so eben durchgeführte Umformung ist geeignet, einen wesentlichen Unterschied hervorzuheben, der sich bei den aus der Gleichung (18.) oder (38.) abgeleiteten invarianten Grössenverbindungen geltend macht. Von der Form $g(dy) = \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} e_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}dy_{\mathfrak{a}}dy_{\mathfrak{b}}$ der n Differentiale $dy_{\mathfrak{a}}$ sondert sich die Form $\frac{1}{2}\sum_{\sigma,\tau} e_{\sigma,\tau}dy_\sigma dy_\tau$ der $n-l$ Differentiale dy_σ entschieden ab. Wegen der Gleichungen (9.) verwandeln sich die isoperimetrischen Differentialgleichungen (34.) in die folgenden:

$$\sum_{\tau} e_{\alpha,\tau}y''_\tau + g_\alpha(y') = \lambda_\alpha,$$
$$\sum_{\tau} e_{\sigma,\tau}y''_\tau + g_\sigma(y') = 0;$$

in den Formen $g_\alpha(y')$ und $g_\sigma(y')$ fallen die Glieder, welche in die Grössen y'_β multiplicirt sind, ebenfalls fort, und es wird klar, dass die Auflösung des isoperimetrischen Problems im Grunde nur von der Form $\frac{1}{2}\sum_{\sigma,\tau} e_{\sigma,\tau}dy_\sigma dy_\tau$ abhängt. Dagegen kann eine in dem oben definirten Sinne invariante Grössen-

verbindung zu dieser Form ein doppeltes Verhalten zeigen. Entweder ist es möglich, diese Grössenverbindung durch die Grössen $e_{\sigma,\tau}$ und die nach den Elementen y_σ genommenen partiellen Ableitungen dieser Grössen darzustellen, so dass dieselbe, bei der Einführung von $n-l$ neuen Variabeln statt der y_σ, sich mit der Form $\frac{1}{2}\sum_{\sigma,\tau} e_{\sigma,\tau}\, dy_\sigma dy_\tau$ mit ändert, oder dies ist nicht möglich. In dem erstern Falle ist die in dem definirten Sinne invariante Grössenverbindung auch eine Invariante dieser Form, in dem zweiten Falle ist sie es nicht. Dieser Unterschied tritt bei der Theorie der Krümmung einer Fläche, von deren Betrachtung wir ausgegangen sind, deutlich hervor. Wenn $f(dx) = \frac{1}{2}\sum_{a} dx_a^2$, $n=3$, $l=1$ ist, und x_1, x_2, x_3 die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Fläche $y_1 = \text{const.}$ sind, so gab die Gleichung $D\left(-\frac{1}{\varrho}\right) = 0$ als Werthe von ϱ den grössten und den kleinsten Krümmungshalbmesser. Nach der aufgestellten Definition ist sowohl das Quadrat von dem Aggregat der reciproken Werthe der beiden Radien, wie auch das Product der reciproken Werthe derselben eine invariante Grössenverbindung. Eine Invariante der Form $\frac{1}{2}\sum_{\sigma,\tau} e_{\sigma,\tau}\, dy_\sigma dy_\tau$ ist aber bekanntlich nur die zweite von diesen, nämlich das *Gauss*ische Krümmungsmass.

Bonn, den 18. October 1869.

Entwickelung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von n Differentialen.

(Zweite Mittheilung.)

(Von Herrn *R. Lipschitz* in Bonn.)

Bei einer fortgesetzten Beschäftigung mit den quadratischen Formen von n Differentialen bin ich dazu gelangt, zwischen dem Algorithmus, durch welchen in der Mittheilung d. d. 18. October vorigen Jahres invariante Grössenverbindungen der Form $f(dx)$ und des Systems von Gleichungen $y_\alpha = \text{const.}$ abgeleitet sind, und der quadrilinearen Form Ψ, welche in diesem Journal Bd. LXX. pag. 83 definirt ist und eine Covariante der Form $f(dx)$ darstellt *), den inneren Zusammenhang aufzufinden. Für die Auseinandersetzung dieses Zusammenhanges sollen die Bezeichnungen der frühern Mittheilung beibehalten werden.

Die deducirten invarianten Grössenverbindungen haben ihren Ursprung in dem Ausdruck

$$(1.) \qquad \sum_\alpha \lambda_\alpha \delta y_\alpha = 2\lambda(x') = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} x'_\mathfrak{a} x'_\mathfrak{b}.$$

In diese quadratische Form der n Differentialquotienten $x'_\mathfrak{a} = \frac{dx_\mathfrak{a}}{dt}$ führe ich statt der Grössen $\frac{dx_\mathfrak{a}}{dt}$, $\frac{dx_\mathfrak{b}}{dt}$ die beiden Systeme von independenten Differentialen $dx_\mathfrak{a}$, $\overset{1}{dx}_\mathfrak{b}$ ein, und setze

$$(2.) \qquad \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} dx_\mathfrak{a} \overset{1}{dx}_\mathfrak{b} = 2\lambda(dx, \overset{1}{dx}) = \sum_\alpha \lambda_\alpha (dx, \overset{1}{dx}) \delta y_\alpha .$$

Die Functionen $\lambda_\alpha(dx, \overset{1}{dx})$ können mit Hülfe der Bezeichnung

$$\tfrac{1}{2} \sum_\mathfrak{c} \frac{\partial f_\mathfrak{a}(dx)}{\partial dx_\mathfrak{c}} \overset{1}{dx}_\mathfrak{c} = f_\mathfrak{a}(dx, \overset{1}{dx})$$

durch die folgenden Gleichungen unmittelbar definirt werden:

---

*) In der Abhandlung des Herrn *Christoffel*: über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades, dieses Journal Bd. LXX, ist dieselbe Form pag. 58 mit G_4 bezeichnet.

$$\eta_{\alpha'}(dx, \overset{1}{dx}) = -\sum_{a,b} \frac{A_{a,b}}{\Delta} f_a(dx, \overset{1}{dx}) \frac{\partial y_{\alpha'}}{\partial x_b} + \sum_{a,b} \frac{\partial^2 y_{\alpha'}}{\partial x_a \partial x_b} dx_a \overset{1}{dx}_b,$$

$$(\alpha, \alpha') = \sum_{a,b} \frac{A_{a,b}}{\Delta} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_a} \frac{\partial y_{\alpha'}}{\partial x_b},$$

$$\sum_{\alpha} (\alpha, \alpha') \lambda_\alpha(dx, \overset{1}{dx}) + \eta_{\alpha'}(dx, \overset{1}{dx}) = 0,$$

$$\lambda_\alpha(dx, \overset{1}{dx}) + \sum_{\alpha'} [\alpha, \alpha'] \eta_{\alpha'}(dx, \overset{1}{dx}) = 0.$$

Demnach hat die Function $2\lambda(dx, \overset{1}{dx})$ den Ausdruck

$$(3.) \qquad 2\lambda(dx, \overset{1}{dx}) = -\sum_{\alpha,\alpha'} [\alpha, \alpha'] \delta y_\alpha \eta_{\alpha'}(dx, \overset{1}{dx}),$$

und wenn mit zwei anderen Systemen von Differentialen $\overset{2}{dx}, \overset{3}{dx}$ die Function $2\lambda(\overset{2}{dx}, \overset{3}{dx})$ entsprechend gebildet wird, so erhält man für das Product der beiden Functionen die Darstellung

$$4\lambda(dx, \overset{1}{dx})\lambda(\overset{2}{dx}, \overset{3}{dx}) = \sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'} [\alpha, \alpha'][\beta, \beta'] \delta y_\alpha \delta y_\beta \eta_{\alpha'}(dx, \overset{1}{dx}) \eta_{\beta'}(\overset{2}{dx}, \overset{3}{dx}).$$

In dem Sinne der früher entwickelten Methode werde jetzt jeder Ausdruck $\delta y_\alpha \delta y_\beta$ durch den entsprechenden Ausdruck (α, β) ersetzt, und diese Substitution durch das Einschliessen in eine Klammer angedeutet. Dann kommt nach einem bekannten Satze

$$(4\lambda(dx, \overset{1}{dx})\lambda(\overset{2}{dx}, \overset{3}{dx})) = \sum_{\alpha,\beta} [\alpha, \beta] \eta_\alpha(dx, \overset{1}{dx}) \eta_\beta(\overset{2}{dx}, \overset{3}{dx}),$$

und in gleicher Weise

$$(4\lambda(dx, \overset{3}{dx})\lambda(\overset{2}{dx}, \overset{1}{dx})) = \sum_{\alpha,\beta} [\alpha, \beta] \eta_\alpha(dx, \overset{3}{dx}) \eta_\beta(\overset{2}{dx}, \overset{1}{dx}).$$

Wenn man nun eine neue quadrilineare Form $K(dx, \overset{2}{dx}, \overset{1}{dx}, \overset{3}{dx})$ durch die folgende symbolische Gleichung definirt

$$(4.) \qquad K(dx, \overset{2}{dx}, \overset{1}{dx}, \overset{3}{dx}) = (4\lambda(dx, \overset{1}{dx})\lambda(\overset{2}{dx}, \overset{3}{dx}) - 4\lambda(dx, \overset{3}{dx})\lambda(\overset{2}{dx}, \overset{1}{dx})),$$

so ergiebt sich für dieselbe die folgende explicite Darstellung

$$(5.) \quad K(dx, \overset{2}{dx}, \overset{1}{dx}, \overset{3}{dx}) = \sum_{\alpha,\beta} [\alpha, \beta] (\eta_\alpha(dx, \overset{1}{dx}) \eta_\beta(\overset{2}{dx}, \overset{3}{dx}) - \eta_\alpha(dx, \overset{3}{dx}) \eta_\beta(\overset{2}{dx}, \overset{1}{dx})).$$

Diese Form ist nach den früher entwickelten Grundsätzen, und in der gleichzeitig genau definirten Bedeutung, zu der Form $f(dx)$ und dem System Gleichungen $y_\alpha = \text{const.}$ covariant. In der angeführten Form $\Psi(du, \delta u, dx, \delta x)$,

die zu der Form $f(dx)$ covariant ist, setzt man $du = dx$, $\delta u = \overset{2}{dx}$, $dx = \overset{1}{dx}$, $\delta x = \overset{3}{dx}$, und betrachtet die Differenz der beiden quadrilinearen Formen

$$(6.) \qquad \tfrac{1}{2}\Psi(dx, \overset{2}{dx}, \overset{1}{dx}, \overset{3}{dx}) - K(dx, \overset{2}{dx}, \overset{1}{dx}, \overset{3}{dx}).$$

Diese Differenz, die wegen der Beschaffenheit ihrer Bestandtheile zu der Form $f(dx)$ und dem System Gleichungen $y_\alpha = \text{const.}$ ebenfalls covariant ist, soll durch die Einführung des Systems von neuen Variabeln $y_\mathfrak{t}$ transformirt werden, in welchem, wie früher, die l Variabeln y_α mit den gegebenen Functionen übereinstimmen, die $n-l$ Variabeln y_σ beliebig gewählt sind. Zu den schon eingeführten Bezeichnungen, welche dieser Substitution entsprechen, mögen noch die folgenden hinzukommen: es sei

$$\tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{m}} \frac{\partial g_\mathfrak{t}(dy)}{\partial dy_\mathfrak{m}} \overset{1}{dy}_\mathfrak{m} = g_\mathfrak{t}(dy, \overset{1}{dy}),$$

$$\tfrac{1}{2}\sum_{\sigma,\tau} e_{\sigma,\tau}\, dy_\sigma dy_\tau = \bar{g}(dy), \qquad |e_{\sigma,\tau}| = \overline{\mathrm{E}}, \qquad \frac{\partial \overline{\mathrm{E}}}{\partial e_{\sigma,\tau}} = \overline{E}_{\sigma,\tau},$$

$$\Psi(dx, \overset{2}{dx}, \overset{1}{dx}, \overset{3}{dx}) = \Omega(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy});$$

die quadrilineare Form Ω, welche zu der quadratischen Form $\bar{g}(dy)$ von den $(n-l)$ Differentialen dy_σ gehört, werde mit $\overline{\Omega}(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy})$ bezeichnet; ferner habe man

$$\begin{aligned} 2\lambda(dx, \overset{1}{dx}) &= 2\mu(dy, \overset{1}{dy}), \\ 2\mu(dy, \overset{1}{dy}) &= \sum_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}} \mu_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}}\, dy_\mathfrak{t} \overset{1}{dy}_\mathfrak{l}, \\ \eta_\alpha(dx, \overset{1}{dx}) &= \zeta_\alpha(dy, \overset{1}{dy}), \\ K(dx, \overset{2}{dx}, \overset{1}{dx}, \overset{3}{dx}) &= L(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy}). \end{aligned}$$

Nun gelten die Gleichungen

$$(\alpha, \beta) = \frac{E_{\alpha,\beta}}{\mathrm{E}}, \qquad \zeta_\alpha(dy, \overset{1}{dy}) = -\sum_{\mathfrak{t}} \frac{E_{\mathfrak{t},\alpha}}{\mathrm{E}} g_\mathfrak{t}(dy, \overset{1}{dy});$$

folglich, wenn der Uebereinstimmung halber für *alle* Zeiger $\frac{E_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}}}{\mathrm{E}} = (\mathfrak{t}, \mathfrak{l})$ gesetzt wird, auch die Gleichungen

$$\zeta_\alpha(dy, \overset{1}{dy}) = -\sum_{\mathfrak{t}} (\mathfrak{t}, \alpha) g_\mathfrak{t}(dy, \overset{1}{dy}).$$

Es kommen daher für die quadrilineare Form $L(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy})$ nach (4.) und (5.) diese Darstellungen

$$(7.)\qquad L(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy}) = (4\mu(dy, \overset{1}{dy})\mu(\overset{2}{dy}, \overset{3}{dy}) - 4\mu(dy, \overset{3}{dy})\mu(\overset{2}{dy}, \overset{1}{dy})),$$

$$(8.)\qquad \begin{cases} L(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy}) \\ = \sum\limits_{\alpha,\beta,\mathfrak{k},\mathfrak{l}} [\alpha,\beta](\mathfrak{k},\alpha)(\mathfrak{l},\beta)(g_{\mathfrak{k}}(dy, \overset{1}{dy})g_{\mathfrak{l}}(\overset{2}{dy}, \overset{3}{dy}) - g_{\mathfrak{k}}(dy, \overset{3}{dy})g_{\mathfrak{l}}(\overset{2}{dy}, \overset{1}{dy})). \end{cases}$$

Der in Bd. LXX, pag. 83 dieses Journals gegebene Ausdruck der Form $\Omega(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy})$ kann nun mittelst der gegenwärtig eingeführten Relationen folgendermassen geschrieben werden

$$(9.)\qquad \begin{cases} \Omega(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy}) = \sum\limits_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}} \left(\overset{3}{d} \frac{\partial g_{\mathfrak{k}}(\overset{1}{dy})}{\partial \overset{1}{dy_{\mathfrak{l}}}} - \overset{1}{d} \frac{\partial g_{\mathfrak{k}}(\overset{3}{dy})}{\partial \overset{3}{dy_{\mathfrak{l}}}} \right) dy_{\mathfrak{k}} \overset{2}{dy_{\mathfrak{l}}} \\ \qquad + 2\sum\limits_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}} (\mathfrak{k},\mathfrak{l})(g_{\mathfrak{k}}(dy, \overset{1}{dy})g_{\mathfrak{l}}(\overset{2}{dy}, \overset{3}{dy}) - g_{\mathfrak{k}}(dy, \overset{3}{dy})g_{\mathfrak{l}}(\overset{2}{dy}, \overset{1}{dy})), \end{cases}$$

und dadurch entsteht für die transformirte Differenz (6.) die Darstellung

$$(10.)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\Omega(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy}) - L(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy}) \\ = \frac{1}{2}\sum\limits_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}} \left(\overset{3}{d} \frac{\partial g_{\mathfrak{k}}(\overset{1}{dy})}{\partial \overset{1}{dy_{\mathfrak{l}}}} - \overset{1}{d} \frac{\partial g_{\mathfrak{k}}(\overset{3}{dy})}{\partial \overset{3}{dy_{\mathfrak{l}}}} \right) dy_{\mathfrak{k}} dy_{\mathfrak{l}} \\ + \sum\limits_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}} (\mathfrak{k},\mathfrak{l} - \sum\limits_{\alpha,\beta} [\alpha,\beta](\mathfrak{k},\alpha)(\mathfrak{l},\beta))(g_{\mathfrak{k}}(dy, \overset{1}{dy})g_{\mathfrak{l}}(\overset{2}{dy}, \overset{3}{dy}) - g_{\mathfrak{k}}(dy, \overset{3}{dy})g_{\mathfrak{l}}(\overset{2}{dy}, \overset{1}{dy})). \end{cases}$$

Jetzt ergiebt sich aus bekannten Determinantensätzen, dass der Ausdruck

$$(\mathfrak{k},\mathfrak{l}) - \sum_{\alpha,\beta} [\alpha,\beta](\mathfrak{k},\alpha)(\mathfrak{l},\beta),$$

sobald $\mathfrak{k}$ *oder* $\mathfrak{l}$ aus der Reihe der Zahlen von 1 bis l genommen ist, welche von den Werthen α, β durchlaufen wird, den Werth Null hat, dass derselbe aber, wenn $\mathfrak{k}$ *und* $\mathfrak{l}$ der Reihe der Zahlen von $l+1$ bis n angehören, den Werth

$$\frac{1}{\mathrm{E}} \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial e_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}} = \frac{\overline{E}_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}}{\mathrm{E}}$$

erhält. Die zweite Summe auf der rechten Seite von (10.) ist daher nur auf die Zahlenreihen $\mathfrak{k} = \sigma$, $\mathfrak{l} = \tau$ auszudehnen, und man erhält die Gleichung

$$(11.)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\Omega(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy}) - L(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy}) \\ = \frac{1}{2}\sum\limits_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}} \left(\overset{3}{d} \frac{\partial g_{\mathfrak{k}}(\overset{1}{dy})}{\partial \overset{1}{dy_{\mathfrak{l}}}} - \overset{1}{d} \frac{\partial g_{\mathfrak{k}}(\overset{3}{dy})}{\partial \overset{3}{dy_{\mathfrak{l}}}} \right) dy_{\mathfrak{k}} \overset{2}{dy_{\mathfrak{l}}} \\ + \sum\limits_{\sigma,\tau} \frac{\overline{E}_{\sigma,\tau}}{\mathrm{E}} (g_{\sigma}(dy, \overset{1}{dy})g_{\tau}(\overset{2}{dy}, \overset{3}{dy}) - g_{\sigma}(dy, \overset{3}{dy})g_{\tau}(\overset{2}{dy}, \overset{1}{dy})). \end{cases}$$

Die rechte Seite derselben besitzt die Eigenschaft, sobald man die sämmtlichen Differentiale der Variabeln y_α gleich Null setzt, in die zu der quadratischen Form $\overline{g}(dy)$ covariante quadrilineare Form $\frac{1}{2}\overline{\Omega}(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy})$ überzugehen. *Also liefert die Transformation der Differenz* (6.) *das Resultat*

$$(12.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\Psi(dx, \overset{2}{dx}, \overset{1}{dx}, \overset{3}{dx}) - K(dx, \overset{2}{dx}, \overset{1}{dx}, \overset{3}{dx}) \\ = \frac{1}{2}\Omega(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy}) - L(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy}), \\ \frac{1}{2}\Omega(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy}) - L(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy}) = \frac{1}{2}\overline{\Omega}(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy}); \\ dy_\alpha = \overset{1}{dy}_\alpha = \overset{2}{dy}_\alpha = \overset{3}{dy}_\alpha = 0. \end{cases}$$

Dieses Resultat enthält den Schlüssel des Zusammenhanges zwischen der Function $\lambda(dx, \overset{1}{dx})$ *und der quadrilinearen Form* $\Psi(dx, \overset{2}{dx}, \overset{1}{dx}, \overset{3}{dx})$. *Die quadratische Form* $\overline{g}(dy)$ *ist aus der quadratischen Form* $f(dx)$ *durch Hinzufügung der* l *Gleichungen* $y_\alpha = const.$, *und die Einführung eines beliebigen Systems neuer Variabeln* y_σ *hervorgegangen, und die quadrilineare Form* $\overline{\Omega}(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy})$ *der quadratischen Form* $\overline{g}(dy)$ *weist durch die Gleichungen* (12.) *auf die quadrilineare Form* $\Psi(dx, \overset{2}{dx}, \overset{1}{dx}, \overset{3}{dx})$ *der ursprünglichen Form* $f(dx)$ *zurück.*

Nach einem in Bd. LXX, pag. 94 dieses Journals aufgestellten und bewiesenen Satze ist die quadrilineare Form $\Psi(dx, \overset{2}{dx}, \overset{1}{dx}, \overset{3}{dx})$ dann und nur dann identisch gleich Null, wenn die Form $f(dx)$ in eine Form mit constanten Coefficienten transformirt werden kann. Es verwandeln sich daher unter dieser Voraussetzung und nur unter dieser Voraussetzung die Gleichungen (12.) in die folgenden

$$(13.)\quad \begin{cases} K(dx, \overset{2}{dx}, \overset{1}{dx}, \overset{3}{dx}) = L(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy}), \\ -L(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy}) = \frac{1}{2}\overline{\Omega}(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy}); \\ dy_\alpha = \overset{1}{dy}_\alpha = \overset{2}{dy}_\alpha = \overset{3}{dy}_\alpha = 0. \end{cases}$$

Hier geschieht der Allgemeinheit kein Eintrag, wenn man annimmt, dass $f(dx)$ selbst eine Form mit constanten Coefficienten ist. Die Gleichungen (13.) geben nun ein Mittel, von einigen der früher deducirten invarianten Grössenverbindungen der Form $f(dx)$ und des Systems von Gleichungen $y_\alpha = \text{const.}$ nachzuweisen, dass dieselben auch Invarianten der Form $\overline{g}(dy)$ sind. Für

diesen Zweck mögen die Coefficienten der Form $\overline{\Omega}(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy})$ mit $(\sigma, \tau, \sigma', \tau')$ bezeichnet werden, und es möge die zweite Gleichung (13.) diese Gestalt bekommen

$$(14.)\quad \begin{cases} -\sum_{\sigma,\tau,\sigma',\tau'} (\mu_{\sigma,\tau}\mu_{\sigma',\tau'} - \mu_{\sigma,\tau'}\mu_{\sigma',\tau})(dy_\sigma \overset{2}{dy}_{\sigma'} - \overset{2}{dy}_\sigma dy_{\sigma'})(\overset{1}{dy}_\tau \overset{3}{dy}_{\tau'} - \overset{3}{dy}_\tau \overset{1}{dy}_{\tau'}) \\ = \tfrac{1}{2}\sum_{\sigma,\tau,\sigma',\tau'} (\sigma, \sigma', \tau, \tau')(dy_\sigma \overset{2}{dy}_{\sigma'} - \overset{2}{dy}_\sigma dy_{\sigma'})(\overset{1}{dy}_\tau \overset{3}{dy}_{\tau'} - \overset{3}{dy}_\tau \overset{1}{dy}_{\tau'}); \end{cases}$$

in dem Ausdruck $(\mu_{\sigma,\tau}\mu_{\sigma',\tau'} - \mu_{\sigma,\tau'}\mu_{\sigma',\tau})$ hat die Einschliessung in die Klammer die Bedeutung, dass jedes Product $\delta y_\alpha \delta y_\beta$ durch das entsprechende (α, β) ersetzt ist.

Jene invarianten Grössenverbindungen der Form $f(dx)$ und des Systems $y_\alpha = \text{const.}$ werden erhalten, indem man die Determinante

$$|-\mu_{\sigma,\tau} + \omega e_{\sigma,\tau}| = D(\omega),$$
$$D(\omega) = D_0\omega^{n-l} + D_1\omega^{n-l-1} + \cdots + D_{n-l}$$

bildet, aus den Coefficienten $\frac{D_1}{D_0}, \frac{D_2}{D_0}, \ldots \frac{D_{n-l}}{D_0}$ rationale ganze Ausdrücke zusammensetzt, welche in Bezug auf die Grössen δy_α von einer geraden Ordnung sind, und diese Ausdrücke nach einem gewissen Princip als symbolische Darstellungen auffasst. Für jeden Werth der Zahl l nimmt hier der Coefficient $\frac{D_2}{D_0}$ eine ausgezeichnete Stellung ein. Derselbe ist gleich einer ganzen Function zweiter Ordnung der Grössen δy_α, und in diesem Falle erfordert das in Rede stehende Princip, dass $\delta y_\alpha \delta y_\beta$ durch (α, β) ersetzt werde. Diese Substitution ist schon oben durch Einschliessen in eine Klammer angedeutet worden; man erhält somit für $\left(\frac{D_2}{D_0}\right)$ die Gleichung

$$(15.)\quad \left(\frac{D_2}{D_0}\right) = \sum_{\sigma,\tau,\sigma',\tau'} (\mu_{\sigma,\tau}\mu_{\sigma',\tau'} - \mu_{\sigma,\tau'}\mu_{\sigma',\tau}) \frac{\partial^2 \overline{\mathrm{E}}}{\overline{\mathrm{E}}\, \partial e_{\sigma,\tau}\, \partial e_{\sigma',\tau'}}.$$

Unter der Voraussetzung, dass die Zahl $l = 1$ ist, oder dass zu der Form $f(dx)$ nur die *eine* Gleichung $y_1 = \text{const.}$ hinzutritt, wird dem aufgestellten Princip genügt, indem man den *einen* Ausdruck δy_1 durch $\sqrt{(1, 1)}$ ersetzt, und es geht die symbolische Darstellung in eine explicite über. Die Elementarinvarianten der Form $f(dx)$ und der Gleichung $y_1 = \text{const.}$ sind dann, wie früher bemerkt worden, *erstens* die Coefficienten *gerader* Ordnung

$$(16.)\quad \frac{D_2}{D_0}, \frac{D_4}{D_0}, \ldots$$

und *zweitens* alle Producte aus je zweien und die Quadrate von den Coefficienten

ungerader Ordnung $\frac{D_1}{D_0}, \frac{D_3}{D_0}, \ldots$. Man kann nun den Beweis führen, dass für jeden Werth von l der Ausdruck (15.) eine Invariante der Form $\overline{g}(dy)$ ist, und dass für $l=1$ die Ausdrücke (16.) Invarianten der Form $\overline{g}(dy)$ sind.

Der Ausdruck $(dy_\sigma \overset{2}{dy}_{\sigma'} - \overset{2}{dy}_\sigma dy_{\sigma'})(\overset{1}{dy}_\tau \overset{3}{dy}_{\tau'} - \overset{3}{dy}_\tau \overset{1}{dy}_{\tau'})$ in der Gleichung (14.) ist gleich der Determinante des Systems von vier Grössen

$$\begin{array}{ll} dy_\sigma \overset{1}{dy}_\tau + \overset{2}{dy}_\sigma \overset{3}{dy}_\tau, & dy_{\sigma'} \overset{1}{dy}_\tau + \overset{2}{dy}_{\sigma'} \overset{3}{dy}_\tau, \\ dy_\sigma \overset{1}{dy}_{\tau'} + \overset{2}{dy}_\sigma \overset{3}{dy}_{\tau'}, & dy_{\sigma'} \overset{1}{dy}_{\tau'} + \overset{2}{dy}_{\sigma'} \overset{3}{dy}_{\tau'}. \end{array}$$

Man folgert nun leicht aus den früher entwickelten Grundsätzen, dass, wenn in der Covariante $\overline{\Omega}(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy})$ einer ganz beliebig gewählten Form $\overline{g}(dy)$ dieser Ausdruck durch den Ausdruck

$$\frac{\overline{E}_{\sigma,\tau}\overline{E}_{\sigma',\tau'} - \overline{E}_{\sigma',\tau}\overline{E}_{\sigma',\tau}}{\overline{E}^2} = \frac{1}{\overline{E}} \frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial e_{\sigma,\tau} \partial e_{\sigma',\tau'}}$$

ersetzt wird, die Invariante der Form $\overline{g}(dy)$

$$(17.) \qquad \tfrac{1}{2}\overline{\omega} = \tfrac{1}{2} \sum_{\sigma,\tau,\sigma',\tau'} (\sigma, \sigma', \tau, \tau') \frac{1}{\overline{E}} \frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial e_{\sigma,\tau} \partial e_{\sigma',\tau'}}$$

entsteht, deren Werth, negativ genommen, als eine Verallgemeinerung des *Gauss*ischen Krümmungsmasses betrachtet werden darf. Durch die entsprechende Substitution wird die linke Seite der Gleichung (14.) in den Ausdruck $-\left(\frac{D_2}{D_0}\right)$ aus (15.) verwandelt. Die Gleichung

$$(18.) \qquad -\left(\frac{D_2}{D_0}\right) = \tfrac{1}{2}\overline{\omega}$$

erweist, dass der Ausdruck $\left(\frac{D_2}{D_0}\right)$ gleich der Invariante der Form $\overline{g}(dy)$ ist, die wir mit $-\frac{1}{2}\overline{\omega}$ bezeichnet haben. Der Ausdruck $\left(\frac{D_2}{D_0}\right)$ wird aber dem *Gauss*ischen Krümmungsmasse der Form $\overline{g}(dy)$ gleich, sobald $n-l=2$ ist.

In dem Falle, dass $l=1$ ist, reducirt sich die Substitution des Ausdrucks (α, β) für $\delta y_\alpha \delta y_\beta$ auch in den Formeln (7.) und (14.) auf die nicht symbolische Substitution $\delta y_1 = \gamma(1, 1)$. Die aus (14.) folgenden Gleichungen

$$-(\mu_{\sigma,\tau}\mu_{\sigma',\tau'} - \mu_{\sigma,\tau'}\mu_{\sigma',\tau}) = \tfrac{1}{2}(\sigma, \sigma', \tau, \tau')$$

haben nun nicht nur eine symbolische, sondern eine wirkliche Bedeutung, und lehren, dass, weil die Form $\overline{g}(dy)$ aus einer Form mit constanten Coefficienten durch Hinzufügen der *einen* Gleichung $y_1 = \text{const.}$ entstanden ist, die Coef-

ficienten $(\sigma, \sigma', \tau, \tau')$ der zugeordneten quadrilinearen Form $\overline{\Omega}(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy})$ beziehungsweise gleich Determinanten der zweiten Ordnung sind, und deshalb durch diejenigen Relationen von höherer als der ersten Ordnung zusammenhängen, welche zwischen jenen Determinanten bestehen. Die Ausdrücke (16.) können nach bekannten Sätzen durch diese Determinanten der zweiten Ordnung und durch die Coefficienten der Form $\overline{g}(dy)$ dargestellt werden, und weil diese Determinanten beziehungsweise den Coefficienten der Form $\overline{\Omega}(dy, \overset{2}{dy}, \overset{1}{dy}, \overset{3}{dy})$ gleich sind, so werden jene Ausdrücke, welche Invarianten der Form $f(dx)$ und des Systems $y_\alpha = \text{const.}$ sind, mit Nothwendigkeit auch Invarianten der Form $\overline{g}(dy)$. Das aber sollte bewiesen werden.

Wenn man in dem Falle $l = 1$ voraussetzt, dass $f(dx) = \frac{1}{2}\sum_a dx_a^2$ sei, so wird $\frac{D_{n-1}}{D_0}$ derjenige Ausdruck, welchen Herr *Kronecker* an dem früher citirten Orte als eine Verallgemeinerung des *Gauss*ischen Krümmungsmasses bezeichnet hat. Aus dem Obigen folgt, dass dieser Ausdruck für jeden ungeraden Werth von n eine Invariante der Form $\overline{g}(dy)$ ist. Ob das Quadrat dieses Ausdruckes, welches eine Invariante der Form $f(dx)$ und der Gleichung $y_1 = \text{const.}$ ist, auch für einen geraden Werth von n eine Invariante der Form $\overline{g}(dy)$ sei, bedarf einer näheren Untersuchung.

Bonn, den 9. Januar 1870.

Zur Transformation der ternären quadratischen Formen.

(Von Herrn *Paul Bachmann* in Breslau.)

Herr *Hermite* hat in diesem Journal Bd. 47, pag. 315 Formeln gegeben, welche alle Transformationen einer ternären quadratischen Form in sich selbst enthalten. Soviel mir bekannt ist, sind die Bedingungen noch nicht angegeben worden, unter welchen diese Formeln nur diejenigen Transformationen liefern, deren Coefficienten ganze Zahlen sind. Indem ich diese Bedingungen hier mittheilen will, beschränke ich mich auf den besonders einfachen Fall, in welchem folgende Voraussetzungen gelten: Sind $f = \binom{a, a', a''}{b, b', b''}$ und $F = \binom{A, A', A''}{B, B', B''}$ die ternäre quadratische Form und ihre Adjungirte, so sollen a, a', a'', A, A', A'' ungerade sein; dadurch wird die Determinante Δ eine ungerade Zahl, welche aus lauter ungleichen Primfactoren bestehen möge, und b, b', b'', B, B', B'' werden gerade Zahlen. Ferner ist $AA'A'' \equiv 3 \pmod 4$, d. h. unter den drei Zahlen A, A', A'' ist entweder eine oder jede von der Form $4n+3$. Von diesen beiden Möglichkeiten schliessen wir im Folgenden die letztere völlig aus. —

1. Die *Hermite*schen Formeln enthalten drei Unbestimmte als Elemente, von welchen man bei einer genaueren Betrachtung der Formeln nachweisen kann, dass sie behufs ganzzahliger Transformationen rational zu wählen sind, vorausgesetzt, dass die Determinante Δ von Null verschieden ist. Bezeichnen hiernach p, q, q', q'' vier ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler, so nehmen die *Hermite*schen Transformationsgleichungen folgende Gestalt an *):

*) Wo in dieser Abhandlung die Ableitungen von f oder F nach drei gleichnamigen Grössen vorkommen, bedeuten f oder F stets die Werthe, welche sie durch Substitution jener Grössen an Stelle der Unbestimmten annehmen.

$$
(1.)\quad \left\{\begin{aligned}
&[p^2-F(q,q',q'')]\,X\\
&=\left(p^2+F+2b'pq'-2b''pq''-q\frac{\partial F}{\partial q}\right)x+\left(2bpq'-2a'pq''-q'\frac{\partial F}{\partial q}\right)x'\\
&\qquad+\left(2a''pq'-2bpq''-q''\frac{\partial F}{\partial q}\right)x'',\\
&[p^2-F(q,q',q'')]\,X'\\
&=\left(2apq''-2b'pq-q\frac{\partial F}{\partial q'}\right)x+\left(p^2+F+2b''pq''-2bpq-q'\frac{\partial F}{\partial q'}\right)x'\\
&\qquad+\left(2b'pq''-2a''pq-q''\frac{\partial F}{\partial q'}\right)x'',\\
&[p^2-F(q,q',q'')]\,X''\\
&=\left(2b''pq-2apq'-q\frac{\partial F}{\partial q''}\right)x+\left(2a'pq-2b''pq'-q'\frac{\partial F}{\partial q''}\right)x'\\
&\qquad+\left(p^2+F+2bpq-2b'pq'-q''\frac{\partial F}{\partial q''}\right)x''.
\end{aligned}\right.
$$

Hierin sind also p, q, q', q'' so zu wählen, dass die neun Coefficienten zur Rechten, welche wir der Reihe nach durch (1), (2), ... (9) bezeichnen wollen, durch $P=p^2-F(q,q',q'')$ getheilt, ganze Zahlen ergeben. Untersuchen wir, welche Werthe P haben kann. Aus den Gleichungen aber:

$$
\begin{aligned}
(1)+\quad (5)+\quad (9) &= 4p^2-P,\\
a.(1)+b''.(4)+b'.(7) &= a(p^2+F)-2\Delta q^2,\\
b''.(2)+a'.(5)+b.(8) &= a'(p^2+F)-2\Delta q'^2,\\
b'.(3)+b.(6)+a''.(9) &= a''(p^2+F)-2\Delta q''^2
\end{aligned}
$$

ergeben sich folgende Congruenzbedingungen:

$$
(2.)\quad 4p^2\equiv 0,\ 2ap^2\equiv 2\Delta q^2,\ 2a'p^2\equiv 2\Delta q'^2,\ 2a''p^2\equiv 2\Delta q''^2 \pmod{P}.
$$

Hieraus schliesst man, dass $4\Delta p^2$, $4\Delta q^2$, $4\Delta q'^2$, $4\Delta q''^2$ und, da p, q, q', q'' ohne gemeinsamen Theiler sind, auch 4Δ durch P theilbar sein muss. Nach den Anfangs gemachten Voraussetzungen hat deshalb P die Form $2^h.\delta$, worin δ ein Theiler von Δ, der auch in p aufgeht, und h eine der Zahlen 0, 1, 2 ist. So finden wir: Damit die Transformation ganzzahlig wird, müssen die ganzen Zahlen p, q, q', q'' einer Gleichung

$$
(3.)\quad p^2-F(q,q',q'') = 2^h.\delta
$$

Genüge leisten, während $p\equiv 0 \pmod{\delta}$ ist. Für den Fall $h=2$ lehren ausserdem die Congruenzen (2.), dass p, q, q', q'' ungerade sein müssen.

Umgekehrt, wenn für einen oder den andern Divisor δ von Δ die Gleichung (3.) in der erwähnten Weise auflösbar ist, so geben die Zahlen p, q, q', q'' eine ganzzahlige Transformation. — In der That, aus der Gleichung (3.) und wegen $p \equiv 0 \pmod{\delta}$ folgt auch $F(q, q', q'') \equiv 0 \pmod{\delta}$. Nun besteht die Gleichung *)

$$(4.)\quad \begin{cases} F(x, x', x'') . F(q, q', q'') \\ = \left(x . \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q} + x' . \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q'} + x'' . \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q''}\right)^2 - \Delta . f(x'q''-x''q', x''q-xq'', xq'-x'q) \end{cases}$$

und ergiebt für alle ganzzahligen x, x', x'' die Congruenz

$$x . \tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q} + x' . \tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q'} + x'' . \tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q''} \equiv 0 \pmod{\delta}$$

und folglich

$$(5.)\quad \tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q} \equiv 0, \quad \tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q'} \equiv 0, \quad \tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q''} \equiv 0 \pmod{\delta}.$$

Ist nun zunächst $h = 0$ oder $h = 1$, so sind nach diesen Congruenzen die Grössen $\frac{\partial F}{\partial q}, \frac{\partial F}{\partial q'}, \frac{\partial F}{\partial q''}$ durch P theilbar, ferner auch die in $2p$ multiplicirten Theile der Coefficienten, endlich auch $p^2 + F = 2p^2 - P$. — Ist dagegen $h = 2$, so werden, wenn p, q, q', q'' eine Auflösung der Gleichung (3.) in ungeraden Zahlen bedeuten, während die in b, b', b'' multiplicirten Theile der Coefficienten offenbar durch 4 aufgehen, die andern Theile das Doppelte der Summe zweier ungeraden Zahlen, indem

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q} = Aq + B''q' + B'q'', \quad \tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q'} = B''q + A'q' + Bq'', \quad \tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q''} = B'q + Bq' + A''q''$$

ungerade sind. Also sind die Coefficienten, welche, wie zuvor, durch δ theilbar sind, auch durch 4 und folglich durch $4\delta = P$ theilbar.

Es ist jedoch zu bemerken, dass der Fall $h = 2$ bei unsern Voraussetzungen nicht in Betracht kommt. Sei zuerst $\Delta \equiv 1$, d. h. $aa'a'' \equiv 3 \pmod{4}$; setzt man $a = 2\alpha + 1$, $a' = 2\alpha' + 1$, $a'' = 2\alpha'' + 1$, so ergiebt sich $\alpha + \alpha' + \alpha'' \equiv 1 \pmod{2}$. Soll andrerseits die Gleichung $p^2 - F(q, q', q'') = 4\delta$ eine Lösung in ungeraden Zahlen p, q, q', q'' zulassen, so muss, da δ ungerade ist, die Congruenz $p^2 - F(q, q', q'') \equiv 4 \pmod{8}$ bestehen; folglich muss sein

$$F(q, q', q'') \equiv 5 \quad \text{oder} \quad A + A' + A'' + 2(B + B' + B'') \equiv 5,$$

---

*) S. meine Abh. in diesem Journal Bd. 70 pag. 366. Es sei hier bemerkt, dass in derselben unter (p, q, r) eine eigentlich primitive Form zu verstehen ist, deren Determinante zu Δ prim ist.

was nach einfachen Reductionen in $aa'+a'a''+a''a \equiv 3 \pmod 8$ oder in $(a+1)(a'+1)(a''+1) \equiv aa'a''+1 \pmod 2$ übergeht. Die beiden Congruenzen (mod. 2) erfordern aber, dass a, a', a'', folglich auch A, A', A'' von der Form $4n+3$ sind. — Ganz ebenso findet man, dass für den Fall $\Delta \equiv 3 \pmod 4$ die Coefficienten a, a', a'' von der Form $4n+1$, also A, A', A'' wieder von der Form $4n+3$ sein müssten. Nach unsern Voraussetzungen können daher ungerade Auflösungen der Gleichung (3.) nicht existiren. —

Das erhaltene Resultat lässt sich so aussprechen: *Man erhält alle ganzzahligen Transformationen, wenn man für p, q, q', q'' alle diejenigen Auflösungen der Gleichung $p^2 - F(q,q',q'') = 2^h.\delta$ wählt, bei welchen $p \equiv 0 \pmod \delta$ ist. Diese Gleichung vertritt die Stelle von mehreren, welche erhalten werden, indem für h jeder der Werthe 0, 1, für δ jeder (positive oder negative) Divisor von Δ gesetzt wird.* —

2. Herr *Hermite* hat bereits bemerkt (a. a. O. pag. 324), *dass die quaternäre Form $\xi^2 - F(x,x',x'')$ die Eigenschaft hat, durch Multiplication sich zu reproduciren.* Man beweist dies leicht, indem man dem Producte

$$[\xi^2 - F(x,x',x'')].[\eta^2 - F(y,y',y'')]$$

mit Hilfe der Formel (4.) die Form giebt

$$\left(\xi\eta + x.\tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y} + x'.\tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y'} + x''.\tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y''}\right)^2 - [F(\eta x+\xi y, \eta x'+\xi y', \eta x''+\xi y'') + \Delta.f(s,s',s'')],$$

in welcher

$$(6.) \qquad s = x'y''-x''y', \quad s' = x''y-xy'', \quad s'' = xy'-x'y$$

gesetzt ist, und indem man in dieser das subtractive Glied gleich

$$F(\eta x+\xi y+t, \eta x'+\xi y'+t', \eta x''+\xi y''+t'')$$

zu machen sucht dadurch, dass man der Gleichung

$$(2\eta x+2\xi y+t).\tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial t} + (2\eta x'+2\xi y'+t').\tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial t'} + (2\eta x''+2\xi y''+t'').\tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial t''} = \Delta.f(s,s',s'')$$

Genüge leistet. Setzt man nun

$$(7.) \qquad t = \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial s}, \qquad t' = \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial s'}, \qquad t'' = \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial s''},$$

so ergiebt sich

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial t} = \Delta s, \qquad \tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial t'} = \Delta s', \qquad \tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial t''} = \Delta s'',$$

und da andrerseits

$$xs+x's'+x''s'' = 0, \qquad ys+y's'+y''s'' = 0$$

ist, so leisten die Werthe (7.) für t, t', t'' der Forderung Genüge.

Es besteht also folgende Gleichung

$$(8.)\quad [\xi^2 - F(x, x', x'')] \cdot [\eta^2 - F(y, y', y'')] = \zeta^2 - F(z, z', z''),$$

wenn man setzt:

$$(9.)\quad \begin{cases} \zeta = \xi\eta + x \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y} + x' \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y'} + x'' \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y''}, \\ z = \eta x + \xi y + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial s}, \quad z' = \eta x' + \xi y' + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial s'}, \quad z'' = \eta x'' + \xi y'' + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial s''}. \end{cases}$$

3. Mit Hülfe dieses Resultates können wir nun zeigen, *dass man für ein bestimmtes System h, δ sämmtliche Auflösungen der Gleichung $p^2 - F(q, q', q'') = 2^h \cdot \delta$, bei welchen $p \equiv 0 \pmod{\delta}$ ist, erhält, indem man irgend eine derselben mit sämmtlichen Auflösungen der Gleichung*

$$(10.)\quad t^2 - F(u, u', u'') = 1$$

nach der vorhergehenden Regel zusammensetzt.

In der That, erstens ist offenbar, dass man auf diese Weise nur Auflösungen der Gleichung (3.) von der bezeichneten Art erhält. Denn setzt man

$$[t^2 - F(u, u', u'')] \cdot [p^2 - F(q, q', q'')] = p_1^2 - F(q_1, q_1', q_1''),$$

so wird

$$p_1 = tp + u \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q} + u' \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q'} + u'' \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q''}.$$

Folglich bilden p_1, q_1, q_1', q_1'' eine Auflösung der Gleichung (3.), bei welcher, da $p \equiv 0 \pmod{\delta}$ angenommen ist, nach den Congruenzen (5.) auch $p_1 \equiv 0 \pmod{\delta}$ ist.

Zweitens lässt sich zeigen, dass aus je zweien der bezeichneten Auflösungen der Gleichung (3.) eine Auflösung der Gleichung (10.) abgeleitet werden kann. — In der That, wenn p, q, q', q''; p_1, q_1, q_1', q_1'' zwei solche Auflösungen sind, so erhält man

$$(11.)\quad [p_1^2 - F(q_1, q_1', q_1'')] \cdot [p^2 - F(-q, -q', -q'')] = p_2^2 - F(q_2, q_2', q_2'') = 2^{2h} \cdot \delta^2,$$

wenn man setzt:

$$(12.)\quad \begin{cases} p_2 = pp_1 - \left(q_1 \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q} + q_1' \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q'} + q_1'' \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q''}\right), \\ q_2 = -p_1 q + pq_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial (q'q_1'' - q''q_1')}, \quad q_2' = -p_1 q' + pq_1' + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial (q''q_1 - qq_1'')}, \\ q_2'' = -p_1 q'' + pq_1'' + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial (qq_1' - q'q_1)}. \end{cases}$$

Nun findet man, unter Anwendung der Formel (4.), den Voraussetzungen nach leicht folgende Congruenz:

$$f(q'q_1'' - q''q_1', q''q_1 - qq_1'', qq_1' - q'q_1) \equiv 0 \pmod{\delta}.$$

Setzt man zur Abkürzung die hierin enthaltenen Argumente gleich z, z', z'', und

$$u = qx + q'x' + q''x'', \qquad u_1 = q_1 x + q_1' x' + q_1'' x'',$$

so findet man für irgend welche ganze Zahlen x, x', x'' die Gleichung

$$F(x'z''-x''z', x''z-xz'', xz'-x'z)$$
$$= u_1^2 . F(q, q', q'') - 2u_1 u\left(q_1 . \tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q} + q_1' . \tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q'} + q_1'' . \tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q''}\right) + u^2 . F(q_1, q_1', q_1''),$$

also welches auch x, x', x'' sein mögen, die Congruenz

$$F(x'z''-x''z', x''z-xz'', xz'-x'z) \equiv 0 \pmod{\delta}.$$

Aus der Gleichung

$$f(x, x', x'') . f(z, z', z'')$$
$$= \left(x . \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z} + x' . \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z'} + x'' . \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z''}\right)^2 - F(x'z''-x''z', x''z-xz'', xz'-x'z)$$

folgt also für alle ganzzahligen x, x', x'' die Congruenz

$$x . \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z} + x' . \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z'} + x'' . \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z''} \equiv 0 \pmod{\delta}$$

und folglich

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial (q'q_1''-q''q_1')} \equiv 0, \quad \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial (q''q_1-qq_1'')} \equiv 0, \quad \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial (qq_1'-q'q_1)} \equiv 0 \pmod{\delta}.$$

Hiernach lassen die Gleichungen (12.) *zunächst erkennen, dass* p_2, q_2, q_2', q_2'' *den Theiler* δ *gemeinsam haben.*

Sie haben aber auch, wenn $h = 1$ *ist, den gemeinsamen Theiler* 2. Um dies zu beweisen, müssen verschiedene Fälle unterschieden werden, jenachdem q, q', q'' den Grössen q_1, q_1', q_1'' resp. gleichartig oder ungleichartig sind. Da in allen der Gang des Beweises derselbe bleibt, beschränken wir uns hier auf die genauere Betrachtung desjenigen, in welchem $q_1 \equiv q$, $q_1' \equiv q'$, $q_1'' \equiv q''+1 \pmod{2}$ sind. Da

$$p^2 - F(q, q', q'') = 2\delta, \quad p_1^2 - F(q_1, q_1', q_1'') = 2\delta,$$

findet man

$$p_1^2 - F(q_1, q_1', q_1'') \equiv p_1^2 - (q^2+q'^2+q''^2) - 1 \equiv 0,$$
$$p^2 - F(q, q', q'') \equiv p^2 - (q^2+q'^2+q''^2) \equiv 0,$$

also, $p_1 \equiv p+1 \pmod{2}$. Daraus folgt $q_2 \equiv q_2' \equiv q+q'$, $q_2'' \equiv p+q'' \pmod{2}$.

Ist nun p gerade, also $F(q, q', q'')$ oder $Aq^2+A'q'^2+A''q''^2 \equiv 2 \pmod{4}$, so ist p_1 ungerade, also $F(q_1, q_1', q_1'')$ oder $Aq_1^2+A'q_1'^2+A''q_1''^2 \equiv 3 \pmod{4}$, was mit Bezug auf die Voraussetzungen auch so geschrieben werden kann:

$Aq^2+A'q'^2+A''q''^2+A''(2q''+1) \equiv 3$ oder $A''(2q''+1) \equiv 1 \pmod 4$. Wäre $A'' \equiv 3 \pmod 4$, so müsste q'' ungerade sein, woraus $Aq^2+A'q'^2 \equiv 3 \pmod 4$ folgen würde; dies ist nur so möglich, dass noch eine der Grössen A, A' von der Form $4n+3$ ist, gegen unsere Voraussetzungen. Man müsste also $A'' \equiv 1 \pmod 4$ voraussetzen, wo dann q'' und folglich auch q_2'' gerade würde; ferner muss $Aq^2+A'q'^2 \equiv 2 \pmod 4$ sein, was nur dann möglich, wenn q, q' ungerade, folglich q_2 und q_2' gerade sind. Da so q_2, q_2', q_2'' gerade gefunden sind, muss es auch p_2 sein. Wird aber p ungerade vorausgesetzt, so ist p_1 gerade, und man gelangt zu denselben Resultaten, wenn man von der zweiten Gleichung ausgeht.

Wir haben im Vorigen bewiesen, dass p_2, q_2, q_2', q_2'' durch $2^h.\delta$ theilbar sind. Schreibt man daher in den Gleichungen (12.) für jene Grössen resp. $2^h\delta.t$, $2^h\delta.u$, $2^h\delta.u'$, $2^h\delta.u''$, so bestimmen diese Gleichungen eine Auflösung der Gleichung (10.) in ganzen Zahlen t, u, u', u''.

Drittens erhält man aus den Gleichungen (12.) umgekehrt die folgenden:

$$p_1 = tp+u.\tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q}+u'.\tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q'}+u''.\tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q''},$$

$$q_1 = tq+pu+\tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial(u'q''-u''q')}, \quad q_1' = tq'+pu'+\tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial(u''q-uq'')},$$

$$q_1'' = tq''+pu''+\tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial(uq'-u'q)},$$

welche zeigen, dass die Auflösung p_1, q_1, q_1', q_1'' der Gleichung (3.) aus der Zusammensetzung der Auflösung p, q, q', q'' derselben Gleichung mit der Auflösung t, u, u', u'' der Gleichung (10.) nach der Formel

$$p_1^2-F(q_1, q_1', q_1'') = [t^2-F(u, u', u'')].[p^2-F(q, q', q'')]$$

erhalten werden kann.

Somit ist der Satz vollständig bewiesen. —

Der zweite Punkt des Beweises, den wir rein arithmetisch gegeben haben, lässt sich auch aus den Transformationsgleichungen folgendermassen ableiten. Man bezeichne mit S die, durch die Gleichungen (1.) definirte Transformation der Form f in sich selbst, während p, q, q', q'' eine bestimmte Auflösung der Gleichung (3.) auf ein gegebenes Werthsystem h, δ bezüglich bezeichnen. Ist S_1 die ähnliche durch eine Lösung p_1, q_1, q_1', q_1'' derselben Gleichung bestimmte Transformation, so erhält man durch successive Anwendung von S und S_1 eine neue Transformation von f in sich selbst; und zwar zeigt eine genauere Untersuchung, *dass man die zusammengesetzte Transformation aus den Gleichungen* (1.) *erhält, indem man darin* p, q, q', q''

durch diejenigen Grössen p_2, q, q'_2, q''_2 *ersetzt, die nach der Regel der No.* 2 *durch Zusammensetzung der Ausdrücke*

$$p^2-F(q,q',q'') \quad \text{und} \quad p_1^2-F(q_1,q'_1,q'') \quad \text{in} \quad p_2^2-F(q_2,q'_2,q'')$$

erhalten werden. Den grössten gemeinsamen Theiler, welchen p_2, q_2, q'_2, q''_2 etwa haben, bezeichnen wir mit d, und setzen $p_2=dt$, $q_2=du$, $q'_2=du'$, $q''_2=du''$. Dividirt man die Gleichungen (1.) durch d^2, so erhält man ein ähnliches System von Gleichungen, in welchen p, q, q', q'' durch t, u, u', u'' ersetzt sind, und welche die zusammengesetzte Transformation $S.S_1$ darstellen. Der Ausdruck $t^2-F(u,u',u'')$, dessen Werth gleich $\frac{2^{2h}.\delta^2}{d^2}$ ist, muss also von der Form $2^{h'}.\delta'$ sein, wo $h'=0$ oder 1, δ' ein Theiler von Δ ist, was nur möglich ist, wenn $h'=0$, $\delta'=1$. Der grösste gemeinsame Theiler d ist also gleich $2^h.\delta$, und t, u, u', u'' eine ganzzahlige Auflösung der Gleichung (10.).

4. Als Resultat dieser Untersuchung können wir folgenden Satz aussprechen:

Bezeichnen wir mit S_0, S_1, S_2, ... *die, stets in endlicher Anzahl vorhandenen singulären Transformationen, welche aus den Gleichungen* (1.) *entstehen, indem man darin für* p, q, q', q'' *je eine Auflösung der Gleichungen von der Form* $p^2-F(q,q',q'')=2^h.\delta$ *setzt, deren* p *durch* δ *theilbar ist, mit* T *aber die Transformationen, welche den sämmtlichen Lösungen* p, q, q', q'' *der Gleichung* $p^2-F(q,q',q'')=1$ *entsprechen, so zerfallen alle möglichen ganzzahligen Transformationen in die Gruppen:*

$$T.S_0, \quad T.S_1, \quad T.S_2, \quad \ldots.$$

Nehmen wir als Beispiel die Form $x^2+x'^2-x''^2$, deren Adjungirte ihr selbst gleich ist; da ihre Determinante gleich Eins ist, zerfällt die Gleichung (3.) hier in die vier folgenden:

$$(13^a.)\quad p^2-q^2-q'^2+q''^2=1, \qquad (13^b.)\quad p^2-q^2-q'^2+q''^2=2,$$
$$(13^c.)\quad p^2-q^2-q'^2+q''^2=-1, \qquad (13^d.)\quad p^2-q^2-q'^2+q''^2=-2.$$

Man erhält daher alle Transformationen der Form $x^2+x'^2-x''^2$ in sich selbst mittelst folgender Formeln

$$(14.)\quad \begin{cases} (p^2-q^2-q'^2+q''^2)X \\ = (p^2-q^2+q'^2-q''^2)x-2(pq''+qq')x'-2(pq'+qq'')x'', \\ (p^2-q^2-q'^2+q''^2)X' \\ = 2(pq''-qq')x+(p^2+q^2-q'^2-q''^2)x'+2(pq-q'q'')x'', \\ (p^2-q^2-q'^2+q''^2)X'' \\ = -2(pq'-qq'')x+2(pq+q'q'')x'+(p^2+q^2+q'^2+q''^2)x'', \end{cases}$$

wenn darin für p, q, q', q'' alle ganzzahligen Auflösungen der Gleichungen (13.) substituirt werden. Der Auflösung $p=1,\ q=0,\ q'=0,\ q''=-1$ der Gleichung (13^b.) entspricht die singuläre Transformation $S=\begin{pmatrix}0, & 1, & 0\\ -1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}$. Jede andere, einer Auflösung dieser Gleichung entsprechende Transformation muss also erhalten werden können, indem man S mit einer der Gleichung (13^a.) entsprechenden Transformation zusammensetzt. So ergiebt sich in der That für $p=3,\ q=4,\ q'=0,\ q''=3$ die Transformation $S_1=\begin{pmatrix}-8, & -9, & -12\\ 9, & 8, & 12\\ 12, & 12, & 17\end{pmatrix}$, und es ist $S_1=T.S$, worin T die, der Auflösung $p=0,\ q=2,\ q'=-2,\ q''=3$ der Gleichung (13^a.) entsprechende Transformation $\begin{pmatrix}-9, & +8, & -12\\ 8, & -9, & 12\\ 12, & -12, & 17\end{pmatrix}$ bezeichnet.

Bemerken wir ferner, dass aus einer Auflösung $p=p_0,\ q=q_0,\ q'=q_0',\ q''=q_0''$ der Gleichungen (13^c.) und (13^d.) sofort die Auflösung $p=q_0,\ q=p_0,\ q'=q_0'',\ q''=q_0'$ der Gleichungen (13^a.) und (13^b.) resp. sich ergiebt, so finden wir leicht, dass die den Gleichungen (13^c.) und (13^d.) entsprechenden Transformationen resp. aus den zu den Gleichungen (13^a.) und (13^b.) gehörigen erhalten werden, indem man x', x'' in $-x'$, $-x''$ verwandelt, d. h. mittelst der Transformation $S_0=\begin{pmatrix}1, & 0, & 0\\ 0, & -1, & 0\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$. Hiernach erhält man alle Transformationen der Form $x^2+x'^2-x''^2$ in sich selbst mittelst der Formeln

$$T,\quad T.S_0,\quad T.S,\quad T.S.S_0.$$

Betrachtet man aber die der zweiten und vierten dieser Formeln entsprechenden als unwesentlich von den andern verschieden, so kann man sagen:

Man erhält alle Transformationen der Form $x^2+x'^2-x''^2$ in sich selbst mittelst der Gleichungen (14.), *wenn darin für p, q, q', q'' alle ganzzahligen Auflösungen der Gleichungen* (13^a.) *und* (13^b.) *substituirt werden.* In dieser Form ist unser Satz, wie leicht zu sehen, mit dem in *Gauss*' op. II pag. 311 befindlichen identisch; in der That, von den dort unterschiedenen beiden Arten die Gleichung $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ zu befriedigen, entspricht die erstere der Gleichung (13^a.), die zweite der Gleichung (13^b.).

Breslau, im November 1869.

Ueber ein Randintegral.

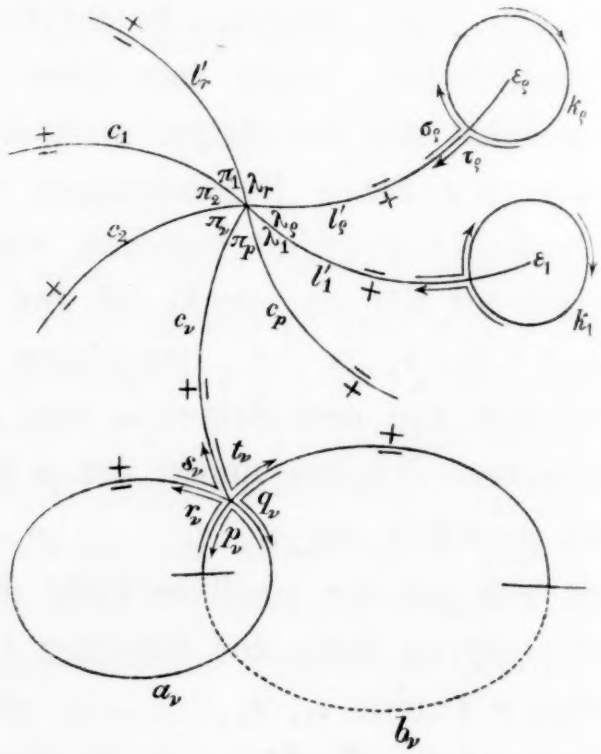
(Von Herrn *F. E. Prym* in Würzburg.)

Eine Menge wichtiger Eigenschaften, die den von mir in Bd. 70, Heft 4 dieses Journals aufgestellten Functionen $u+vi$ zukommen, kann, nachdem zuvor bestimmte einfachste Formen dieser Functionen als Normalformen fixirt sind, erhalten werden durch die Betrachtung einer gewissen Art von Randintegralen. Um bei späteren Mittheilungen nicht immer wieder von neuem specielle Fälle dieser Randintegrale betrachten zu müssen, soll hier für dieselben die allgemeinste Form gegeben und behandelt werden.

1.

Gegeben sei eine Fläche T'' von ähnlicher Beschaffenheit wie die in art. 1. und 2. meiner eben erwähnten Arbeit gebildete Fläche T''. Die p Schnitte c und die r nach den r Punkten ε führenden Schnitte l seien so gezogen, dass dieselben in der Ordnung $c_1, c_2, \ldots, c_p, l_1, l_2, \ldots, l_r$ aufeinanderfolgen, wenn man ihren gemeinsamen Mündungspunkt positiv (d. h. umgekehrt wie der Zeiger einer Uhr) umkreist. Die in den erwähnten Artikeln getroffenen Bestimmungen und gewählten Bezeichnungen lasse man sämmtlich ungeändert bestehen, und füge die folgenden neu hinzu. Den gemeinsamen Mündungspunkt der drei Schnitte a_ν, b_ν, c_ν bezeichne man fünffach als $p_\nu, q_\nu, r_\nu, s_\nu, t_\nu$, jenachdem man sich in dem einen oder andern der fünf, von den drei Schnitten dort gebildeten Winkelräume befindet. Den gemeinsamen Mündungspunkt der p Schnitte c und der r Schnitte l bezeichne man $\overline{p+r}$fach als $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_p, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, und zwar als π_ν, wenn man sich auf der positiven Seite des Schnittes c_ν, als λ_ϱ, wenn man sich auf der positiven Seite des Schnittes l_ϱ befindet. Man scheide dann die sämmtlichen r Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$ durch r Curven k aus der Fläche T'' aus, allgemein den Punkt ε_ϱ durch eine, weder sich selbst noch irgend eine der $r-1$ übrigen Curven k schneidende Curve k_ϱ, die man von einem Punkte σ_ϱ auf der negativen Seite des Schnittes l_ϱ durch die Fläche T'' um den Punkt ε_ϱ herum bis zu dem, dem Punkte σ_ϱ entsprechenden Punkte τ_ϱ auf der po-

sitiven Seite von l_ϱ zieht. Der Punkt σ_ϱ und die Gestalt der Curve k_ϱ seien zunächst so gewählt, dass dieselbe, wenn ε_ϱ ein Verzweigungspunkt ist, keinen weitern Verzweigungspunkt der Fläche T'', dass dieselbe dagegen, wenn ε_ϱ kein Verzweigungspunkt ist, überhaupt keinen Verzweigungspunkt mit dem Punkte ε_ϱ zusammen einschliesst: und ferner so, dass wenn der Punkt ε_ϱ im Endlichen liegt, die Punkte der Curve k_ϱ alle denselben Abstand vom Punkte ε_ϱ, wenn dagegen der Punkt ε_ϱ im Unendlichen liegt, die Punkte der Curve k_ϱ alle denselben Abstand vom Punkte $z = 0$ haben. Diesen Annahmen gemäss wird also die Curve k_ϱ, wenn ε_ϱ ein $\overline{\nu-1}$facher Verzweigungspunkt ist, sich ν-mal kreisförmig um den Punkt ε_ϱ winden müssen, um vom Punkte σ_ϱ zum Punkte τ_ϱ zu gelangen, dagegen nur einmal, wenn ε_ϱ kein Verzweigungspunkt ist. Bei der Curve k_ϱ nenne man die dem Punkte ε_ϱ zugewandte Seite die innere, die andere die äussere, und das, durch diese Curve aus der Fläche T'' ausgeschiedene, den Punkt ε_ϱ enthaltende Flächenstück die Umgebung des Punktes ε_ϱ. Denjenigen Theil des Schnittes l_ϱ, der sich von dem gemeinsamen Mündungspunkte aller Schnitte c und l bis an die Curve k_ϱ erstreckt, nenne man l'_ϱ. Die neue Fläche, die aus der Fläche T'' durch Ausscheidung der r Punkte ε vermittelst der Curven k entsteht, und die ebenfalls einfach zusammenhangend ist, bezeichne man als Fläche T^*. Derselben fehlen Flächentheile, die der T'' angehören. Ihre Begrenzung wird gebildet von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c, l' und von den äusseren Seiten der Curven k. Längs dieser Begrenzung markire man die positive Richtung des Durchlaufens durch Pfeile. Man bemerke, dass dabei die aus T'' ausgeschiedenen, nicht zu T^* gehörigen Flächentheile, oder, was dasselbe, die Punkte ε negativ umlaufen werden. Die nebenstehende Figur veranschaulicht eine solche Fläche T^*.



Zugleich mit der ursprünglichen Fläche T'' seien gegeben zwei Functionen der complexen Variable $z = x + yi$, ω die eine, $\acute{\omega}$ die andere, mit folgenden Eigenschaften. Mit Ausnahme der r Punkte ε sollen die Functionen in der

ganzen übrigen Fläche T'' allenthalben einwerthig und stetig sein. In dem Punkte ε_ϱ $(\varrho = 1, 2, \ldots, r)$ sollen ω und $\acute{\omega}$ unstetig werden, und zwar in der, durch endliche Ausdrücke von der Form

$$\varphi_\varrho(r_\varrho) = L_\varrho ln r_\varrho + L_{\varrho 1}\frac{1}{r_\varrho} + L_{\varrho 2}\frac{1}{r_\varrho^2} + \cdots + L_{\varrho, m_\varrho}\frac{1}{r_\varrho^{m_\varrho}},$$

$$\acute{\varphi}_\varrho(r^\varrho) = L'_\varrho ln r_\varrho + L'_{\varrho 1}\frac{1}{r_\varrho} + L'_{\varrho 2}\frac{1}{r_\varrho^2} + \cdots + L'_{\varrho, n_\varrho}\frac{1}{r_\varrho^{n_\varrho}},$$

resp. characterisirbaren Art, so dass die Differenzen $\omega - \varphi_\varrho(r_\varrho)$ und $\acute{\omega} - \varphi_\varrho(r_\varrho)$ für den Punkt ε_ϱ stetig bleiben. In diesen Ausdrücken bezeichnen die L und L' Constante, m_ϱ und n_ϱ ganze Zahlen; r_ϱ hat die im art. 2. meiner erwähnten Arbeit angegebene Bedeutung, und es muss für den Fall, dass ε_ϱ ein $\overline{\nu-1}$facher Verzweigungspunkt ist, noch der Werth von r_ϱ in einem Punkte der Umgebung von ε_ϱ festgesetzt sein (was auf ν Weisen geschehen kann), dann ist r_ϱ für die ganze Umgebung von ε_ϱ einwerthig bestimmt. Die Werthe von ω, $\acute{\omega}$ in je zwei entsprechenden Punkten auf der positiven und negativen Seite der, von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c, l gebildeten Begrenzung der Fläche T'', die man durch ω^+ und ω^-, $\acute{\omega}^+$ und $\acute{\omega}^-$ bezeichne, sollen in der Weise verknüpft sein, dass allgemein für $\nu = 1, 2, \ldots, p$; $\varrho = 1, 2, \ldots, r$:

$$(G.)\qquad \begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu \{ \omega^+ = A_\nu \omega^- + A'_\nu, \quad \acute{\omega}^+ = \overline{A}_\nu \acute{\omega}^- + A''_\nu,\\
&\text{längs } b_\nu \{ \omega^+ = B_\nu \omega^- + B'_\nu, \quad \acute{\omega}^+ = \overline{B}_\nu \acute{\omega}^- + B''_\nu,\\
&\text{längs } c_\nu \{ \omega^+ = \omega^- + \Delta_\nu, \qquad \acute{\omega}^+ = \acute{\omega}^- + \Delta'_\nu,\\
&\text{längs } l_\varrho \{ \omega^+ = \omega^- - 2\pi i L_\varrho, \quad \acute{\omega}^+ = \acute{\omega}^- - 2\pi i L'_\varrho,
\end{aligned}$$

wobei die A, $\overline{A}$, A', A'', B, $\overline{B}$, B', B'', Δ, Δ' Constante bezeichnen, und die $2p$ Producte $A_\nu \overline{A}_\nu$, $B_\nu \overline{B}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$ sämmtlich den Werth 1 besitzen sollen. Functionen ω, $\acute{\omega}$ mit diesen Eigenschaften kann man, nebenbei bemerkt, in unbegrenzter Anzahl erhalten durch Integration von in T' einwerthigen Functionen der Variable z, die für eine endliche Anzahl von Punkten in T' unendlich von angebbarer Ordnung werden und beim Ueberschreiten der Schnitte a, b constante Factoren annehmen. Der speciellere Fall, wo ein Unstetigkeitspunkt von ω nicht auch zugleich ein Unstetigkeitspunkt von $\acute{\omega}$ ist, oder wo eine der Functionen oder auch beide allenthalben endlich sind, ist in dem obigen allgemeinen Falle mitenthalten, insofern als für jede der Constanten L, L' in den Ausdrücken φ, $\acute{\varphi}$, ohne Störung der weiteren Entwicklungen, auch der Werth Null zulässig ist.

Aus den bis jetzt erwähnten Eigenschaften der Functionen ω, ω' ergeben sich durch bekannte Schlüsse die folgenden als secundäre. Zwischen den in die Grenzgleichungen $(G.)$ eintretenden Constanten existiren nothwendig (vergl. m. Arbeit Bd. 71, Heft 3, art. 1) die $2p+2$ Relationen

$$(G'.)\quad \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \Delta_\nu - 2\pi i \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} L_\varrho = 0, \quad \Delta_\nu = B'_\nu (A_\nu - 1) - A'_\nu (B_\nu - 1), \\ \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \Delta'_\nu - 2\pi i \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} L'_\varrho = 0, \quad \Delta'_\nu = B''_\nu (\overline{A}_\nu - 1) - A''_\nu (\overline{B}_\nu - 1), \end{cases} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p).$$

Da die Differenzen $\omega - \varphi_\varrho(r_\varrho)$, $\omega' - \varphi_\varrho(r_\varrho)$ in dem Punkte ε_ϱ stetig sind und beim Ueberschreiten des Schnittes l_ϱ ungeändert bleiben, so haben dieselben, wenn man sie für die Umgebung des Punktes ε_ϱ als Functionen von r_ϱ betrachtet, bis zu einem endlichen Modul von r_ϱ den Character einwerthiger und stetiger Functionen der complexen Variable $\zeta = r_\varrho$. Setzt man also für die Umgebung des Punktes ε_ϱ (dem immer der Werth $r_\varrho = 0$ entspricht)

$$\omega - \varphi_\varrho(r_\varrho) = \psi_\varrho(r_\varrho), \qquad \omega' - \varphi'_\varrho(r_\varrho) = \psi'_\varrho(r_\varrho),$$

so lassen sich die Functionen ψ, ψ' bis zu einem endlichen Modul von r_ϱ darstellen durch Reihen von der Form

$$\begin{aligned} \psi_\varrho(r_\varrho) &= c_{\varrho 0} + c_{\varrho 1} r_\varrho + c_{\varrho 2} r_\varrho^2 + c_{\varrho 3} r_\varrho^3 + \cdots, \\ \psi'_\varrho(r_\varrho) &= c'_{\varrho 0} + c'_{\varrho 1} r_\varrho + c'_{\varrho 2} r_\varrho^2 + c'_{\varrho 3} r_\varrho^3 + \cdots, \end{aligned}$$

wobei die c, c' Constante bezeichnen. Nach den über die Curve k_ϱ vorher getroffenen Bestimmungen kann man dieselbe als mit all ihren Theilen in dem Gebiete liegend ansehen, für das die obigen Reihenentwicklungen gelten. Es werden also ω und ω' in dem, durch die Curve k_ϱ aus T'' ausgeschiedenen Flächenstücke und auch noch auf der Begrenzung k_ϱ desselben dargestellt durch

$$\omega = \varphi_\varrho(r_\varrho) + \psi_\varrho(r_\varrho), \qquad \omega' = \varphi'_\varrho(r_\varrho) + \psi'_\varrho(r_\varrho),$$

wobei φ, φ', ψ, ψ' die aufgestellten Reihen bezeichnen.

Nach diesen Vorbereitungen betrachte man das Integral

$$J = \int_R^+ \omega \, d\omega',$$

ausgedehnt in positiver Richtung durch die ganze, aus den beiden Seiten der Schnitte a, b, c, l' und den äusseren Seiten der Curven k bestehende Begrenzung R der Fläche T^*. Da die Functionen ω, ω' in der Fläche T^* allenthalben einwerthig und stetig sind, indem diese Fläche die r Punkte ε nicht mehr enthält, so hat nach bekanntem Satze das obige Integral, ausge-

dehnt über die ganze Begrenzung dieser Fläche, den Werth Null. Dasselbe ist aber auch gleich der Summe der Integrale, die erhalten werden, wenn man der Reihe nach über die einzelnen Begrenzungstheile integrirt. Die Ausführung dieser Integration liefert zwischen den Constanten, die das Verhalten der beiden Functionen ω, $\acute{\omega}$ an der Begrenzung von T'' und in den Unstetigkeitspunkten ε characterisiren, eine merkwürdige Relation, deren Herleitung der Zweck der vorliegenden Arbeit ist.

2.

Das Integral J kann man zunächst in zwei Integrale J_1 und J_2 zerlegen, von denen das erste sich auf das System der Schnitte a, b, c, das zweite sich auf das System der Schnitte l' und der Curven k bezieht. Das Integral J_1 kann weiter als Summe von p einfacheren Integralen $S_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, p)$ aufgefasst werden, von denen das dem Index ν entsprechende in der Richtung der Pfeile über den Theil der Begrenzung der Fläche T^* zu erstrecken ist, der von den beiden Seiten der drei Schnitte a_ν, b_ν, c_ν gebildet wird. Das Integral J_2 dagegen kann als Summe von r einfacheren Integralen T_ϱ $(\varrho = 1, 2, \ldots, r)$ betrachtet werden, von denen das dem Index ϱ entsprechende in der Richtung der Pfeile über den Theil der Begrenzung der Fläche T^* zu erstrecken ist, der von den beiden Seiten des Schnittes l'_ϱ und von der äussern Seite der Curve k_ϱ gebildet wird. Da ferner bei der Ausführung des Integrals S_ν längs jedes der drei Schnitte a_ν, b_ν, c_ν zweimal integrirt wird, einmal auf der positiven, das andere Mal auf der negativen Seite, und die Richtung der Integration auf der negativen Seite immer genau entgegengesetzt ist der Richtung der Integration in den entsprechenden Theilen auf der positiven Seite, so kann man die beiden, auf die positive und negative Seite bezüglichen Theile von S_ν durch Zusammenfassen correspondirender Elemente in ein einziges Integral vereinigen, das nur über die positive Seite zu erstrecken ist. Dieselbe Betrachtung ist anwendbar auf denjenigen Theil von T_ϱ, der sich auf die beiden Seiten des Schnittes l'_ϱ bezieht; man erhält so schliesslich:

$$0 = J = J_1 + J_2,$$

$$J_1 = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} S_\nu = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \int_{[a_\nu, b_\nu, c_\nu]^+}^{+} \{\omega^+ d\acute{\omega}^+ - \omega^- d\acute{\omega}^-\},$$

$$J_2 = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} T_\varrho = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \Big[\int_{l'^+_\varrho}^{+} \{\omega^+ d\acute{\omega}^+ - \omega^- d\acute{\omega}^-\} + \int_{k_\varrho}^{+} \omega\, d\acute{\omega} \Big],$$

wobei also jetzt das Integral

$$S_\nu = \int_{[a_\nu, b_\nu, c_\nu]^+}^{+} \{\omega^+ d\omega'^+ - \omega^- d\omega'^-\}$$

einmal über die positive Seite eines jeden der drei Schnitte a_ν, b_ν, c_ν von Anfang bis zu Ende in der Richtung der Pfeile zu erstrecken ist, und ebenso das, als Theil von T_ϱ auftretende Integral

$$\int_{l'^+_\varrho}^{+} \{\omega^+ d\omega'^+ - \omega^- d\omega'^-\}$$

einmal über die positive Seite des Schnittes l'_ϱ von Anfang bis zu Ende in der Richtung der Pfeile zu erstrecken ist, während zugleich ω^+, ω^- die Werthe der Function ω in zwei entsprechenden Begrenzungspunkten, $d\omega'^+$, $d\omega'^-$ die Aenderungen bezeichnen, die ω'^+ und ω'^- gleichzeitig erleiden, wenn man auf einem der Schnitte a_ν, b_ν, c_ν oder l'_ϱ in der Richtung, die die Pfeile auf der positiven Seite desselben haben, sich fortbewegt. Das Integral S_ν soll zunächst berechnet werden.

Aus den, unter $(G.)$ aufgestellten Grenzbedingungen ergeben sich, mit Berücksichtigung der Gleichungen $A_\nu \overline{A}_\nu = 1$, $B_\nu \overline{B}_\nu = 1$, die folgenden Relationen:

$$\text{längs } a_\nu \quad \{d\omega'^+ = \overline{A}_\nu d\omega'^-, \quad \omega^+ d\omega'^+ = \omega^- d\omega'^- + A'_\nu d\omega'^+,$$
$$\text{längs } b_\nu \quad \{d\omega'^+ = \overline{B}_\nu d\omega'^-, \quad \omega^+ d\omega'^+ = \omega^- d\omega'^- + B'_\nu d\omega'^+,$$
$$\text{längs } c_\nu \quad \{d\omega'^+ = d\omega'^- \quad , \quad \omega^+ d\omega'^+ = \omega^- d\omega'^- + \Delta_\nu d\omega'^+.$$

Entnimmt man aus diesen Gleichungen die Werthe der Differenzen

$$\{\omega^+ d\omega'^+ - \omega^- d\omega'^-\},$$

ausgedrückt durch $d\omega'^+$ allein, und führt dieselben in das Integral S_ν ein, so folgt:

$$S_\nu = A'_\nu \int_{a_\nu^+}^{+} d\omega'^+ + B'_\nu \int_{b_\nu^+}^{+} d\omega'^+ + \Delta_\nu \int_{c_\nu^+}^{+} d\omega'^+.$$

Ein Durchlaufen der ganzen positiven Seite des Schnittes a_ν in der Richtung der Pfeile führt nun, mit Rücksicht auf die Figur, vom Punkte q_ν zum Punkte s_ν, ein Durchlaufen der ganzen positiven Seite des Schnittes b_ν in der Richtung der Pfeile vom Punkte t_ν zum Punkte r_ν, endlich ein Durchlaufen der ganzen positiven Seite des Schnittes c_ν in der Richtung der Pfeile vom Punkte s_ν zum Punkte π_ν. Bezeichnet man also den Werth der Function ω' in irgend einem Punkte β der Begrenzung abgekürzt durch ω'_β, so ergiebt sich

$$S_\nu = A'_\nu(\omega'_{s_\nu} - \omega'_{q_\nu}) + B'_\nu(\omega'_{r_\nu} - \omega'_{t_\nu}) + \Delta_\nu(\omega'_{\pi_\nu} - \omega'_{s_\nu}).$$

In Folge der Grenzbedingungen (*G.*) sind die Werthe der Function ω' in den vier Punkten q_ν, r_ν, s_ν, t_ν mit dem Werthe der Function ω' im Punkte p_ν verknüpft durch die Gleichungen

$$\omega'_{q_\nu} = \overline{A}_\nu \omega'_{p_\nu} + A''_\nu, \qquad \omega'_{r_\nu} = \overline{B}_\nu \omega'_{p_\nu} + B''_\nu,$$
$$\omega'_{s_\nu} = \overline{A}_\nu \omega'_{r_\nu} + A''_\nu = \overline{A}_\nu \overline{B}_\nu \omega'_{p_\nu} + \overline{A}_\nu B''_\nu + A''_\nu,$$
$$\omega'_{t_\nu} = \overline{B}_\nu \omega'_{q_\nu} + B''_\nu = \overline{A}_\nu \overline{B}_\nu \omega'_{p_\nu} + \overline{B}_\nu A''_\nu + B''_\nu.$$

Führt man diese Ausdrücke in die letzte Formel für S_ν ein, so wird

$$S_\nu = \Delta_\nu \omega'_{\pi_\nu} + \overline{A}_\nu A'_\nu B''_\nu - \overline{B}_\nu B'_\nu A''_\nu - \Delta_\nu (\overline{A}_\nu B''_\nu + A''_\nu)$$
$$+ [B'_\nu \overline{B}_\nu (1 - \overline{A}_\nu) - A'_\nu \overline{A}_\nu (1 - \overline{B}_\nu) - \overline{A}_\nu \overline{B}_\nu \Delta_\nu] \omega'_{p_\nu},$$

und man erhält so schliesslich, indem man berücksichtigt, dass den Relationen (*G'.*) zufolge der Coefficient von ω'_{p_ν} auf der rechten Seite dieser Gleichung den Werth Null hat, für den Werth des Integrals S_ν den Ausdruck

$$S_\nu = \Delta_\nu \omega'_{\pi_\nu} + \overline{A}_\nu A'_\nu B''_\nu - \overline{B}_\nu B'_\nu A''_\nu - \Delta_\nu (\overline{A}_\nu B''_\nu + A''_\nu).$$

Der von ω' freie Theil dieses Ausdruckes soll im Folgenden abgekürzt durch C_ν bezeichnet werden.

3.

Im Vorigen bezeichnete T_ϱ den Ausdruck

$$T_\varrho = \int_{l'^+_\varrho}^{+} \{\omega^+ d\omega'^+ - \omega^- d\omega'^-\} + \int_{k_\varrho}^{+} \omega \, d\omega'.$$

Was das erste Integral rechts betrifft, so hat man längs l_ϱ und folglich auch längs l'_ϱ $\{\omega^+ = \omega^- - 2\pi i L_\varrho,\ d\omega'^+ = d\omega'^-,\ \omega^+ d\omega'^+ = \omega^- d\omega'^- - 2\pi i L_\varrho d\omega'^+$.

Da ferner ein Durchlaufen der ganzen positiven Seite des Schnittes l'_ϱ in der Richtung der Pfeile, mit Rücksicht auf die Figur, vom Punkte τ_ϱ zum Punkte λ_ϱ führt, so ergiebt sich der Werth des in Rede stehenden Integrals

$$\int_{l'^+_\varrho}^{+} \{\omega^+ d\omega'^+ - \omega^- d\omega'^-\} = -2\pi i L_\varrho \int_{l'^+_\varrho}^{+} d\omega'^+ = -2\pi i L_\varrho (\omega'_{\lambda_\varrho} - \omega'_{\tau_\varrho}).$$

Was das zweite, in dem obigen Ausdrucke für T_ϱ vorkommende Integral betrifft, so werden den früher getroffenen Bestimmungen zufolge die Functionen ω, ω' auf der Curve k_ϱ, über die dieses Integral von σ_ϱ bis τ_ϱ

zu erstrecken ist, dargestellt durch die Gleichungen

$$\omega = \varphi_\varrho(r_\varrho) + \psi_\varrho(r_\varrho), \qquad \omega' = \varphi'_\varrho(r_\varrho) + \psi'_\varrho(r_\varrho),$$

wobei φ_ϱ, φ'_ϱ, ψ_ϱ, ψ'_ϱ die im art. 1 aufgestellten Reihen bezeichnen. Man hat also, unter Anwendung einer abgekürzten Bezeichnungsweise, so lange als dadurch kein Irrthum zu befürchten steht,

$$(1.) \qquad \int_{k_\varrho}^{+} \omega\, d\omega' = \int_\sigma^\tau \varphi_\varrho \frac{d\omega'}{dr_\varrho} dr_\varrho + \int_\sigma^\tau \psi_\varrho \frac{d\varphi'}{dr_\varrho} dr_\varrho + \int_\sigma^\tau \psi_\varrho \frac{d\psi'}{dr_\varrho} dr_\varrho .$$

Da die Functionen ψ_ϱ, ψ'_ϱ von z in dem, durch die Curve k_ϱ vollständig begrenzten, den Punkt ε_ϱ enthaltenden Flächenstücke einwerthige und stetige Functionen des Ortes oder Punktes sind, so hat das dritte der rechts stehenden Integrale den Werth Null. Für die, unter den beiden anderen Integralzeichen vorkommenden Producte von Functionen erhält man unmittelbar die folgenden, ebenfalls für die ganze Curve k_ϱ convergenten Entwicklungen

$$\varphi_\varrho \frac{d\omega'}{dr_\varrho} = L_\varrho ln\, r_\varrho \frac{d\omega'}{dr_\varrho} + M_\varrho^{(1)} \frac{1}{r_\varrho} + M_\varrho^{(2)} \frac{1}{r_\varrho^2} + \cdots + M_\varrho^{(m_\varrho+n_\varrho+1)} \frac{1}{r_\varrho^{m_\varrho+n_\varrho+1}}$$
$$+ M_{\varrho 0} + M_{\varrho 1} r_\varrho + M_{\varrho 2} r_\varrho^2 + M_{\varrho 3} r_\varrho^3 + \cdots,$$

$$\psi_\varrho \frac{d\varphi'}{dr_\varrho} = N_\varrho^{(1)} \frac{1}{r_\varrho} + N_\varrho^{(2)} \frac{1}{r_\varrho^2} + N_\varrho^{(3)} \frac{1}{r_\varrho^3} + \cdots + N_\varrho^{(n_\varrho+1)} \frac{1}{r_\varrho^{n_\varrho+1}}$$
$$+ N_{\varrho 0} + N_{\varrho 1} r_\varrho + N_{\varrho 2} r_\varrho^2 + N_{\varrho 3} r_\varrho^3 + \cdots,$$

wobei die Coefficienten M und N sämmtlich endliche Aggregate der, in den Reihen für φ, φ', ψ, ψ' als Coefficienten auftretenden Constanten L, L', c, c' sind, und speciell die beiden Coefficienten $M_\varrho^{(1)}$ und $N_\varrho^{(1)}$ die Werthe

$$M_\varrho^{(1)} = [L_{\varrho 1} c'_{\varrho 1} + 2 L_{\varrho 2} c'_{\varrho 2} + 3 L_{\varrho 3} c'_{\varrho 3} + \cdots + m_\varrho L_{\varrho, m_\varrho} c'_{\varrho, m_\varrho}],$$
$$N_\varrho^{(1)} = L'_\varrho c_{\varrho 0} - [L'_{\varrho 1} c_{\varrho 1} + 2 L'_{\varrho 2} c_{\varrho 2} + 3 L'_{\varrho 3} c_{\varrho 3} + \cdots + n_\varrho L'_{\varrho, n_\varrho} c_{\varrho, n_\varrho}],$$

besitzen. Die ebenfalls hier auftretenden Grössen m_ϱ, n_ϱ sind die in den Ausdrücken φ, φ' als Exponenten vorkommenden ganzen Zahlen. Multiplicirt man nun die oben aufgestellten Reihen mit dr_ϱ und integrirt sie über die Curve k_ϱ von σ bis τ, so folgt

$$\int_\sigma^\tau \varphi_\varrho \frac{d\omega'}{dr_\varrho} dr_\varrho = L_\varrho \int_\sigma^\tau ln\, r_\varrho \frac{d\omega'}{dr_\varrho} dr_\varrho + M_\varrho^{(1)} \int_\sigma^\tau \frac{dr_\varrho}{r_\varrho},$$

$$\int_\sigma^\tau \psi_\varrho \frac{d\varphi'}{dr_\varrho} dr_\varrho = N_\varrho^{(1)} \int_\sigma^\tau \frac{dr_\varrho}{r_\varrho},$$

denn es sind die unbestimmten Integrale aller übrigen Glieder der obigen,

noch mit dr_ϱ multiplicirten Reihen in der Umgebung des Punktes ε_ϱ einwerthige Functionen des Ortes, die beim Durchlaufen der Curve k_ϱ von σ bis τ im Endpunkte τ denselben Werth wieder annehmen, den sie im Anfangspunkte σ besitzen, und es haben folglich die bestimmten Integrale dieser Glieder von σ bis τ erstreckt sämmtlich den Werth Null. Fasst man die gewonnenen Resultate zusammen, so ergiebt sich

$$(2.)\qquad \int_{k_\varrho}^{+} \omega\, d\omega' = L_\varrho \int_\sigma^\tau ln\, r_\varrho \frac{d\omega'}{dr_\varrho}\, dr_\varrho + (M_\varrho^{(1)} + N_\varrho^{(1)}) \int_\sigma^\tau \frac{dr_\varrho}{r_\varrho}.$$

Durch $[f]_\sigma^\tau$ bezeichne man die Differenz $f_\tau - f_\sigma$ der Werthe, die irgend ein, in die eckige Klammer eingeschriebener Ausdruck f in den Punkten τ und σ hat. Aus der Gleichung (2.) folgt dann, indem man auf das erste Integral rechts das Verfahren der theilweisen Integration anwendet, und das zweite Integral rechts ausführt,

$$(3.)\qquad \int_{k_\varrho}^{+} \omega\, d\omega' = [L_\varrho \omega' ln\, r_\varrho + (M_\varrho^{(1)} + N_\varrho^{(1)})\, ln\, r_\varrho]_\sigma^\tau - L_\varrho \int_\sigma^\tau \omega' \frac{dr_\varrho}{r_\varrho}.$$

Setzt man hier für den mit dr_ϱ multiplicirten Quotienten der Grössen ω' und r_ϱ die betreffende Reihenentwicklung, so liefert die Integration derselben

$$\int_\sigma^\tau \omega' \frac{dr_\varrho}{r_\varrho} = L'_\varrho \int_\sigma^\tau ln\, r_\varrho \frac{dr_\varrho}{r_\varrho} + c'_{\varrho 0} \int_\sigma^\tau \frac{dr_\varrho}{r_\varrho} = [\tfrac{1}{2} L'_\varrho ln^2 r_\varrho + c'_{\varrho 0} ln\, r_\varrho]_\sigma^\tau,$$

indem die, zwischen den Grenzen σ und τ genommenen Integrale aller übrigen Glieder der Reihe verschwinden. Führt man den gefundenen Werth in (3.) ein, und setzt

$$M_\varrho = -L_\varrho c'_{\varrho 0} + M_\varrho^{(1)}, \quad N_\varrho = -N_\varrho^{(1)},$$

so folgt

$$(4.)\qquad \int_{k_\varrho}^{+} \omega\, d\omega' = [L_\varrho \omega' ln\, r_\varrho + (M_\varrho - N_\varrho)\, ln\, r_\varrho - \tfrac{1}{2} L_\varrho L'_\varrho ln^2 r_\varrho]_\sigma^\tau,$$

und hieraus ergiebt sich nach einfacher Reduction, unter Berücksichtigung der Gleichungen

$$[ln\, r_\varrho]_\sigma = [ln\, r_\varrho]_\tau + 2\pi i, \qquad \omega'_{\sigma_\varrho} = \omega'_{\tau_\varrho} + 2\pi i L'_\varrho,$$

endlich

$$(5.)\qquad \int_{k_\varrho}^{+} \omega\, d\omega' = -2\pi i L_\varrho \omega'_{\tau_\varrho} - 2\pi i (M_\varrho - N_\varrho) + 2\pi^2 L_\varrho L'_\varrho.$$

Setzt man nun für die beiden Integrale, deren Summe oben mit T_ϱ bezeichnet wurde, die gefundenen Werthe ein, so erhält man schliesslich:

$$T_\varrho = -2\pi i L_\varrho \omega'_{\lambda_\varrho} - 2\pi i (M_\varrho - N_\varrho) + 2\pi^2 L_\varrho L'_\varrho.$$

4.

Führt man in die Gleichung des art. 2.

$$0 = J = J_1 + J_2 = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} S_\nu + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} T_\varrho$$

an Stelle von S_ν und T_ϱ die gefundenen Werthe ein, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{\nu=1}^{\nu=p} C_\nu - 2\pi i \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (M_\varrho - N_\varrho) + 2\pi^2 \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} L_\varrho L'_\varrho \\ & + \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \Delta_\nu \omega'_{\pi_\nu} - 2\pi i \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} L_\varrho \omega'_{\lambda_\varrho}. \end{aligned}$$

Die in diesem Ausdrucke noch vorkommenden Werthe der Function ω' für die $p+r$ Punkte π und λ erscheinen in Folge der Grenzbedingungen $(G.)$ und der, über die Aufeinanderfolge der Schnitte c und l gemachten Annahmen verknüpft durch die $p+r$ Gleichungen

$$\omega'_{\pi_1} - \omega'_{\pi_2} = \Delta_1, \quad \omega'_{\pi_2} - \omega'_{\pi_3} = \Delta_2, \quad \ldots, \quad \omega'_{\pi_{p-1}} - \omega'_{\pi_p} = \Delta'_{p-1}, \quad \omega'_{\pi_p} - \omega'_{\lambda_1} = \Delta_p,$$
$$\omega'_{\lambda_1} - \omega'_{\lambda_2} = -2\pi i L'_1, \quad \ldots, \quad \omega'_{\lambda_{r-1}} - \omega'_{\lambda_r} = -2\pi i L'_{r-1}, \quad \omega'_{\lambda_r} - \omega'_{\pi_1} = -2\pi i L'_r.$$

Drückt man nun aus diesen Gleichungen die sämmtlichen $p+r$ Functionswerthe durch den einen ω'_{π_1} aus, indem man von der letzten Gleichung ausgehend successive bis zur ersten aufsteigt, setzt ferner zur Abkürzung

$$-2\pi i L_\varrho = \Delta_{p+\varrho}, \quad -2\pi i L'_\varrho = \Delta'_{p+\varrho}, \quad p+r = q,$$

und berücksichtigt die beiden ersten Gleichungen $(G'.)$, die unter Anwendung dieser Abkürzungen sich schreiben

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=q} \Delta_\nu = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=q} \Delta'_\nu = 0,$$

so folgt

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \Delta_\nu \omega'_{\pi_\nu} - 2\pi i \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} L_\varrho \omega'_{\lambda_\varrho} = & \Delta_1 (\Delta'_1 + \Delta'_2 + \cdots + \Delta'_q) \\ & + \Delta_2 (\Delta'_2 + \Delta'_3 + \cdots + \Delta'_q) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \Delta_{q-1} (\Delta'_{q-1} + \Delta'_q) + \Delta_q \Delta'_q, \end{aligned}$$

und durch Einführung dieses Ausdruckes erhält man schliesslich die gesuchte Relation in der Form:

$$(F.) \quad \begin{cases} 0 = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} C_\nu - 2\pi i \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} (M_\varrho - N_\varrho) + 2\pi^2 \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} L_\varrho L'_\varrho \\ \quad + \Delta_1 (\Delta'_1 + \Delta'_2 + \cdots + \Delta'_q) \\ \quad + \Delta_2 (\Delta'_2 + \Delta'_3 + \cdots + \Delta'_q) \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad + \Delta_{q-1} (\Delta'_{q-1} + \Delta'_q) + \Delta_q \Delta'_q, \end{cases}$$

wobei also zur Abkürzung gesetzt ist:

$$C_\nu = \overline{A}_\nu A'_\nu B''_\nu - \overline{B}_\nu B'_\nu A''_\nu - \Delta_\nu (\overline{A}_\nu B''_\nu + A''_\nu),$$
$$M_\varrho = -L_\varrho c'_{\varrho 0} + L_{\varrho 1} c'_{\varrho 1} + 2 L_{\varrho 2} c'_{\varrho 2} + \cdots + m_\varrho L_{\varrho, m_\varrho} c'_{\varrho, m_\varrho},$$
$$N_\varrho = -L'_\varrho c_{\varrho 0} + L'_{\varrho 1} c_{\varrho 1} + 2 L'_{\varrho 2} c_{\varrho 2} + \cdots + n_\varrho L'_{\varrho, n_\varrho} c_{\varrho, n_\varrho},$$
$$(\varrho = 1, 2, \ldots r)\{\Delta_{p+\varrho} = -2\pi i L_\varrho,\ \Delta'_{p+\varrho} = -2\pi i L'_\varrho\},\ q = p + r.$$

Sind die Functionen ω, ω' beide allenthalben endlich in T'' oder T', so haben die Constanten L, L' sämmtlich den Werth Null, und es ergiebt sich dann aus der obigen, alle Fälle umfassenden Formel die speciellere:

$$0 = \int_R^+ \omega\, d\omega' = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} C_\nu + \Delta_1(\Delta'_1 + \Delta'_2 + \cdots + \Delta'_p)$$
$$+ \Delta_2(\Delta'_2 + \Delta'_3 + \cdots + \Delta'_p)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \Delta_{p-1}(\Delta'_{p-1} + \Delta'_p) + \Delta_p \Delta'_p.$$

Vertauscht man in dem links stehenden Integrale die beiden Functionen ω und ω', so hat das dann entstehende Integral ebenfalls den Werth Null. Die Vertauschung von ω und ω' zieht aber auf der rechten Seite der obigen Gleichung eine gleichzeitige Vertauschung von A_ν und $\overline{A}_\nu$, B_ν und $\overline{B}_\nu$, A'_ν und A''_ν, B'_ν und B''_ν, Δ_ν und Δ'_ν nach sich. Man erhält so für diesen Fall die folgende Relation:

$$(F'.)\quad \begin{cases} 0 = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \{A_\nu A''_\nu B'_\nu - B_\nu B''_\nu A'_\nu - \Delta'_\nu (A_\nu B'_\nu + A'_\nu)\} \\ \qquad + \Delta'_1(\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_p) \\ \qquad + \Delta'_2(\Delta_2 + \Delta_3 + \cdots + \Delta_p) \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad + \Delta'_{p-1}(\Delta_{p-1} + \Delta_p) + \Delta'_p \Delta_p, \end{cases}$$

die von der vorhergehenden sich nur durch die Form unterscheidet, indem mit Hülfe der Gleichungen $(G'.)$ die eine leicht in die andere übergeführt werden kann. Für manche Untersuchungen ist die letztere Form vorzuziehen.

Würzburg, im November 1869.

Ueber hypergeometrische Functionen n^{ter} Ordnung.

(Von Herrn *L. Pochhammer.*)

Die Methode, nach welcher *Riemann* die hypergeometrische Reihe definirt und die fundamentalen Eigenschaften derselben ableitet *), lässt sich auf erheblich allgemeinere Functionen ausdehnen, wenn die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, welcher die Reihe genügt, durch eine von der n^{ten} Ordnung ersetzt wird. Es ergiebt sich eine Stufenfolge von Functionen, welche sämmtlich durch die Unstetigkeits- und Verzweigungs-Bedingungen allein definirt werden, und auf die sich die meisten hervorragenden Eigenschaften der hypergeometrischen Reihe übertragen lassen. Diese Functionen sollen, im Anschluss an die übliche Bezeichnung, *hypergeometrische Functionen* genannt werden, unter Hinzufügung einer *Ordnungszahl,* welche die Ordnung der zugehörigen linearen Differentialgleichung anzeigt.

Es dürfte des Zusammenhangs halber zweckmässig sein, einen kurzen Ueberblick über die verschiedenen Definitionen der hypergeometrischen Reihe und über die Beziehungen der Reihe zu der Differentialgleichung zweiter Ordnung zu geben.

Die *Gauss*'sche hypergeometrische Reihe:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)$$

$$= 1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\cdots,$$

welche mit dem bestimmten Integral:

$$\text{Const.}\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du$$

identisch ist, genügt der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x(x-1)}\frac{dy}{dx}+\frac{\alpha\beta}{x(x-1)}y=0.$$

Indem als ein zweites partikuläres Integral der Gleichung eine ähnliche Reihe, multiplicirt mit einer Potenz von x:

$$x^{1-\gamma}F(1+\alpha-\gamma,1+\beta-\gamma,2-\gamma,x)$$

*) Berichte der Göttinger Akademie 1857.

gefunden wird, erhält man den Ausdruck:

$$C_1 F(\alpha,\beta,\gamma,x)+C_2 x^{1-\gamma} F(1+\alpha-\gamma,1+\beta-\gamma,2-\gamma,x)$$

als vollständiges Integral derselben.

Diese Form des vollständigen Integrals hat jedoch nur eine beschränkte Gültigkeit, da die angeführten Reihen nur für Werthe des x, deren Modul zwischen 0 und 1 liegt, convergent sind. Für die Werthe des x, welche die Umgebung des Punktes $x=1$ bilden, gewinnt man zwei andere partikuläre Integrale, nämlich eine convergente, nach positiven Potenzen von $x-1$ fortschreitende Reihe, und eine zweite derartige Reihe, multiplicirt mit einer gebrochenen Potenz von $x-1$, welche zusammen wieder das vollständige Integral ausdrücken. Endlich existiren für grosse Werthe des x zwei nach fallenden Potenzen fortschreitende convergente Reihen, multiplicirt mit gebrochenen Potenzen von x, welche ebenfalls Lösungen der Differentialgleichung sind. Man sagt, dass die erste Form des vollständigen Integrals zum Werth $x=0$, die zweite zum Werth $x=1$, die dritte zum Werthe $x=\infty$ gehört.

Aus der Verschiedenartigkeit der Ausdrücke für die verschiedenen Werthgebiete des x ergiebt sich der Schluss, dass die specielle Form der Reihen nur eine untergeordnete Bedeutung hat, und dass die wesentlichen Eigenschaften der Function vielmehr in der Differentialgleichung ihren Ausdruck finden. Die erhaltenen Reihen-Entwicklungen gelten nur als verschiedene Darstellungen einer und derselben Integral-Function, ebenso wie irrationale algebraische Functionen für die einzelnen Wurzelwerthe verschiedene Reihen-Entwicklungen verlangen. Aus diesem Grunde zog man es vor, die Function nicht durch die Reihe, sondern durch die Differentialgleichung zu definiren.

Indessen spricht sich in der gewissermassen zufällig scheinenden Form der Differentialgleichung sehr wenig die hohe Wichtigkeit der Integral-Function aus. Es war daher von grosser Bedeutung, dass es *Riemann* gelang, die allgemeine Function durch die ganz charakteristische Art, wie dieselbe sich verzweigt und unendlich wird, vollständig zu definiren. Zu den Punkten $x=0$ und $x=1$ gehört, wie oben ausgeführt wurde, je ein partikuläres Integral, das eine convergente Reihe bildet, und ein zweites, das nach Division mit einer Potenz von x, bezüglich $x-1$, in eine convergente, nach positiven Potenzen von x, bezüglich $x-1$, fortschreitende Reihe entwickelbar ist. Ebenso werden die zu $x=\infty$ gehörigen partikulären Integrale durch Division mit Potenzen von x eindeutig und endlich für das Gebiet grosser Werthe,

oder also, was dasselbe ist, convergent nach ganzen negativen Potenzen von x entwickelbar. Die genannten partikulären Integrale sind folglich, wenn sie für $x=0$, $x=1$ oder $x=\infty$ unstetig werden, immer nur wie *algebraische Functionen* unstetig, so dass durch Division mit einer *Potenz* die Unendlichkeit und Mehrdeutigkeit vollständig beseitigt werden kann. Stellt man nun an das allgemeine Integral einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung die Anforderung, dass dasselbe nur für $x=0$, $x=1$ und $x=\infty$ unstetig werden oder sich verzweigen, und dass die Unstetigkeit und Mehrdeutigkeit der partikulären Haupt-Integrale bei den Punkten 0, 1 und ∞ sich stets durch Division mit einer Potenz von x, bezüglich $x-1$, beseitigen lassen soll: so gelangt man, wie *Riemann* gezeigt hat, mit Nothwendigkeit zur Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe. Die Exponenten derjenigen Potenzen, mit denen man die partikulären Integrale dividiren muss, um sie endlich und eindeutig zu machen, sind die charakteristischen Constanten der Differentialgleichung.

Bei der *Gauss*'schen Reihe ist je ein Exponent für die Punkte 0 und 1 gleich Null zu nehmen, da die eine Reihe an und für sich convergent ist. *Riemann* nimmt dafür ebenfalls von Null verschiedene Exponenten, indessen hat dies nur die Ersetzung von y durch ein Product: $yx^{\alpha}(x-1)^{\beta}$ zur Folge, so dass eine einfache Substitution die *Gauss*'sche Form der Differentialgleichung wiederherstellt. Ausserdem kommen statt der Werthe 0, 1 und ∞ in der *Riemann*'schen Abhandlung allgemeine constante Werthe vor, aber auch in dieser Beziehung führt eine Substitution unmittelbar zur *Gauss*'schen Reihe.

Es sollen nun in der nachstehenden Arbeit allgemeinere, der hypergeometrischen Reihe analoge Functionen betrachtet werden, bei denen statt der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung eine von der n^{ten} Ordnung der Entwicklung zu Grunde gelegt ist. Für die Punkte 0 und 1 treten n Punkte $a_1, a_2 \ldots a_n$ ein, so dass $a_1, a_2 \ldots a_n$ und ∞ die einzigen Werthe des x sind, für welche die Function unendlich werden und sich verzweigen kann. Bei der *Gauss*'schen Reihe giebt es für die Punkte 0 und 1 je *ein* convergent entwickelbares Integral; bei den hier betrachteten Functionen existiren für die Punkte $a_1, a_2, \ldots a_n$ *je* $n-1$ *convergent entwickelbare partikuläre Integrale*, die wesentlich von einander verschieden sind; eine ähnliche Eigenschaft ergiebt sich für den Werth ∞. Als n^{te} Integrale für jeden der Punkte $a_1 \ldots a_n$, und ebenso für den Werth ∞, hat man Ausdrücke,

welche durch Division mit einer *Potenz* von $x-a_\nu$, respective x, endlich, eindeutig und von Null verschieden werden.

Die Werthe $a_1, a_2 \ldots a_n$ und ∞ sind nach der Bezeichnung des Herrn *Weierstrass* die *singulären Punkte* der linearen Differentialgleichung.

Hat man eine lineare Differentialgleichung mit eindeutigen Coefficienten auf die Form gebracht, dass die höchste Ableitung den Factor 1 hat: so kann die Integralfunction, abgesehen von dem Werth $x=\infty$, nur für diejenigen Werthe des x unstetig werden oder sich verzweigen, welche einen oder mehrere der Coefficienten unendlich machen. Diese Werthe und der Werth $x=\infty$ heissen die singulären Punkte der Differentialgleichung. Bezeichnet c irgend einen Werth, der keiner der singulären Punkte ist, so existirt nach einem von Herrn *Weierstrass* herrührenden Theorem *), stets eine convergente, nur ganze und positive Potenzen von $x-c$ enthaltende Reihe:

$$\gamma_0+\gamma_1(x-c)+\gamma_2(x-c)^2+\gamma_3(x-c)^3+\cdots,$$

welche der Differentialgleichung genügt, und in welcher die n ersten Coefficienten $\gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_{n-1}$ willkürliche Constanten sind. Diese Reihe stellt somit für die Umgebung des Punktes c das vollständige Integral dar. Ist dagegen a ein singulärer Punkt, so erhält man convergente, nach positiven Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihen im Allgemeinen nur nach Abtrennung gewisser unstetiger oder mehrdeutiger Factoren, welche bei den verschiedenen partikulären Integralen verschieden sind. In der Differentialgleichung der *Gauss*'schen hypergeometrischen Reihe sind 0, 1 und ∞ die singulären Punkte.

Für die im Folgenden behandelten Functionen, welche, wie erwähnt, als hypergeometrische Functionen n^{ter} Ordnung bezeichnet werden, sollen hinsichtlich ihres Verhaltens an den singulären Punkten Anforderungen gestellt werden, welche die *singulären Punkte möglichst wenig verschieden von den nicht singulären Punkten* machen.

Man verlangt, dass *für jeden der n endlichen singulären Punkte* $a_1 \ldots a_n$ *ein Integral von der Form:*

$$\gamma_0+\gamma_1(x-a_\nu)+\gamma_2(x-a_\nu)^2+\gamma_3(x-a_\nu)^3+\cdots$$

existire, bei welchem die Reihe convergent, und die $n-1$ *ersten Coefficienten*

*) Ein genauer Beweis findet sich in der Abhandlung des Herrn *L. Fuchs* im 66. Bd. dieses Journals.

$\gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_{n-2}$ *willkürliche Constanten sind,* und dass ausserdem ein Integral bestehe, welches *nach Division mit einer Potenz von* $x-a_\nu$ ebenfalls eine convergente, nur positive ganze Potenzen von $x-a_\nu$ enthaltende Reihe bildet. Wegen der Zahl der willkürlichen Constanten repräsentirt das erstere Integral $n-1$ partikuläre Integrale. Es kommt nach der obigen Bestimmung bei den Punkten $a_1 \ldots a_n$ nur je *ein* Exponent, der beliebig bleibt, vor.

Für den singulären Punkt $x=\infty$ stellt man die Bedingung, dass einerseits *ein Integral von der Form:*

$$x^{\beta_1}\left\{\gamma_0+\frac{\gamma_1}{x}+\frac{\gamma_2}{x^2}+\frac{\gamma_3}{x^3}+\cdots\right\},$$

in welchem die Reihe convergent, und die $n-1$ *ersten Coefficienten* $\gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_{n-2}$ *willkürliche Constanten sind,* und andererseits ein ähnliches Integral:

$$x^{\beta_2}\left\{\gamma_0'+\frac{\gamma_1'}{x}+\frac{\gamma_2'}{x^2}+\frac{\gamma_3'}{x^3}+\cdots\right\},$$

mit *einer* willkürlichen Constante, existire.

Durch diese Bedingungen ist, wie bewiesen werden soll, *die Differentialgleichung* n^{ter} *Ordnung und die gesuchte Function, als deren Integral, vollständig bestimmt.* Die gestellten Anforderungen werden nach einander in die Rechnung eingeführt.

Wenn man zunächst die Bedingungen für die *n endlichen* singulären Punkte $a_1 \ldots a_n$ allein gelten lässt, und das Verhalten bei $x=\infty$ nur in so weit einschränkt, dass daselbst alle Unstetigkeiten algebraischer Natur sein sollen: so ergiebt sich der Satz, dass die Differentialgleichung die Form:

$$\varphi_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+\varphi_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+\varphi_k(x)\frac{d^k y}{dx^k}+\cdots+\varphi_1(x)\frac{dy}{dx}+\varphi_0 y = 0$$

haben muss, worin $\varphi_k(x)$, für $k=n, n-1, \ldots 1$, eine *ganze rationale Function* k^{ten} *Grades* von x bezeichnet, während φ_0 constant ist.

Wird sodann die angeführte Bedingung für den singulären Punkt ∞ hinzugefügt, so gewinnt man die gesuchte Differentialgleichung in folgender Gestalt, *in der alle Constanten bestimmt sind:*

$$\varphi(x)\frac{d^n y}{dx^n}+$$

$$\sum_{k=n-1}^{k=0}(-1)^{n-k}\left\{(\lambda-k-1)_{n-k}\varphi^{(n-k)}(x)+(\lambda-k-1)_{n-k-1}\psi^{(n-k-1)}(x)\right\}\frac{d^k y}{dx^k} = 0.$$

$\varphi(x)$ bedeutet hierin eine ganze Function n^{ten}, $\psi(x)$ eine ganze Function $n-1^{\text{ten}}$ Grades, λ eine Constante. In den Coefficienten der verschiedenen

Ableitungen von y kommen je zwei Differentialquotienten von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, multiplicirt mit gewissen Binomialcoefficienten vor. Die Function $\varphi(x)$ enthält, wenn man den Factor von x^n gleich Eins macht, n Constanten, ebenso viel $\psi(x)$, wozu noch λ tritt. Die Differentialgleichung hat also $2n+1$ *Constanten.* Die Bedeutung derselben ergiebt sich aus dem Vorhergehenden. Erstens kommen unter denselben die n *singulären Punkte* $a_1, a_2, \ldots a_n$ vor, und zwar erhellt, dass:

$$\varphi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

ist; zweitens gehört zu jedem dieser Punkte *ein* Exponent, und endlich gehört *ein* Exponent zum singulären Werth $x=\infty$. Bei $x=\infty$ wurden allerdings zwei Exponenten genannt; indessen ist nur einer derselben beliebig, der zweite ist durch die übrigen Exponenten bestimmt.

Die allgemeine hypergeometrische Function n^{ter} Ordnung soll durch das Zeichen:

$$H_n\left(\begin{matrix} a_1, & a_2, \ldots a_n, & x \\ b_1, & b_2, \ldots b_n, & \lambda \end{matrix}\right)$$

dargestellt werden; die Exponenten hängen von den $n+1$ Grössen $b_1, b_2, \ldots b_n$ und λ ab.

Bei der Aufsuchung der Differentialgleichung war der Ausgangspunkt in einem Satz des Herrn *Fuchs* *) gegeben. Derselbe hat nachgewiesen, dass, wenn man an das Integral einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung die Anforderung stellt, dass es ϱ endliche singuläre Punkte $a_1 \ldots a_\varrho$ habe und bei allen diesen Punkten, sowie beim singulären Punkt $x=\infty$, stets nur algebraische Unstetigkeiten und Verzweigungen zeige: die Differentialgleichung die folgende Form haben muss:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{f_{\varrho-1}(x)}{\varphi(x)}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{f_{2(\varrho-1)}(x)}{\varphi^2(x)}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + \frac{f_{(n-1)(\varrho-1)}(x)}{\varphi^{n-1}(x)}\frac{dy}{dx} + \frac{f_{n(\varrho-1)}(x)}{\varphi^n(x)}y = 0,$$

worin $f_s(x)$ eine ganze Function von x, die höchstens vom Grade s ist, und $\varphi(x)$ das Product:

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\varrho)$$

bezeichnet.

Herr *Fuchs* führt am Schluss der erwähnten Abhandlung aus, dass die Differentialgleichung der *Gauss*'schen hypergeometrischen Reihe gewissermassen eine Ausnahmestellung einnehme, indem er berechnet, dass bei allen

*) *L. Fuchs*: „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen", Bd. 66 dieses Journals, von § 4 bis zum Schluss, Fortsetzung im 68. Bande.

höheren Ordnungen, als die zweite, eine vollständige Bestimmung der Constanten durch die Exponenten allein unmöglich sei. Indessen ist zu berücksichtigen, dass die Zahl der Bestimmungs-Gleichungen sich bedeutend erhöht, wenn man, wie oben geschehen, die Bedingung stellt, dass Reihenentwicklungen mit einer gewissen Zahl willkürlicher Constanten bestehen sollen. Es wird auf dieser Grundlage im Folgenden nachgewiesen, dass *für eine beliebige Ordnung* genau analoge Functionen zu der *Gauss*'schen hypergeometrischen Reihe, oder vielmehr zum allgemeinen Integral der Differentialgleichung derselben, existiren.

In den ersten Paragraphen der erwähnten Abhandlung giebt Herr *Fuchs*, im Anschluss an Entwicklungen von *Riemann*, den allgemeinen Satz, dass bei einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit eindeutigen Coefficienten die Integrale immer nur wie *algebraische* Functionen *mehrdeutig* sein können, gewisse Spezialfälle ausgenommen, wo Logarithmen auftreten. Für jeden singulären Punkt a existiren im Allgemeinen n partikuläre Integrale, welche nach Division mit einer Potenz von $x-a$ in der Umgebung des Punktes a *eindeutig* — aber im Allgemeinen nicht endlich — sind. Diese Integrale sind die *Haupt-Integrale* für den Punkt a; zu jedem derselben gehört, als eine charakteristische Constante, der Exponent der betreffenden Potenz von $x-a$, durch welche das Integral behufs Erlangung eines eindeutigen Ausdrucks zu dividiren ist. Im vorliegenden Fall kann man für $n-1$ der Haupt-Integrale diesen Exponenten gleich Null setzen, weil dieselben an und für sich convergent entwickelbar sind. Da der Fall gleicher oder nur um ganze Zahlen verschiedener Exponenten grade derjenige ist, wo Logarithmen auftreten können, so ist es wesentlich, zu bemerken, dass bei den hypergeometrischen Functionen das gleichartige Verhalten der $n-1$ partikulären Integrale *niemals* eine *logarithmische* Mehrdeutigkeit zur Folge hat.

Unter den Eigenschaften der hypergeometrischen Functionen ist in erster Linie hervorzuheben:

dass die hypergeometrischen Functionen einer beliebigen Ordnung durch bestimmte Integrale darstellbar sind.

Die verschiedenen Zweige der Functionen n^{ter} Ordnung sind gleich Integralen von der Form:

$$\text{Const.} \int_g^h (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}du,$$

worin g und h je zwei der $n+1$ Grössen $a_1, a_2, \dots a_n$ und x bedeuten. Die

verschiedenen Werthe von g und h geben n wesentlich von einander verschiedene partikuläre Integrale der Differentialgleichung. Es sollen diese *einzelnen* bestimmten Integrale als *hypergeometrische Integrale* n^{ter} *Ordnung* bezeichnet werden, während der Name der hypergeometrischen *Function* dem allgemeinen, n willkürliche Constanten enthaltenden Integrale bleibt.

Die gestellten Bedingungen führen mit Nothwendigkeit zu der angegebenen Differentialgleichung. Indessen bleibt zu untersuchen übrig, ob auch *das Umgekehrte* gilt, und das Integral jener Differentialgleichung immer das angeführte Verhalten an den $n+1$ singulären Punkten zeigt. Der Nachweis, dass dies der Fall ist, soll in dem dritten Abschnitt geliefert werden. Im ersten Abschnitt wird die Differentialgleichung abgeleitet, und im zweiten die Integration derselben durch die bestimmten Integrale bewerkstelligt. Im dritten Abschnitt wird dann direct bewiesen, dass die erhaltenen bestimmten Integrale genau die gestellten Bedingungen erfüllen. Hieraus folgt, dass die beiden Definitionen der hypergeometrischen Functionen, einerseits durch die Unstetigkeits- und Verzweigungs-Bedingungen, andererseits durch die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, sich in allen Punkten decken.

Im vierten Abschnitt werden Reihenentwicklungen hergestellt, und dabei gewisse eigenthümliche Beziehungen der Functionen n^{ter} Ordnung zu denen $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung behandelt. Man erhält für eine grosse Anzahl von *hypergeometrischen Integralen* n^{ter} *Ordnung* Potenz-Entwicklungen, deren *Coefficienten*, abgesehen von einem Binomialcoefficienten, der als Factor auftritt, wieder *hypergeometrische Integrale* $n-1^{\text{ter}}$ *Ordnung mit constantem Argument sind.* Es ist bekannt, dass das bestimmte Integral, durch welches die *Gauss*'sche hypergeometrische Reihe dargestellt wird, in seiner Entwicklung nach Potenzen von x zu Coefficienten *Euler*'sche Integrale der ersten Art, die mit Binomialcoefficienten multiplicirt sind, hat. Letztere Integrale sind als das unterste Glied der hier betrachteten Stufenfolge von Functionen anzusehen. In derselben Weise erhält man für hypergeometrische Integrale der dritten Ordnung Reihenentwicklungen, deren Coefficienten, abgesehen von einem Binomialcoefficienten, aus *Gauss*'schen hypergeometrischen Reihen, mit einem constanten Werth an Stelle des x, bestehen, und Entsprechendes gilt allgemein.

Endlich sollen im fünften Abschnitt einige Gleichungen zwischen hypergeometrischen Reihen n^{ter} Ordnung mit verschiedenen Argumenten abgeleitet werden. Auf die hypergeometrischen Functionen n^{ter} Ordnung lassen sich, da dieselben durch die Unstetigkeits- und Verzweigungs-Bedingungen bestimmt

sind, die Betrachtungen *Riemann*'s vollständig übertragen, durch welche er die zuerst von Herrn *Kummer* gefundenen Relationen zwischen hypergeometrischen Reihen in besonders einfacher Weise gewinnt. Es soll indessen in der nachstehenden Arbeit nur eine Klasse dieser Relationen berührt werden, nämlich diejenigen, welche zwischen gewissen Zweigen von hypergeometrischen Functionen derselben Variable x, derselben Constanten $a_1, a_2, \ldots a_n$, und mit Argumenten $b_1, b_2, \ldots b_n$ und λ, die um ganze Zahlen verschieden sind, bestehen. Derartige Functionen heissen, entsprechend der Bezeichnung bei der *Gauss*'schen Reihe, *angrenzende* Functionen. Analog den linearen Gleichungen, durch welche bei den *Euler*'schen Integralen je zwei, bei den *Gauss*'schen hypergeometrischen Reihen je drei angrenzende Functionen mit einander verbunden sind, erhält man das allgemeine Resultat, *dass bei den hypergeometrischen Functionen n^{ter} Ordnung lineare homogene Gleichungen mit rationalen Coefficienten zwischen je $n+1$ angrenzenden Integralen bestehen.* Dieser Satz ergiebt sich, mit Hülfe der erwähnten Beziehungen zwischen Integralen zweier aufeinander folgenden Ordnungen aus einer Eigenschaft der Differentialgleichungen von der Form:

$$\varphi_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+\varphi_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+\varphi_1(x)\frac{dy}{dx}+\varphi_0 y = 0,$$

worin $\varphi_k(x)$ eine ganze Function k^{ten} Grades bedeutet.

I.

Es soll mit dem Namen *„hypergeometrische Function n^{ter} Ordnung"* und dem Symbol:

$$H_n\left(\begin{matrix}a_1, a_2, \ldots a_n, x\\ b_1, b_2, \ldots b_n, \lambda\end{matrix}\right)$$

eine Function bezeichnet werden, welche die folgenden Eigenschaften hat:

1) dieselbe soll das allgemeine Integral einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung sein;

2) sie soll nur die $n+1$ Werthe $a_1, a_2, \ldots a_n$ und ∞ zu singulären Punkten haben;

3) für jeden endlichen singulären Punkt a_ν soll sie in die Summe zweier Functionen zerlegbar sein, von denen die erste einer convergenten, die ganzen positiven Potenzen von $x-a_\nu$ enthaltenden Reihe mit willkürlichen Constanten für die $n-1$ ersten Coefficienten gleich ist, während

die zweite durch Division mit der Potenz $(x-a_\nu)^{b_\nu+\lambda-1}$ in der Umgebung des Punktes a_ν eindeutig, endlich und von Null verschieden wird, und eine n^{te} willkürliche Constante zum Factor hat;

4) für den singulären Werth $x=\infty$ soll sie in die Summe zweier Functionen zerlegbar sein, deren eine nach Division durch die Potenz $x^{\lambda-1}$ einer convergenten, die negativen ganzen Potenzen von x enthaltenden Reihe mit willkürlichen Constanten für die $n-1$ ersten Coefficienten gleich ist, während die andere, welche die n^{te} willkürliche Constante enthält, ebenfalls nach Division durch eine Potenz von x für alle hinreichend grossen Werthe des x eindeutig, endlich und von Null verschieden ist.

Durch diese Bedingungen ist die Function vollständig bestimmt.

Bei Aufsuchung der linearen Differentialgleichung ist in erster Reihe zu beachten, dass, nach der Definition, die Function weder bei den n endlichen singulären Punkten, noch für den Werth $x=\infty$ andere als algebraische Unstetigkeiten und Verzweigungen zeigt. Es geht daraus hervor, wie Herr *Fuchs* bewiesen hat, dass die Differentialgleichung in der nachstehenden Form enthalten sein muss:

$$(1.)\quad \begin{cases} \dfrac{d^n y}{dx^n}+\dfrac{f_{n-1}(x)}{\varphi(x)}\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dfrac{f_{2(n-1)}(x)}{\varphi^2(x)}\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+\dfrac{f_{k(n-1)}(x)}{\varphi^k(x)}\dfrac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}}+\cdots \\ \qquad +\dfrac{f_{(n-1)(n-1)}(x)}{\varphi^{n-1}(x)}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{f_{n(n-)}(x)}{\varphi^n(x)}y=0, \end{cases}$$

worin $f_s(x)$ überall eine ganze Function, die höchstens vom Grade s ist, und $\varphi(x)$ das Product:

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

bedeutet.

In diese Differentialgleichung führt man zunächst die Bedingung ein, dass für einen beliebigen singulären Punkt a_ν ein Integral von der Form:

$$y=\gamma_0+\gamma_1(x-a_\nu)+\gamma_2(x-a_\nu)^2+\cdots+\gamma_{n-2}(x-a_\nu)^{n-2}+\gamma_{n-1}(x-a_\nu)^{n-1}+\cdots,$$

wo $\gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_{n-2}$ willkürliche Constanten sind, existiren soll.

Man setzt für y und seine Ableitungen die Reihen ein:

$$\begin{aligned} y &= \gamma_0+\gamma_1(x-a_\nu)+\gamma_2(x-a_\nu)^2+\cdots+\gamma_\mu(x-a_\nu)^\mu+\cdots \\ \frac{dy}{dx} &= \gamma_1+2\gamma_2(x-a_\nu)+3\gamma_3(x-a_\nu)^2+\cdots+(\mu+1)\gamma_{\mu+1}(x-a_\nu)^\mu+\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d^k y}{dx^k} &= k(k-1)\ldots 2.1.\gamma_k+(k+1)k\ldots 3.2.\gamma_{k+1}(x-a_\nu)+\cdots \\ &\quad +(\mu+k)(\mu+k-1)\ldots(\mu+2)(\mu+1)\gamma_{\mu+k}(x-a_\nu)^\mu+\cdots \end{aligned}$$

oder, wenn man die Bezeichnung der Binomialcoefficienten:

$$(p)_q = \frac{p(p-1)\dots(p-q+1)}{1.2\dots q}$$

anwendet:

$$\frac{d^k y}{dx^k} = k!\{\gamma_k + (k+1)_k\gamma_{k+1}(x-a_\nu) + (k+2)_k\gamma_{k+2}(x-a_\nu)^2 + \cdots + (\mu+k)_k\gamma_{\mu+k}(x-a_\nu)^\mu + \cdots\}$$

Der Coefficient der $n-k^{\text{ten}}$ Ableitung von y in Gleichung (1.), $\frac{f_{k(n-1)}(x)}{\varphi^k(x)}$, enthält als Factor den reciproken Werth der Potenz $(x-a_\nu)^k$. Den anderen für $x = a_\nu$ endlich bleibenden Factor dieses Coefficienten nenne man $R_k(x)$, so dass

$$\frac{R_k(x)}{(x-a_\nu)^k} = \frac{f_{k(n-1)}(x)}{\varphi^k(x)}$$

sei. Nach Einführung dieser Bezeichnung folgt aus dem *Taylor*'schen Satz:

$$R_k(x) = R_k(a_\nu) + R_k'(a_\nu)\frac{x-a_\nu}{1} + R_k''(a_\nu)\frac{(x-a_\nu)^2}{1.2} + \cdots .$$

Setzt man die Reihen ein, so geht die Differentialgleichung (1.) über in:

$$n!\{\gamma_n + (n+1)_n\gamma_{n+1}(x-a_\nu) + (n+2)_n\gamma_{n+2}(x-a_\nu)^2 + \cdots\}$$

$$+ (n-1)!\left\{\frac{R_1(a_\nu)}{x-a_\nu} + \frac{R_1'(a_\nu)}{1} + R_1''(a_\nu)\frac{x-a_\nu}{1.2} + \cdots\right\}\{\gamma_{n-1} + (n)_{n-1}\gamma_n(x-a_\nu) + \cdots\}$$

$$+ \quad .$$

$$+ (n-k)!\left\{\frac{R_k(a_\nu)}{(x-a_\nu)^k} + \frac{R_k'(a_\nu)}{1.(x-a_\nu)^{k-1}} + \cdots\right\}\{\gamma_{n-k} + (n-k+1)_{n-k}\gamma_{n-k+1}(x-a_\nu) + \cdots\}$$

$$+ \quad .$$

$$+ 1!\left\{\frac{R_{n-1}(a_\nu)}{(x-a_\nu)^{n-1}} + \frac{R_{n-1}'(a_\nu)}{1.(x-a_\nu)^{n-2}} + \frac{R_{n-1}''(a_\nu)}{1.2.(x-a_\nu)^{n-3}} + \cdots\right\}\{\gamma_1 + (2)_1\gamma_2(x-a_\nu) + \cdots\}$$

$$+ \left\{\frac{R_n(a_\nu)}{(x-a_\nu)^n} + \frac{R_n'(a_\nu)}{1.(x-a_\nu)^{n-1}} + \frac{R_n''(a_\nu)}{1.2.(x-a_\nu)^{n-2}} + \cdots\right\}\{\gamma_0 + \gamma_1(x-a_\nu) + \gamma_2(x-a_\nu)^2 + \cdots\}$$

$$= 0.$$

Man hat nunmehr die Coefficienten der einzelnen Potenzen:

$$(x-a_\nu)^{-n}, \quad (x-a_\nu)^{-(n-1)}, \quad \dots \quad (x-a_\nu)^{-2}, \quad \dots$$

gleich Null zu setzen. Von den hieraus hervorgehenden Gleichungen sind die $n-1$ ersten linear und homogen in Beziehung auf die Grössen $\gamma_0, \gamma_1, \dots \gamma_{n-2}$;

sie müssen aber für willkürliche Werthe dieser $n-1$ Grössen γ bestehen, d. h., in jeder der aufgestellten $n-1$ Gleichungen müssen die Coefficienten der einzelnen γ für sich verschwinden. Dies führt zu folgendem System von Bedingungen:

$$\begin{array}{llll}
R_n(a_\nu)=0, & & & \\
R_n'(a_\nu)=0, & R_{n-1}(a_\nu)=0, & & \\
R_n''(a_\nu)=0, & R_{n-1}'(a_\nu)=0, & R_{n-2}(a_\nu)=0, & \\
R_n'''(a_\nu)=0, & R_{n-1}''(a_\nu)=0, & R_{n-2}'(a_\nu)=0, & R_{n-3}(a_\nu)=0, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
R_n^{(n-2)}(a_\nu)=0, & R_{n-1}^{(n-3)}(a_\nu)=0, & R_{n-2}^{(n-4)}(a_\nu)=0, & \ldots\ R_3'(a_\nu)=0,\ R_2(a_\nu)=0.
\end{array}$$

Das Bestehen dieser Gleichungen schliesst die logarithmischen Integrale aus, zu welchen man sonst durch die Annahme unendlich grosser Werthe für einzelne der willkürlichen Constanten gelangt. Man kann die Bedingungen dahin zusammenfassen, dass die Functionen $R_n(x)$, $R_{n-1}(x)$, ... $R_2(x)$ bezüglich die Factoren $(x-a_\nu)^{n-1}$, $(x-a_\nu)^{n-2}$, ... $x-a_\nu$ enthalten, oder, was dasselbe ist, dass für $k=2, 3, \ldots n$ die ganze Function $f_{k(n-1)}(x)$ durch $(x-a_\nu)^{k-1}$ theilbar ist. Da diese Bedingung aber für jede der n Grössen a_ν stattfindet, so ist $f_{k(n-1)}(x)$ durch:

$$\{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)\}^{k-1} = \{\varphi(x)\}^{k-1}$$

theilbar. Der übrigbleibende Faktor ist von der Ordnung:

$$k(n-1)-n(k-1) = n-k,$$

und man hat:

$$f_{k(n-1)}(x) = \{\varphi(x)\}^{k-1}\varphi_{n-k}(x),$$

wo $\varphi_{n-k}(x)$ eine ganze Function von x des $n-k^{\text{ten}}$ Grades bezeichnet. Der Coefficient von $\frac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}}$ ist daher $\frac{\varphi_{n-k}(x)}{\varphi(x)}$. Bei den ganzen Functionen $f_{n-1}(x)$ und $\varphi(x)$ ändert man, der Symmetrie halber, die Bezeichnung in $\varphi_{n-1}(x)$ und $\varphi_n(x)$:

$$f_{n-1}(x)=\varphi_{n-1}(x), \quad \varphi(x)=\varphi_n(x),$$

wodurch, nach Multiplication mit $\varphi_n(x)$, die Gleichung (1.) in folgende Differentialgleichung übergeht:

$$\varphi_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+\varphi_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+\varphi_k(x)\frac{d^ky}{dx^k}+\cdots+\varphi_1(x)\frac{dy}{dx}+\varphi_0 y = 0.$$

Man hat somit folgenden Satz:

Stellt man an eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit n endlichen singulären Punkten die Anforderung:

1) dass die Integrale derselben stets nur algebraische Unstetigkeiten und Verzweigungen haben;

2) dass für jeden endlichen singulären Punkt a_ν eine die positiven Potenzen von $x-a_\nu$ enthaltende Reihe, bei welcher die Coefficienten von $x-a_\nu$, $(x-a_\nu)^2$, ... $(x-a_\nu)^{n-2}$ und das von $x-a_\nu$ unabhängige Glied willkürliche Constanten sind, derselben genüge,

so hat die Differentialgleichung die Form:

$$(2.)\qquad \varphi_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+\varphi_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+\varphi_k(x)\frac{d^k y}{dx^k}+\cdots+\varphi_1(x)\frac{dy}{dx}+\varphi_0 y = 0,$$

worin $\varphi_k(x)$ eine ganze Function k^{ten} Grades, für $k=1, 2, \ldots n$, und φ_0 eine Constante bezeichnet.

Die Umkehrung ist bei diesem Theorem ebenso wenig wie bei dem des Herrn *Fuchs* erlaubt, da die Gleichung noch logarithmische Integrale enthält; es kommen hier speciell die logarithmischen Unstetigkeiten für $x=\infty$ in Betracht.

Man kann dem Satze noch eine andere Form geben, welche sich auf das Gebiet eines einzelnen singulären Punktes beschränkt. Herr *Fuchs* zeigt (in der Fortsetzung der erwähnten Abhandlung), dass die Forderung der algebraischen Unstetigkeit und Verzweigung sämmtlicher Integrale in der Umgebung eines singulären Punktes a zu einer Differentialgleichung:

$$(x-a)^n\frac{d^n y}{dx^n}+(x-a)^{n-1}E_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+(x-a)^{n-2}E_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots$$
$$+(x-a)E_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+E_n(x)y = 0$$

führt, in welcher E_1, E_2, ... E_n Functionen bedeuten, die in der Umgebung von a eindeutig, stetig und endlich sind. Analog findet man, dass:

wenn eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes a ein Integral, dessen convergente Reihenentwicklung nur positive Potenzen von $x-a$ und willkürliche Constanten für die $n-1$ ersten Coefficienten enthält, und ausserdem ein Integral mit nicht anderer als algebraischer Unstetigkeit und Verzweigung haben soll: die Differentialgleichung von der Gestalt:

$$(3.)\qquad (x-a)\frac{d^n y}{dx^n}+E_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+E_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+E_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+E_n(x)y = 0$$

sein muss, wo $E_1, E_2, \ldots E_n$ Functionen, die in der Umgebung des Punktes a eindeutig, stetig und endlich sind, bedeuten.

Es dürfen also, wenn man den Factor von $\frac{d^n y}{dx^n}$ gleich Eins macht, die Coefficienten der Differentialgleichung für $x = a$ nur so wie $(x-a)^{-1}$ unendlich werden.

Zur weiteren Bestimmung der hypergeometrischen Function stellt man an die Differentialgleichung (2.) die Forderung, dass ein Integral existire, welches nach Division durch $x^{\lambda-1}$ einer nur negative Potenzen von x enthaltenden Reihe mit $n-1$ willkürlichen Constanten gleich sei. Man zieht es vor, in der Gleichung (2.) das Zeichen abwechseln zu lassen, und geht daher von der Gleichung aus:

$$(4.)\quad \begin{cases} \varphi_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} - \varphi_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \varphi_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} - \cdots \\ + (-1)^{n-k}\varphi_k(x)\frac{d^k y}{dx^k} + \cdots + (-1)^{n-1}\varphi_1(x)\frac{dy}{dx} + (-1)^n \varphi_0 y = 0, \end{cases}$$

worin:

$$\varphi_k(x) = c_{k,k}x^k + c_{k,k-1}x^{k-1} + c_{k,k-2}x^{k-2} + \cdots + c_{k,1}x + c_{k,0}$$

zu nehmen ist.

Man setze:

$$(5.)\qquad x = \frac{1}{t},\quad y = x^{\lambda-1}\eta;$$

dann hat η, als Function von t, für den singulären Punkt $t=0$ genau dieselben Bedingungen zu erfüllen, wie die Function y für $x = a_\nu$. Die Differentialgleichung zwischen η und t muss folglich die Form der Gleichung (3.) haben.

$\varphi_k(x)$ wird gleich $\frac{1}{t^k}T_k$, wo durch T_k die ganze Function:

$$c_{k,k} + c_{k,k-1}t + c_{k,k-2}t^2 + \cdots + c_{k,0}t^k$$

bezeichnet wird, und T_0 (gleich φ_0) constant ist.

Wenn $x = \frac{1}{t}$ ist, so besteht, nach der Formel für höhere Differentialquotienten, die Gleichung:

$$\frac{d^k y}{dx^k} = (-1)^k t^{k+1}\frac{d^k(t^{k-1}y)}{dt^k};$$

also für $y = x^{\lambda-1}\eta = t^{1-\lambda}\eta$ folgt:

$$\frac{d^k y}{dx^k} = (-1)^k t^{k+1}\frac{d^k(t^{k-\lambda}\eta)}{dt^k}.$$

Durch Einführung dieses Werthes werden alle Summanden der Gleichung (4.) positiv, indem der Factor $(-1)^n$ sich forthebt. Die Differentialgleichung zwischen η und t wird:

$$tT_n\frac{d^n(t^{n-\lambda}\eta)}{dt^n}+tT_{n-1}\frac{d^{n-1}(t^{n-\lambda-1}\eta)}{dt^{n-1}}+\cdots+tT_k\frac{d^k(t^{k-\lambda}\eta)}{dt^k}+\cdots+tT_1\frac{d(t^{1-\lambda}\eta)}{dt}+T_0t^{1-\lambda}\eta=0.$$

Man entwickelt die Differentialquotienten der Producte und erhält:

$$\begin{aligned}\frac{d^k(t^{k-\lambda}\eta)}{dt^k}=t^{k-\lambda}\frac{d^k\eta}{dt^k}&-(k)_1(\lambda-k)_1\,1!\,t^{k-\lambda-1}\frac{d^{k-1}\eta}{dt^{k-1}}+(k)_2(\lambda-k+1)_2\,2!\,t^{k-\lambda-2}\frac{d^{k-2}\eta}{dt^{k-2}}+\cdots\\&+(-1)^\nu(k)_\nu(\lambda-k+\nu-1)_\nu\,\nu!\,t^{k-\lambda-\nu}\frac{d^{k-\nu}\eta}{dt^{k-\nu}}+\cdots\\&+(-1)^{k-1}(k)_{k-1}(\lambda-2)_{k-1}(k-1)!\,t^{1-\lambda}\frac{d\eta}{dt}+(-1)^k(k)_k(\lambda-1)_k\,k!\,t^{-\lambda}\eta.\end{aligned}$$

Man setzt ein, multiplicirt die ganze Gleichung mit $t^{\lambda-1}$ und fasst die Glieder mit gleichen Ableitungen zusammen. Es ergiebt sich:

$$(6.)\quad t^nF_n(t)\frac{d^n\eta}{dt^n}+t^{n-1}F_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}\eta}{dt^{n-1}}+\cdots+t^kF_k(t)\frac{d^k\eta}{dt^k}+\cdots+tF_1(t)\frac{dy}{dx}+F_0(t)\,y=0,$$

worin $F_k(t)$ die folgende ganze Function n^{ten} Grades bezeichnet:

$$(7.)\quad F_k(t)=\begin{cases}(-1)^{n-k}(\lambda-k-1)_{n-k}(n-k)!\,(n)_kT_n\\+(-1)^{n-k-1}(\lambda-k-1)_{n-k-1}(n-k-1)!\,(n-1)_kT_{n-1}+\cdots\\+(-1)^{i-k}(\lambda-k-1)_{i-k}(i-k)!\,(i)_kT_i+\cdots-(\lambda-k-1)_1\,1!\,(k+1)_kT_{k+1}+T_k.\end{cases}$$

Die Differentialgleichung (6.) soll die Form der Gleichung (3.) haben: der nach Division mit dem Coefficienten der höchsten Ableitung als Factor auftretende Quotient:

$$\frac{t^kF_k(t)}{t^nF_n(t)}=\frac{F_k(t)}{t^{n-k}F_n(t)}$$

darf für $t=0$ nur wie die Potenz t^{-1} unendlich werden. Da nun für $t=0$ die Function $F_n(t)$, welche mit T_n identisch ist, gleich Eins wird: so folgt, dass die Function $F_k(t)$ den Factor t^{n-k-1} enthalten muss. Hieraus ergeben sich die Gleichungen:

$$(8.)\qquad F_k(0)=0,\ F_k'(0)=0,\ F_k''(0)=0,\ \ldots\ F_k^{(n-k-2)}(0)=0$$

für $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ (n-2)$.

Die Functionen $F_n(t)$ und $F_{n-1}(t)$ werden durch die gestellten Bedingungen nicht beschränkt.

Aus (8.) ensteht, wenn für k die verschiedenen Werthe eingesetzt werden, das Gleichungssystem:

$$(9.)\quad \begin{cases} F_{n-2}(0)=0, \\ F_{n-3}(0)=0,\ F'_{n-3}(0)=0, \\ F_{n-4}(0)=0,\ F'_{n-4}(0)=0,\ F''_{n-4}(0)=0, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_k(0)=0,\quad F'_k(0)=0,\quad F''_k(0)=0,\ \ldots\ F_k^{(n-k-2)}(0)=0, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_0(0)=0,\quad F'_0(0)=0,\quad F''_0(0)=0,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ F_0^{(n-2)}(0)=0. \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen werden sämmtliche Constanten der Differentialgleichung bis auf die $2n+1$ Grössen $a_1, b_1, \ldots a_n, b_n$ und λ, welche zum Argument der hypergeometrischen Function gehören, bestimmt. Die Grössen $a_1, b_1, \ldots a_n, b_n$ hängen von den Constanten der beiden ersten Coefficienten der Gleichung (4.), $\varphi_n(x)$ und $\varphi_{n-1}(x)$, ab. Alle andern Constanten $c_{n-2,n-2}$, $c_{n-2,n-3}$, $\ldots c_{0,0}$, welche in $\varphi_{n-2}(x)$, $\varphi_{n-3}(x)$, $\ldots\ \varphi_1(x)$, φ_0 vorkommen, sind durch das Gleichungssystem (9.) als Functionen von a_1, b_1, $\ldots a_n$, b_n, λ gegeben.

Die Zahl der Constanten in $\varphi_{n-2}(x)$, $\varphi_{n-3}(x)$, $\ldots\ \varphi_1(x)$, φ_0 ist zusammen: $(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{1.2}$. Die Zahl der in (9.) vorhandenen Gleichungen ist in der That auch: $1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{1.2}$, so dass die Gleichungen zur Bestimmung der Constanten grade ausreichen.

Unter den Gleichungen (9.) sind zunächst $n-1$ anzuführen, in denen die Functionen F_k selbst vorkommen:

$$0=F_{n-2}(0)=F_{n-3}(0)=\cdots=F_1(0)=F_0(0).$$

Diese enthalten nur $c_{n,n}$, $c_{n-1,n-1}$, $c_{n-2,n-2}$, $\ldots\ c_{1,1}$, $c_{0,0}$, die Coefficienten der höchsten Potenzen in $\varphi_n(x)$, $\varphi_{n-1}(x)$, $\varphi_{n-2}(x)$, $\ldots\ \varphi_1(x)$, φ_0, da alle andern Constanten in $T_n(0)$, $T_{n-1}(0)$, $T_{n-2}(0)$, $\ldots\ T_1(0)$, T_0 fortgefallen sind. Von den $n+1$ Grössen werden $n-1$ bestimmt; die beiden zu $\varphi_n(x)$ und $\varphi_{n-1}(x)$ gehörenden Constanten $c_{n,n}$ und $c_{n-1,n-1}$ bleiben unbeschränkt.

Die Gleichungen, deren linke Seiten gleich den μ^{ten} Ableitungen der Functionen $F_k(t)$ für $t=0$ sind:

$$(10.)\qquad 0=F_{n-\mu-2}^{(\mu)}(0)=F_{n-\mu-3}^{(\mu)}(0)=\cdots=F_1^{(\mu)}(0)=F_0^{(\mu)}(0),$$

enthalten nur die Constanten $c_{n,n-\mu}$, $c_{n-1,n-\mu-1}$, $c_{n-2,n-\mu-2}$, $\ldots\ c_{\mu,0}$. Die Zahl dieser Constanten, bei denen der zweite Index immer um μ kleiner ist, als

der erste, ist gleich $n-\mu+1$, die Zahl der Gleichungen gleich $n-\mu-1$; man findet daher alle andern Coefficienten $c_{\alpha,\alpha-\mu}$ als Functionen der beiden ersten, $c_{n,n-\mu}$ und $c_{n-1,n-\mu-1}$.

Zur Bestimmung der Constanten $c_{\alpha,\alpha-\mu}$ soll die Methode angewendet werden, dass man das Gleichungssystem (10.) in ein anderes transformirt, von der Beschaffenheit, dass in der ersten Gleichung nur eine Unbekannte, in der zweiten zwei, allgemein in der k^{ten} k Unbekannte enthalten sind, und zwar in jeder folgenden Gleichung nur eine neue Unbekannte ausser den früheren. In dem transformirten System lässt sich die Elimination mit der grössten Leichtigkeit ausführen. Für die höchsten Coefficienten $c_{n,n}$, $c_{n-1,n-1}$, $\ldots$ $c_{0,0}$ liefern schon die Gleichungen (9.) ein System von der gewünschten Form.

Man bewerkstelligt die Transformation der Gleichungen (10.), indem man die nachstehende Gleichung:

$$(11.)\quad \begin{cases} (\nu)_{\mu-1}F_0^{(\mu)}(0)+(\lambda-1)_1 1!(\nu-1)_{\mu-1}F_1^{(\mu)}(0)+(\lambda-1)_2 2!(\nu-2)_{\mu-1}F_2^{(\mu)}(0)+\cdots \\ +(\lambda-1)_k k!(\nu-k)_{\mu-1}F_k^{(\mu)}(0)+\cdots+(\lambda-1)_{\nu-\mu+1}(\nu-\mu+1)!(\mu-1)_{\mu-1}F_{\nu-\mu+1}^{(\mu)}(0) \\ = 0 \end{cases}$$

bildet, für Werthe des $\nu=\mu-1,\ \mu,\ \mu+1,\ \ldots\ n-3$. Die Indices der eingeklammerten Constanten zeigen überall Binomialcoefficienten an.

Die erste der so zusammengesetzten Gleichungen, für $\nu=\mu-1$, ist:

$$F_0^{(\mu)}(0) = 0,$$

die zweite, für $\nu=\mu$:

$$(\mu)_{\mu-1}F_0^{(\mu)}(0)+(\lambda-1)_1 1!(\mu-1)_{\mu-1}F_1^{(\mu)}(0) = 0,$$

jede folgende enthält eine Function $F_k(t)$ mehr.

Nach Einsetzung der aus (7.) folgenden Werthe für die Grössen $F_k^{(\mu)}(0)$ erhält man in der Gleichung (11.) den nachstehenden Ausdruck als Coefficienten von $c_{\alpha,\alpha-\mu}$:

1) wenn $\alpha \leqq \nu-\mu+1$ ist: $(-1)^\alpha(\lambda-1)_\alpha\alpha!\ \sum_{k=0}^{k=\alpha}(-1)^k(\alpha)_k(\nu-k)_{\mu-1}$;

2) wenn $\alpha > \nu-\mu+1$ ist: $(-1)^\alpha(\lambda-1)_\alpha\alpha!\ \sum_{k=0}^{k=\nu-\mu+1}(-1)^k(\alpha)_k(\nu-k)_{\mu-1}$.

Im ersteren Fall ist der Coefficient von $c_{\alpha,\alpha-\mu}$ immer gleich Null, wie sich ergiebt, wenn man $(\nu-k)_{\mu-1}$ nach der Formel:

$$(p+q)_m = (p)_m+(p)_{m-1}(q)_1+(p)_{m-2}(q)_2+\cdots+(q)_m$$

entwickelt, und die für $\alpha>\beta$ geltende Gleichung:

$$(\alpha)_1-(\alpha)_2(\beta+1)_1+(\alpha)_3(\beta+2)_2-(\alpha)_4(\beta+3)_3+\cdots+(-1)^{\alpha-1}(\alpha)_\alpha(\beta+\alpha-1)_{\alpha-1}=0$$

anwendet. Zunächst folgt also, dass die Grössen $c_{\alpha,\alpha-\mu}$, bei denen $\alpha \leqq \nu-\mu+1$ ist, in der Gleichung (11.) nicht vorkommen.

Im zweiten Fall führt der Umstand, dass die Summe unverändert bleibt, wenn α, μ, ν um dieselbe ganze Zahl verringert werden, zu der Gleichung:

$$\sum_{k=0}^{k=\nu-\mu+1}(-1)^k(\alpha)_k(\nu-k)_{\mu-1} = \sum_{k=0}^{k=\nu-\mu+1}(-1)^k(\alpha-\mu+1)_k = (-1)^{\nu-\mu+1}(\alpha-\mu)_{\nu-\mu+1},$$

und da der letzterhaltene Binomialcoefficient auch verschwindet, sobald $\alpha \leqq \nu$ ist, so bleiben in der Gleichung (11.) nur die Grössen $c_{\alpha,\alpha-\mu}$ für $\alpha > \nu$. Der Coefficient derselben ist:

$$(-1)^{\alpha+\nu-\mu+1}(\lambda-1)_\alpha\,\alpha!\,(\alpha-\mu)_{\alpha-\nu-1}.$$

Auf diese Weise gewinnt Gleichung (11.) die Gestalt:

$$(12.)\quad 0 = \begin{cases} (-1)^{n-\nu-1}(\lambda-1)_n\,n!\,(n-\mu)_{n-\nu-1}\,c_{n,n-\mu} \\ +(-1)^{n-\nu-2}(\lambda-1)_{n-1}(n-1)!\,(n-\mu-1)_{\mu-\nu-2}\,c_{n-1,n-\mu-1}+\cdots \\ +(-1)^{\alpha-\nu-1}(\lambda-1)_\alpha\,\alpha!\,(\alpha-\mu)_{\alpha-\nu-1}\,c_{\alpha,\alpha-\mu}+\cdots \\ -(\lambda-1)_{\nu+2}(\nu+2)!\,(\nu-\mu+2)_1\,c_{\nu+2,\nu-\mu+2}+(\lambda-1)_{\nu+1}(\nu+1)!\,c_{\nu+1,\nu-\mu+1} \end{cases}$$

Um den Werth eines beliebigen Coefficienten $c_{k,k-\mu}$ zu finden, wendet man die Gleichung (12.) für $\nu = n-3,\ n-4,\ \ldots\ k-1$ an:

$$(\lambda-1)_n\,n!\,(n-\mu)_2\,c_{n,n-\mu}-(\lambda-1)_{n-1}(n-1)!\,(n-\mu-1)_1\,c_{n-1,n-\mu-1}+(\lambda-1)_{n-2}(n-2)!\,c_{n-2,n-\mu-2} = 0,$$

$$-(\lambda-1)_n\,n!\,(n-\mu)_3\,c_{n,n-\mu}+(\lambda-1)_{n-1}(n-1)!\,(n-\mu-1)_2\,c_{n-1,n-\mu-1} -(\lambda-1)_{n-2}(n-2)!\,(n-\mu-2)_1\,c_{n-2,n-\mu-2}+(\lambda-1)_{n-3}(n-3)!\,c_{n-3,n-\mu-3} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(-1)^{n-k}(\lambda-1)_n\,n!\,(n-\mu)_{n-k}\,c_{n,n-\mu}+\cdots+(\lambda-1)_k\,k!\,c_{k,k-\mu} = 0.$$

Indem man diese Gleichungen bezüglich mit $(n-\mu-2)_{n-k-2}$, $(n-\mu-3)_{n-k-3}$, $\cdots$ $(k-\mu)_0 = 1$ multiplicirt und addirt, werden alle Grössen c mit Ausnahme von $c_{k,k-\mu}$, $c_{n,n-\mu}$ und $c_{n-1,n-\mu-1}$ eliminirt, und zwischen den drei letzteren ergiebt sich die Relation:

$$(13.)\quad \begin{cases} c_{k,k-\mu} = -(\lambda-k-1)_{n-k}(n-k)!\,(n-\mu)_{n-k}(n-k-1)_1\,c_{n,n-\mu} \\ \qquad +(\lambda-k-1)_{n-k-1}(n-k-1)!\,(n-\mu-1)_{n-k-1}\,c_{n-1,n-\mu-1}. \end{cases}$$

Die Gleichung (13.) enthält die vollständige Lösung des Gleichungssystems (9.). Das Resultat lässt sich in einfacherer Form darstellen, wenn man die Bezeichnung der Function $n-1^{\text{ten}}$ Grades etwas ändert. Man setze:

$$\varphi_{n-1}(x) = (\lambda - n)\,\varphi_n'(x) + \psi(x),$$

wo

$$\varphi_n(x) = \varphi(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots + A_{n-1} x + A_n,$$
$$\psi(x) = B_0 x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + B_2 x^{n-3} + \cdots + B_{n-2} x + B_{n-1}$$

ist. Da für $c_{n,n-\mu}$ dann A_μ und für $c_{n-1,n-\mu-1}$ die Summe:

$$(\lambda - n)(n-\mu) A_\mu + B_\mu$$

einzusetzen ist, so geht die Gleichung (13.) über in:

$$(14.)\quad \left\{ \begin{aligned} &c_{k,k-\mu} = \\ &(\lambda-k-1)_{n-k}(n-k)!(n-\mu)_{n-k} A_\mu + (\lambda-k-1)_{n-k-1}(n-k-1)!(n-\mu-1)_{n-k-1} B_\mu \end{aligned} \right.$$

Man erkennt nunmehr ohne Schwierigkeit das Bildungsgesetz der Coefficienten der gesuchten Differentialgleichung. Die Function $\varphi_k(x)$ ergiebt sich gleich der Summe zweier Ableitungen der Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, multiplicirt mit je einem Binomialcoefficienten; aus der Gleichung (14.) folgt:

$$(15.)\quad \varphi_k(x) = (\lambda-k-1)_{n-k}\varphi^{(n-k)}(x) + (\lambda-k-1)_{n-k-1}\psi^{(n-k-1)}(x).$$

Die für die hypergeometrische Function aufgestellten Bedingungen geben also der Gleichung (4.) die Gestalt:

$$(16.)\quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \sum_{k=n-1}^{k=0} (-1)^{n-k}\left[(\lambda-k-1)_{n-k}\varphi^{(n-k)}(x) + (\lambda-k-1)_{n-k-1}\psi^{(n-k-1)}(x)\right]\frac{d^k y}{dx^k} \\ &\qquad = 0, \end{aligned} \right.$$

worin $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ganze Functionen vom n^{ten} und $n-1^{\text{ten}}$ Grade bedeuten.

Die Function $\varphi(x)$ hat die endlichen singulären Punkte zu Wurzeln; die Gleichung:

$$(17.)\quad \varphi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

bestimmt daher die Constanten von $\varphi(x)$ vollständig. Es bleibt nur noch übrig, nachzuweisen, wie die Constanten der Function $\psi(x)$ von den gegebenen Werthen abhängen. Man findet, dass:

$$(18.)\quad \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{b_1}{x-a_1} + \frac{b_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{b_n}{x-a_n}$$

sein muss.

Zu diesem Resultat führt die in der Definition aufgestellte Bedingung, dass die Differentialgleichung ein partikuläres Integral haben soll, welches nach

Division durch $(x-a_\nu)^{b_\nu+\lambda-1}$ in der Umgebung von a_ν eindeutig, endlich und von Null verschieden ist. Man setzt in Gleichung (16.):

$$y = (x-a_\nu)^{b_\nu+\lambda-1}\eta$$

und

$$\eta = \gamma_0+\gamma_1(x-a_\nu)+\gamma_2(x-a_\nu)^2+\gamma_3(x-a_\nu)^3+\cdots .$$

Durch Multiplication mit $(x-a_\nu)^{n-b_\nu-\lambda}$ entfernt man die gebrochenen und negativen Exponenten, und hat dann das constante Glied und die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von $x-a_\nu$ einzeln gleich Null zu nehmen. Das constante Glied, zu dem nur die beiden höchsten Ableitungen von y beitragen, giebt, weil γ_0 nicht verschwinden darf, die Bedingung:

$$b_\nu\varphi'(a_\nu)-\psi(a_\nu) = 0$$

oder, da $\varphi'(a_\nu)=\left[\frac{\varphi(x)}{x-a_\nu}\right]_{(x=a_\nu)}$ ist, die folgende:

$$b_\nu = \left[\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu)\right]_{(x=a_\nu)}.$$

Man erkennt hieraus ohne Weiteres, dass die Grössen b_ν die Zähler der Partialbruchzerlegung von $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ sind, und es ist somit die Gleichung (18.) bewiesen.

Durch die vorhergehenden Entwicklungen ist in aller Strenge die Differentialgleichung (16.), in welcher $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ die in (17.) und (18.) angegebenen Werthe haben, als diejenige Differentialgleichung hergeleitet worden, welcher die am Anfang definirte hypergeometrische Function $H_n\left(\begin{matrix}a_1, a_2, \dots a_n, x\\ b_1, b_2, \dots b_n, \lambda\end{matrix}\right)$ genügen muss. Es soll nun umgekehrt bewiesen werden, dass die gefundene Differentialgleichung (16.) ausreichend ist, die hypergeometrische Function zu bestimmen, indem das allgemeine Integral derselben genau diejenigen Eigenschaften hat, durch welche die hypergeometrische Function definirt worden ist.

Die Differentialgleichung (16.) erlaubt eine Integration in geschlossener Form; man findet bestimmte Integrale, sehr ähnlich dem der *Gauss*'schen hypergeometrischen Reihe, als partikuläre Lösungen. An diesen bestimmten Integralen kann man direct die von der hypergeometrischen Function geforderte Art der Verzweigung nachweisen.

II.

Man integrirt die abgeleitete Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, welche kurz als *hypergeometrische Differentialgleichung* bezeichnet werden möge, durch ein für y eingeführtes bestimmtes Integral. Dasselbe enthält x als Parameter und ausserdem eine von x unabhängige, unbestimmt gelassene Function, über welche — nach dem Vorgang von *Euler* und *Jacobi* *) — derartig verfügt wird, dass die unter dem Integralzeichen stehende Grösse ein vollständiges Differential wird. Durch Ausführung der Integration in Bezug auf die Variable des bestimmten Integrals geht die Differentialgleichung in eine gewöhnliche Gleichung über.

Bei der Darstellung der hypergeometrischen Function durch bestimmte Integrale sind die Werthgebiete der Constanten einzuschränken. Im Folgenden werden die Constanten $b_1, b_2, \ldots b_n$ grösser als 1, die Constante λ grösser als n vorausgesetzt werden. Es findet hier etwas Aehnliches statt, wie bei der Gammafunction, deren Darstellung als bestimmtes Integral für alle negativen Argumente divergirt, während ihr Werth nur für die negativen ganzen Zahlen unendlich wird. Die Beschränkungen von $b_1, b_2, \ldots b_n$ und λ lassen sich später wieder beseitigen, indem sowohl Reductionsformeln zu Hülfe genommen werden können, als auch die Reihenentwicklungen für mehr Werthe convergent sind, als die bestimmten Integrale.

Die hypergeometrische Differentialgleichung lautet:

$$(1.)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi(x)\frac{d^n y}{dx^n} - [(\lambda-n)_1 \varphi'(x) + \psi(x)]\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots \\ &+ (-1)^{n-k}[(\lambda-k-1)_{n-k}\varphi^{(n-k)}(x) + (\lambda-k-1)_{n-k-1}\psi^{(n-k-1)}(x)]\frac{d^k y}{dx^k} + \cdots \\ &+ (-1)^n[(\lambda-1)_n \varphi^{(n)}(x) + (\lambda-1)_{n-1}\psi^{(n-1)}(x)]y = 0, \end{aligned}\right.$$

worin:

$$(2.)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(x) &= (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) \\ &= x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_{n-1}x + A_n, \\ \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} &= \frac{b_1}{x-a_1} + \frac{b_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{b_n}{x-a_n}, \\ \psi(x) &= B_0 x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + \cdots + B_{n-2}x + B_{n-1} \end{aligned}\right.$$

zu nehmen ist.

Man setze:

$$(3.)\quad y = \int_g^h U(u-x)^{\lambda-1}\,du,$$

---

*) Cfr. *Jacobi* „Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe“ im 56. Bande dieses Journals.

wo U eine Function von u allein, g constant, und h entweder constant oder gleich x sein soll.

Dann folgt:

$$\frac{d^k y}{dx^k} = (-1)^k \int_g^h U(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-k)(u-x)^{\lambda-k-1}\,du.$$

Für constante Grenzen ergiebt sich dies ohne Weiteres. Aber auch wenn $h=x$ ist, verschwindet in

$$\frac{dy}{dx} = -\int_g^x U(\lambda-1)(u-x)^{\lambda-2}\,du + [U(u-x)^{\lambda-1}]_{u=x}$$

der zweite Summandus wegen des Factors $(u-x)^{\lambda-1}$, und in derselben Weise wird, weil $\lambda > n$ ist, bei allen n Differentialquotienten das von der variablen oberen Grenze herrührende Glied identisch gleich Null.

Durch Einsetzung obiger Ausdrücke nimmt, nach Unterdrückung des gemeinsamen Factors $(-1)^n$, die Differentialgleichung (1.) die folgende Form an:

$$\int_g^h U \left\{ \begin{array}{l} (\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n)\,\varphi(x)\,(u-x)^{\lambda-n-1} \\ +(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+1)\,[(\lambda-n)_1\,\varphi'(x)+\psi(x)]\,(u-x)^{\lambda-n}+\cdots \\ +(\lambda-1)\dots(\lambda-k)\prec[(\lambda-k-1)_{n-k}\varphi^{(n-k)}(x)+(\lambda-k-1)_{n-k-1}\psi^{n-k-1}(x)](u-x)^{\lambda-k-1} \\ +\cdots+[(\lambda-1)_n\,\varphi^{(n)}(x)+(\lambda-1)_{n-1}\psi^{(n-1)}(x)]\,(u-x)^{\lambda-1} \end{array} \right\} du$$

$$= 0.$$

Der Factor

$$(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+1)$$

kommt bei sämmtlichen Summanden vor, da

$$(\lambda-k-1)_{n-k} = \frac{(\lambda-k-1)(\lambda-k-2)\dots(\lambda-n+1)(\lambda-n)}{1.2\dots(n-k)},$$

$$(\lambda-k-1)_{n-k-1} = \frac{(\lambda-k-1)(\lambda-k-2)\dots(\lambda-n+1)}{1.2\dots(n-k-1)}$$

gesetzt ist. Hebt man denselben heraus, so bleibt, abgesehen von ganzzahligen Factoren, nur noch $\lambda-n$ übrig, womit $\varphi(x)$ und seine Ableitungen multiplicirt sind. Man trennt ferner die Glieder, in welchen $\varphi(x)$ vorkommt, von denen, welche $\psi(x)$ enthalten, und gelangt somit zu der folgenden Gleichung:

$$\int_g^h U(\lambda-n)(u-x)^{\lambda-n-1}\left\{\varphi(x)+\varphi'(x)\frac{u-x}{1}+\cdots+\varphi^{(n)}(x)\frac{(u-x)^n}{1.2\dots n}\right\}du$$

$$+\int_g^h U(u-x)^{\lambda-n}\left\{\psi(x)+\psi'(x)\frac{u-x}{1}+\cdots+\psi^{(n-1)}(x)\frac{(u-x)^{n-1}}{1.2\dots n-1}\right\}du = 0.$$

Es ist leicht zu sehen, dass die beiden in den Klammern enthaltenen Summen durch Anwendung des *Taylor*schen Satzes, da $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ganze Functionen des n^{ten} und $n-1^{\text{ten}}$ Grades sind, in $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ übergehen. Auf diese Weise ergiebt sich:

$$\int_g^h U[\varphi(u)(\lambda-n)(u-x)^{\lambda-n-1}+\psi(u)(u-x)^{\lambda-n}]\,du = 0,$$

und es ist jetzt leicht, U so zu bestimmen, dass die Integration nach u ausgeführt werden kann.

Bezeichnet V eine Function von u, so ist:

$$\frac{d}{du}[V(u-x)^{\lambda-n}] = V(\lambda-n)(u-x)^{\lambda-n-1}+\frac{dV}{du}(u-x)^{\lambda-n}.$$

Um also in obiger Gleichung den Ausdruck hinter dem Integralzeichen auf diese Form zu bringen, hat man nur zu setzen:

$$(4.)\qquad \begin{cases} U\varphi(u) = V, \\ U\psi(u) = \dfrac{dV}{du}, \end{cases}$$

woraus folgt:

$$\frac{dV}{V} = \frac{\psi(u)}{\varphi(u)}\,du = \left[\frac{b_1}{u-a_1}+\frac{b_2}{u-a_2}+\cdots+\frac{b_n}{u-a_n}\right]du,$$

$$\log V = b_1\log(u-a_1)+b_2\log(u-a_2)+\cdots+b_n\log(u-a_n),$$

also

$$(5.)\qquad \begin{cases} V = (u-a_1)^{b_1}(u-a_2)^{b_2}\ldots(u-a_n)^{b_n}, \\ U = (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}. \end{cases}$$

Nachdem U so als Function von u bestimmt worden ist, erhält man aus der Gleichung (1.) schliesslich:

$$\int_g^h \frac{d}{du}[V(u-x)^{\lambda-n}]\,du = 0$$

oder

$$[(u-a_1)^{b_1}(u-a_2)^{b_2}\ldots(u-a_n)^{b_n}(u-x)^{\lambda-n}]_{u=h}-[(u-a_1)^{b_1}(u-a_2)^{b_2}\ldots(u-a_n)^{b_n}(u-x)^{\lambda-n}]_{u=g} = 0.$$

Dieser Gleichung geschieht, da $b_1, b_2, \ldots b_n$ und $\lambda-n$ nach der Voraussetzung positiv sind, Genüge, sobald für g und h zwei der $n+1$ Werthe $a_1, a_2, \ldots a_n, x$ genommen werden. Es ergeben sich also, wenn man durch μ und ν zwei beliebige ganze Zahlen aus der Reihe 1, 2, ... n bezeichnet,

die partikulären Integrale:

$$(6.)\quad \begin{cases} y = \int_{a_\mu}^{a_\nu} (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du \\ \text{und} \\ y = \int_{a_\nu}^{x} (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du, \end{cases}$$

wodurch die Differentialgleichung (1.) vollständig integrirt ist.

Die Grenzen der bestimmten Integrale $a_1, \dots a_n$ und x sind, wie bei den Perioden der *Abel*schen Integrale, die Verzweigungspunkte der zu integrirenden Function. Es sollen diese partikulären Integrale, welche Zweige der allgemeinen hypergeometrischen Function darstellen, als *hypergeometrische Integrale* bezeichnet werden.

III.

Es ist nun zu beweisen, dass das allgemeine Integral der behandelten Differentialgleichung gerade dasjenige Verhalten an den singulären Punkten zeigt, welches bei der Definition der hypergeometrischen Function festgesetzt worden ist.

Für die Umgebung jedes endlichen singulären Punktes a_ν soll ein convergent entwickelbares Integral mit $n-1$ willkürlichen Constanten und ein anderes partikuläres Integral, das sich wie die Potenz $(x-a_\nu)^{b_\nu+\lambda-1}$ verhält, vorhanden sein. Der Beweis, dass dies der Fall ist, ergiebt sich daraus, dass je $n-1$ verschiedene Integrale, die endlich und eindeutig sind, existiren; denn diese liefern zusammen eine convergente, nach positiven Potenzen von $x-a_\nu$ fortschreitende Reihe, deren $n-1$ erste Coefficienten willkürliche Constanten sind. Ebenso zeigt man, dass $n-1$ verschiedene Integrale nach Division durch $x^{\lambda-1}$ convergente fallende Reihen geben, wodurch die Bedingung für $x=\infty$ erfüllt ist. Die n^{ten} Integrale werden direct in der gesuchten Gestalt erhalten.

Die Convergenz der Reihenentwicklungen folgert man überall aus der Eindeutigkeit und Endlichkeit der partikulären Integrale, nach dem Satze, dass jede Function in dem Gebiete, wo sie endlich und eindeutig ist, convergent entwickelt werden kann. Die Fälle, in denen nachgewiesen werden muss, dass die partikulären Integrale von Null verschieden sind, werden durch den nächsten Abschnitt erledigt, wo die Reihenentwicklungen selbst gegeben werden.

Die Grenzen der bestimmten Integrale nach u sind je zwei der $n+1$ Grössen $a_1, a_2, \ldots a_n$ und x. Es zeigt sich, dass in der Umgebung eines singulären Punktes a_ν immer diejenigen Integrale, welche a_ν nicht als Grenze enthalten, eindeutig und endlich sind; die Grenzen a_ν und x liefern dagegen das mehrdeutige Integral, das nach Division durch $(x-a_\nu)^{b_\nu+\lambda-1}$ eindeutig und endlich wird. Für die Entwicklung nach fallenden Potenzen von x gehören die $n-1$ Integrale mit constanten Grenzen zusammen, und der zweite Exponent kommt nur, wenn man x zur Grenze nimmt, vor.

Die verschiedenen partikulären Integrale sollen im Folgenden durch Indices bezeichnet werden, indem man setzt:

$$y_{\mu,\nu} = \int_{a_\mu}^{a_\nu} (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du,$$

$$y_\nu = \int_{a_\nu}^{x} (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du.$$

Die Integrale $y_{\mu,\nu}$ werden durch die Substitution:

$$u = (a_\nu-a_\mu)v+a_\mu$$

auf die Grenzen 0 und 1 gebracht; es ergiebt sich dann:

$$y_{\mu,\nu} = (a_\nu-a_\mu)^{s-n}\int_0^1 \prod_{\tau=1}^{\tau=n}\left(v-\frac{a_\tau-a_\mu}{a_\nu-a_\mu}\right)^{b_\tau-1}\left(v-\frac{x-a_\mu}{a_\nu-a_\mu}\right)^{\lambda-1}dv,$$

wo

$$s = b_1+b_2+\cdots+b_n+\lambda$$

gesetzt ist. Man bemerke, dass unter den n ersten Factoren stets eine Potenz von v und eine Potenz von $v-1$ vorkommt. Man erhält z. B. für $y_{1,2}$:

$$y_{1,2} =$$

$$(a_2-a_1)^{s-n}\int_0^1 v^{b_1-1}(v-1)^{b_2-1}\left(v-\frac{a_3-a_1}{a_2-a_1}\right)^{b_3-1}\ldots\left(v-\frac{a_n-a_1}{a_2-a_1}\right)^{b_n-1}\left(v-\frac{x-a_1}{a_2-a_1}\right)^{\lambda-1}dv.$$

Die Integrale y_ν nehmen die Grenzen 0 und 1 durch die Substitution:

$$u = (x-a_\nu)v+a_\nu$$

an; sie erhalten dann die folgende Gestalt:

$$y_\nu = K_\nu(x-a_\nu)^{b_\nu+\lambda-1}\int_0^1 v^{b_\nu-1}(v-1)^{\lambda-1}\Pi_{(\tau)}\left(\frac{x-a_\nu}{a_\tau-a_\nu}v-1\right)^{b_\tau-1}dv,$$

$$(\tau = 1, 2, \ldots(\nu-1), (\nu+1), \ldots n)$$

wo K_ν die Constante:

$$(a_1-a_\nu)^{b_1-1}(a_2-a_\nu)^{b_2-1}\ldots(a_{\nu-1}-a_\nu)^{b_{\nu-1}-1}(a_{\nu+1}-a_\nu)^{b_{\nu+1}-1}\ldots(a_n-a_\nu)^{b_n-1}$$

bedeutet. Es ist z. B. y_1:

$$y_1 = K_1(x-a_1)^{b_1+\lambda-1}\int_0^1 v^{b_1-1}(v-1)^{\lambda-1}$$
$$\times\left(\frac{x-a_1}{a_2-a_1}v-1\right)^{b_2-1}\left(\frac{x-a_1}{a_3-a_1}v-1\right)^{b_3-1}\ldots\left(\frac{x-a_1}{a_n-a_1}v-1\right)^{b_n-1}dv.$$

Man behandelt zunächst die Integrale $y_{\mu,\nu}$, von denen zu beweisen ist, dass sie für das Bereich eines singulären Punktes a_k eindeutig und endlich sind, sobald k weder μ noch ν ist. Die Endlichkeit erhellt ohne Weiteres, sowohl bei diesen, als bei den andern Integralen, da $b_1-1, \ldots b_n-1, \lambda-1$ als positiv vorausgesetzt sind, und man folglich eine überall endliche Function zwischen endlichen Grenzen zu integriren hat. Um auf die Eindeutigkeit zu prüfen, lässt man die Variable x in der imaginären Ebene eine kleine geschlossene Curve um den Punkt a_k beschreiben; kommt die Function genau mit dem früheren Werthe zurück, so ist sie eindeutig. Man nimmt demnach x in der Nähe von a_k an und bezeichnet die Coordinaten der kleinen geschlossenen Curve durch $x+\delta x$. Es sei: $x=\xi_1+i\xi_2$, wo ξ_1 und ξ_2 reell, und $\delta x=\delta\xi_1+i\delta\xi_2$. Der Punkt x gilt hierbei als fester Ausgangspunkt; das Verhältniss von $\delta\xi_1$ und $\delta\xi_2$ zu einander giebt die Form der kleinen Curve.

Das betrachtete Integral:

$$y_{\mu,\nu} = \int_{a_\mu}^{a_\nu}(u-a_1)^{b_1-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}du,$$

in welchem nur der letzte Factor $(u-x)^{\lambda-1}$ variabel ist, löst man für den vorliegenden Zweck in seine Elemente auf, und zeigt, dass jedes einzelne Element eindeutig ist.

Wenn x eine kleine Curve um den Punkt a_k durchläuft, so beschreibt die Differenz $x-u$ eine congruente Curve, die von der ersteren um die Werthe des u entfernt ist. Nur in dem Falle, wo die Curve des $x-u$ den Nullpunkt einschliesst, kommt die Potenz $(x-u)^{\lambda-1}$ und ebenso $(u-x)^{\lambda-1}$ mit einem andern als dem ursprünglichen Werthe zurück. Es ist nun leicht zu sehen, dass wenn x fortwährend von a_k nur wenig verschieden ist, während u einen Werth zwischen a_μ und a_ν hat, man die Curve der Differenz $x-u$ stets in endlicher Entfernung vom Nullpunkt halten kann. Denn selbst für den Fall, dass a_k zwischen a_μ und a_ν liegt, braucht man nur die Integrationscurve des u so zu wählen, dass der Punkt a_k umgangen wird. Beschreibt also x eine kleine Curve um den Punkt a_k, so bleiben alle Elemente:

$$(u-a_1)^{b_1-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}du$$

des Integrals $y_{\mu,\nu}$ eindeutig; folglich ist das Integral selbst eindeutig.

Die Function y_k fand man gleich dem Ausdruck:

$$y_k = K_k(x-a_k)^{b_k+\lambda-1}\int_0^1 v^{b_k-1}(v-1)^{\lambda-1}\,\Pi_{(\tau)}\Big(\frac{x-a_k}{a_\tau-a_k}v-1\Big)^{b_\tau-1}dv,$$

$$(\tau = 1, 2, \ldots (k-1), (k+1), \ldots n)$$

in welchem die Potenz $(x-a_k)^{b_k+\lambda-1}$ vor das bestimmte Integral getreten ist. Man erkennt unmittelbar, dass letzteres eindeutig bleibt, wenn x den Punkt a_k umkreist. Denn da $x-a_k$ eine kleine Grösse ist, und v die Einheit nicht übersteigt, so ist der Subtrahendus 1 überall weit grösser als der Minuendus $\frac{x-a_k}{a_\tau-a_k}v$, so dass die Differenzen $\frac{x-a_k}{a_\tau-a_k}v-1$ sämmtlich von Null um endliche Werthe verschieden bleiben. Es ist also jedes Element:

$$\Big(\frac{x-a_k}{a_1-a_k}v-1\Big)^{b_1-1}\Big(\frac{x-a_k}{a_2-a_k}v-1\Big)^{b_2-1}\ldots\Big(\frac{x-a_k}{a_n-a_k}v-1\Big)^{b_n-1}dv$$

und folglich jenes bestimmte Integral selbst im Bereich des Punktes a_k eindeutig. Hieraus geht hervor, dass die Function y_k nach Division durch $(x-a_k)^{b_k+\lambda-1}$ eindeutig und endlich wird.

Für den Punkt a_k ist schliesslich noch die Eindeutigkeit des Integrals y_ν:

$$y_\nu = \int_{a_\nu}^{x}(u-a_1)^{b_1-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}du,$$

wenn ν von k verschieden ist, nachzuweisen. Wenn x die kleine Curve mit den Coordinaten $x+\delta x$ um den Punkt a_k beschreibt, variirt y_ν in doppelter Weise, indem einerseits der Factor $(u-x)^{\lambda-1}$, andererseits die obere Grenze von x abhängen. Die von der oberen Grenze herrührende Variation ist aber identisch gleich Null, weswegen y_ν ähnlich wie die Integrale mit constanter Grenze behandelt werden kann. Man hat:

$$\delta y_\nu = \frac{dy_\nu}{dx}\delta x,$$

oder, wenn man die Regeln über das Differentiiren bestimmter Integrale anwendet:

$$\delta y_\nu =$$

$$\int_{a_\nu}^{x}(u-a_1)^{b_1-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}\delta\,[(u-x)^{\lambda-1}]du+[(u-a_1)^{b_1-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}]_{u=x}\delta x.$$

Der zweite Summandus verschwindet durch den Factor $(u-x)^{\lambda-1}$, und man erhält daher das Increment von y_ν dadurch, dass man ausschliesslich in $(u-x)^{\lambda-1}$ die Werthe $x+\delta x$ für x einsetzt, dagegen die obere Grenze unverändert gleich dem Ausgangswerth x lässt. Indem man nun wieder das

Integral in seine Elemente auflöst, ist es nicht schwer, zu beweisen, dass jedes einzelne Element eindeutig ist. Der Einfachheit halber denke man sich x auf der Verbindungslinie von a_ν und a_k liegend, in welchem Falle man gradlinig von x bis a_ν integriren kann. Umkreist dann x den Punkt a_k, so bleibt die congruente kleine Curve der Differenz $x-u$, wenn u einen Werth zwischen x und a_ν hat, stets ausserhalb des Nullpunktes mit einziger Ausnahme des ersten Elements, dessen Curve für $u=x$ vom Nullpunkt selbst ausgeht und dahin zurückkehrt. Dieses eine Element ist jedoch bei seinem Ausgangs- und Rückkehrpunkte wegen des Factors $(u-x)^{\lambda-1}$ identisch Null. Es kommen also auch in y_ν sämmtliche Elemente nach Umkreisung des Punktes a_k mit dem ursprünglichen Werthe wieder an; folglich ist y_ν im Bereich von a_k eindeutig. Liegt x nicht grade in der Verbindungslinie von a_ν und a_k, so hat man, um dieselbe Schlussfolgerung anwenden zu können, nur in der Integrationscurve des u den Punkt a_k genügend zu umgehen.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass alle Integrale $y_{\mu,\nu}$ und y_ν für den Punkt a_k eindeutig und endlich sind, sobald μ und ν von k verschieden sind, während y_k nach Division durch die Potenz $(x-a_k)^{b_k+\lambda-1}$ eindeutig und endlich wird. Es bleibt der singuläre Werth $x=\infty$ übrig, für den bewiesen wird, dass alle Integrale $y_{\mu,\nu}$ nach Division durch $x^{\lambda-1}$ endlich und eindeutig sind.

Schreibt man $y_{\mu,\nu}$:

$$y_{\mu,\nu} = x^{\lambda-1}\int_{a_\mu}^{a_\nu}(u-a_1)^{b_1-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}\left(\frac{u}{x}-1\right)^{\lambda-1}du,$$

so sieht man unmittelbar, dass wenn x einen Kreis um den Anfangspunkt mit genügend grossem Radius beschreibt, die Curve der Differenz $\left(\frac{u}{x}-1\right)$ für alle Werthe des u in der Nähe des Punktes (-1), also in endlicher Entfernung vom Nullpunkt bleibt. Aus der Eindeutigkeit und Endlichkeit aller Elemente des obigen bestimmten Integrals folgt die Eindeutigkeit und Endlichkeit des Products: $y_{\mu,\nu}x^{-(\lambda-1)}$ für alle genügend grossen Werthe des x. Es sind daher $n-1$ verschiedene partikuläre Integrale vorhanden, welche nach Division durch $x^{\lambda-1}$ für grosse Werthe des x eindeutig und endlich sind.

Hiermit ist der Beweis geliefert, dass das allgemeine Integral der behandelten Differentialgleichung die am Anfang gestellten Bedingungen sämmtlich erfüllt, und dass dasselbe folglich mit der hypergeometrischen Function n^{ter} Ordnung völlig identisch ist.

Es bliebe noch übrig, den Exponenten des n^{ten} Integrals für $x=\infty$

zu ermitteln. Dieser Exponent kommt in den Bedingungen nicht vor; der an das n^{te} Integral gestellten Forderung, sich algebraisch für $x=\infty$ zu verhalten, ist schon durch die Form der Gleichung (1.) im Abschnitt (I.) genügt, da Logarithmen bei dem alleinstehenden Integral nicht auftreten können. Der Exponent soll jedoch der Vollständigkeit halber berechnet werden.

Bis auf ganzzahlige Bestandtheile findet man denselben aus dem bekannten Satz *), dass die Summe der Exponenten für $x=\infty$ sich von der Summe aller übrigen Exponenten nur um ganze Zahlen unterscheidet. Bezeichnet σ den gesuchten Exponenten und m eine unbestimmte ganze Zahl, so folgt:

$$\sigma+m+(n-1)(\lambda-1) = b_1+b_2+\cdots+b_n+n(\lambda-1)$$

oder

$$\sigma = s-m,$$

wo

$$s = b_1+b_2+\cdots+b_n+\lambda$$

gesetzt ist.

Um σ genau zu ermitteln, setzt man

$$y = x^\sigma\eta$$

und führt in die Differentialgleichung für η die Reihe

$$\eta = \gamma_0+\frac{\gamma_1}{x}+\frac{\gamma_2}{x^2}+\frac{\gamma_3}{x^3}+\cdots$$

ein. Die Forderung, dass γ_0 von Null verschieden sein soll, giebt dann die Gleichung:

$$S = 0,$$

wo S die nachstehende ganze Function n^{ten} Grades von σ bezeichnet:

$$\begin{aligned} S = {} & (-1)^n[(\lambda-1)_n n!+(\lambda-1)_{n-1}(n-1)!B_0] \\ & +(-1)^{n-1}(\sigma)_1[(\lambda-2)_{n-1}(n-1)!(n)_1+(\lambda-2)_{n-2}(n-2)!(n-1)_1B_0] \\ & + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ & -(\sigma)_{n-1}(n-1)![(\lambda-n)_1(n)_1+B_0]+(\sigma)_n n!. \end{aligned}$$

Es handelt sich darum, die n^{te} Wurzel der Gleichung $S=0$ zu finden, von der man weiss, dass $n-1$ Wurzeln nur um ganze Zahlen von λ verschieden sind. Man zeigt, dass $\sigma=s-n$ Wurzel der Gleichung $S=0$, und daher der gesuchte Exponent ist.

---

*) Ein allgemeiner Beweis dieses Satzes, welchen auch *Riemann* in seiner Arbeit über die hypergeometrische Reihe benutzt, findet sich in der erwähnten Abhandlung des Herrn *Fuchs*.

Setzt man nämlich $s-n$ für σ ein, so geht, da $B_0 = s-\lambda$ ist, der allgemeine Term von S, nach Anwendung der Formel

$$(\sigma)_k = (\sigma-1)_k + (\sigma-1)_{k-1},$$

in folgenden Ausdruck über:

$$(-1)^{n-k}\left[\begin{array}{l}(s-n)_k k!(n-1)_{k-1}(\lambda-k)_{n-k}(n-k)! \\ +(s-n)_{k+1}(k+1)!(n-1)_k(\lambda-k-1)_{n-k-1}(n-k-1)!\end{array}\right].$$

Hierin hebt sich der zweite Summandus des k^{ten} Terms überall gegen den ersten Summandus des $k+1^{\text{ten}}$ Terms, während gleichzeitig die Endglieder verschwinden. Somit ergiebt sich $\sigma = s-n$ als Wurzel von $S=0$.

Das n^{te} Hauptintegral für den unendlichen singulären Punkt ist folglich nach Division durch die Potenz x^{s-n} für $x=\infty$ eindeutig, endlich und von Null verschieden.

IV.

Die Reihenentwicklungen, welche sich für die hypergeometrischen Integrale ergeben, sind wesentlich verschiedener Art bei den mehrdeutigen und bei den eindeutigen Integralen. Bei ersteren erhält man, nach Abtrennung des mehrdeutigen Potenzfactors, eine Reihenentwicklung, bei welcher die Coefficienten endliche Summen sind, so lange die Potenz endlich ist. In der Entwicklung der eindeutigen Integrale dagegen treten, von der dritten Ordnung an, überall unendliche Reihen als Coefficienten der einzelnen Potenzen auf.

Die Reihenentwicklungen für die mehrdeutigen Integrale sollen zuerst ausgeführt werden. Es folgt die Behandlung der eindeutigen Integrale $y_{\mu,\nu}$, bei denen sich die als Coefficienten auftretenden unendlichen Reihen ebenfalls als hypergeometrische Integrale erweisen. Man findet Beziehungen zwischen Integralen n^{ter} und $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung, indem, abgesehen von einem Binomialcoefficienten, letztere mit constantem Argument die Coefficienten der Reihenentwicklungen ersterer werden. Man wählt, der einfacheren Bezeichnung wegen, den singulären Punkt a_1 aus und entwickelt die nach Potenzen von $x-a_1$ fortschreitenden Reihen. Es bleibt aber a_1 beliebig, so dass die Entwicklungen ebenso für $a_2, \ldots a_n$ gelten.

Das mehrdeutige Hauptintegral für den Punkt a_1 ist, nach Fortlassung constanter Factoren, folgendes:

$$y_1 = (x-a_1)^{b_1+\lambda-1}\int_0^1 v^{b_1-1}(1-v)^{\lambda-1}\left(1-\frac{x-a_1}{a_2-a_1}v\right)^{b_2-1}\cdots\left(1-\frac{x-a_1}{a_n-a_1}v\right)^{b_n-1}dv.$$

Man setzt für die Potenzen der Binomialreihen ein:

$$\left(1-\frac{x-a_1}{a_\nu-a_1}v\right)^{b_\nu-1} =$$

$$1-(b_\nu-1)_1\frac{x-a_1}{a_\nu-a_1}v+(b_\nu-1)_2\frac{(x-a_1)^2}{(a_\nu-a_1)^2}v^2-\cdots+(-1)^k(b_\nu-1)_k\frac{(x-a_1)^k}{(a_\nu-a_1)^k}v^k+\cdots,$$

kurz bezeichnet durch:

$$1-c_1^{(\nu)}(x-a_1)v+c_2^{(\nu)}(x-a_1)^2v^2-\cdots+(-1)^k c_k^{(\nu)}(x-a_1)^k v^k+\cdots,$$

indem, für $\nu=2, 3, \ldots n$:

$$c_k^{(\nu)} = (b_\nu-1)_k(a_\nu-a_1)^{-k}$$

genannt ist, und führt die Multiplication aus. Der Coefficient von $(x-a_1)^k v^k$, den man durch $(-1)^k C_k$ bezeichnet, wird bestimmt durch die Gleichung:

$$C_k = \sum_{(m_2, m_3, \ldots m_n)} c_{(m_2)}^{(2)} c_{(m_3)}^{(3)} \ldots c_{(m_n)}^{(n)},$$

worin die Summe sich über alle ganzzahligen Werthe von $m_2, m_3, \ldots m_n$ erstreckt, welche der Bedingung:

$$m_2+m_3+\cdots+m_n = k$$

genügen. Es ist hiernach

$$C_1=\frac{(b_2-1)_1}{a_2-a_1}+\frac{(b_3-1)_1}{a_3-a_1}+\cdots+\frac{(b_n-1)_1}{a_n-a_1},$$

$$C_2=\frac{(b_2-1)_2}{(a_2-a_1)^2}+\frac{(b_3-1)_2}{(a_3-a_1)^2}+\cdots+\frac{(b_n-1)_2}{(a_n-a_1)^2}$$
$$+\frac{(b_2-1)_1(b_3-1)_1}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)}+\frac{(b_2-1)_1(b_4-1)_1}{(a_2-a_1)(a_4-a_1)}+\cdots+\frac{(b_{n-1}-1)_1(b_n-1)_1}{(a_{n-1}-a_1)(a_n-a_1)};$$

allgemein

$$C_k=\frac{(b_2-1)_k}{(a_2-a_1)^k}+\frac{(b_3-1)_k}{(a_3-a_1)^k}+\cdots+\frac{(b_n-1)_k}{(a_n-a_1)^k}$$
$$+\frac{(b_2-1)_{k-1}(b_3-1)_1}{(a_2-a_1)^{k-1}(a_3-a_1)}+\cdots+\frac{(b_{n-1}-1)_1(b_n-1)_{k-1}}{(a_{n-1}-a_1)(a_n-a_1)^{k-1}}$$
$$+\frac{(b_2-1)_{k-2}(b_3-1)_2}{(a_2-a_1)^{k-2}(a_3-a_1)^2}+\frac{(b_2-1)_{k-2}(b_3-1)_1(b_4-1)_1}{(a_2-a_1)^{k-2}(a_3-a_1)(a_4-a_1)}+\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{(b_2-1)_1(b_3-1)_1\ldots(b_{k+1}-1)_1}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)\ldots(a_{k+1}-a_1)}+\cdots+\frac{(b_{n-k+1}-1)_1\ldots(b_{n-1}-1)_1(b_n-1)_1}{(a_{n-k+1}-a_1)\ldots(a_{n-1}-a_1)(a_n-a_1)}.$$

Nach Festsetzung dieser Benennung ergiebt sich:

$$\frac{y_1}{(x-a_1)^{b_1+\lambda-1}}$$

$$=\int_0^1 v^{b_1-1}(1-v)^{\lambda-1}dv\,[1-C_1(x-a_1)v+C_2(x-a_1)^2v^2-\cdots+(-1)^kC_k(x-a_1)^kv^k+\cdots]$$

$$=\int_0^1 v^{b_1-1}(1-v)^{\lambda-1}dv-C_1(x-a_1)\int_0^1 v^{b_1}(1-v)^{\lambda-1}dv$$

$$+C_2(x-a_1)^2\int_0^1 v^{b_1+1}(1-v)^{\lambda-1}dv-\cdots+(-1)^kC_k(x-a_1)^k\int_0^1 v^{b_1+k-1}(1-v)^{\lambda-1}dv+\cdots.$$

Die hier vorkommenden bestimmten Integrale sind *Euler*sche Integrale der ersten Art, welche durch Γ-Functionen nach der bekannten Formel:

$$\int_0^1 v^{\mu-1}(1-v)^{\lambda-1}dv = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu+\lambda)}$$

ausgedrückt werden. Man erhält also:

$$\frac{y_1}{(x-a_1)^{b_1+\lambda-1}} = \frac{\Gamma(b_1)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(b_1+\lambda)}-C_1(x-a_1)\frac{\Gamma(b_1+1)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(b_1+\lambda+1)}+C_2(x-a_1)^2\frac{\Gamma(b_1+2)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(b_1+\lambda+2)}$$
$$-\cdots+(-1)^kC_k(x-a_1)^k\frac{\Gamma(b_1+k)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(b_1+\lambda+k)}+\cdots.$$

Wendet man auf $\Gamma(b_1+k)$ und $\Gamma(b_1+\lambda+k)$ die Reductionsformel

$$\Gamma(p+k) = p(p+1)\ldots(p+k-1)\,\Gamma(p)$$

an, so erhält die rechte Seite den gemeinsamen Factor $\frac{\Gamma(b_1)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(b_1+\lambda)}$, der wegen der willkürlichen Constante des Integrals fortgelassen werden kann. Ausserdem ist der Quotient

$$\frac{b_1(b_1+1)\ldots(b_1+k-1)}{(b_1+\lambda)(b_1+\lambda+1)\ldots(b_1+\lambda+k-1)}$$

gleich dem Quotienten der beiden Binomialcoefficienten $(b_1+k-1)_k$ und $(b_1+\lambda+k-1)_k$.

Auf diese Weise gewinnt man schliesslich für das mehrdeutige Integral y_1 die Reihenentwicklung:

$$\frac{y_1}{(x-a_1)^{b_1+\lambda-1}}=1-\frac{(b_1)_1}{(b_1+\lambda)_1}C_1(x-a_1)+\frac{(b_1+1)_2}{(b_1+\lambda+1)_2}C_2(x-a_1)^2-\frac{(b_1+2)_3}{(b_1+\lambda+2)_3}C_3(x-a_1)^3$$
$$+\cdots+(-1)^k\frac{(b_1+k-1)_k}{(b_1+\lambda+k-1)_k}C_k(x-a_1)^k+\cdots,$$

oder

$$y_1 = (x-a_1)^{b_1+\lambda-1}\left\{1+\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-1)^k(b_1+k-1)_k}{(b_1+\lambda+k-1)_k}C_k(x-a_1)^k\right\}.$$

Die Reihe nimmt z. B. für die Differentialgleichung *dritter* Ordnung die folgende Gestalt an:

$$\frac{y_1}{(x-a_1)^{b_1+\lambda-1}} =$$

$$1-\frac{b_1}{b_1+\lambda}\left[\frac{(b_2-1)_1}{a_2-a_1}+\frac{(b_3-1)_1}{a_3-a_1}\right](x-a_1)$$

$$+\frac{b_1(b_1+1)}{(b_1+\lambda)(b_1+\lambda+1)}\left[\frac{(b_2-1)_2}{(a_2-a_1)^2}+\frac{(b_2-1)_1(b_3-1)_1}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)}+\frac{(b_3-1)_2}{(a_3-a_1)^2}\right](x-a_1)^2$$

$$-\frac{b_1(b_1+1)(b_1+2)}{(b_1+\lambda)(b_1+\lambda+1)(b_1+\lambda+2)}\left[\frac{(b_2-1)_3}{(a_2-a_1)^3}+\frac{(b_2-1)_2(b_3-1)_1}{(a_2-a_1)^2(a_3-a_1)}+\frac{(b_2-1)_1(b_3-1)_2}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)^2}+\frac{(b_3-1)_3}{(a_3-a_1)^3}\right](x-a_1)^3$$

$$+\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+(-1)^k\frac{b_1(b_1+1)\ldots(b_1+k-1)}{(b_1+\lambda)(b_1+\lambda+1)\ldots(b_1+\lambda+k-1)}\left[\sum_{\nu=0}^{\nu=k}\frac{(b_2-1)_{k-\nu}(b_3-1)_\nu}{(a_2-a_1)^{k-\nu}(a_3-a_1)^\nu}\right](x-a_1)^k$$

$$+\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Dieser Ausdruck ist die einfachste Reihe nach der *Gauss*schen, in welche derselbe für $b_3=1$ übergeht.

Die eindeutigen Integrale $y_{\mu,\nu}$ erhält man für den Punkt a_1, wenn man weder μ noch ν gleich 1 macht. Man setze in

$$y_{\mu,\nu} = \int_{a_\mu}^{a_\nu}(u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}(u-x)^{\lambda-1}du$$

für $(u-x)^{\lambda-1}$ die Entwicklung nach dem binomischen Satz:

$$(u-a_1-[x-a_1])^{\lambda-1} = (u-a_1)^{\lambda-1}-(\lambda-1)_1(u-a_1)^{\lambda-2}(x-a_1)$$
$$+(\lambda-1)_2(u-a_1)^{\lambda-3}(x-a_1)^2-\cdots+(-1)^k(\lambda-1)_k(u-a_1)^{\lambda-k-1}(x-a_1)^k$$
$$+\ \cdots\cdots\cdots\cdots;$$

dann ergiebt sich, wenn man der Abkürzung halber

$$\int_{a_\mu}^{a_\nu}(u-a_1)^{\beta-1}(u-a_2)^{b_2-1}\ldots(u-a_n)^{b_n-1}du = F(\beta)$$

setzt, für $y_{\mu,\nu}$ der Ausdruck:

$$y_{\mu,\nu} = F(b_1+\lambda-1)-(\lambda-1)_1F(b_1+\lambda-2)(x-a_1)+(\lambda-1)_2F(b_1+\lambda-3)(x-a_1)^2$$
$$-\cdots+(-1)^k(\lambda-1)_kF(b_1+\lambda-k+1)(x-a_1)^k+\cdots.$$

Da a_1 nach der Voraussetzung in den Grenzen a_μ und a_ν nicht vorkommt, so nimmt a_1, wenn man $n-1$ für n setzt, in $F(\beta)$ genau dieselbe Stelle ein, wie x in $y_{\mu,\nu}$. Die Ausdrücke $F(\beta)$ sind daher, wenn man a_1 als unabhängige

Variable auffasst, dieselben Integralfunctionen für die $n-1^{\text{te}}$ Ordnung, wie $y_{\mu,\nu}$ für die n^{te}.

Als Beispiel für diese Entwicklungen mögen die hypergeometrischen Integrale dritter Ordnung dienen, bei welchen die Coefficienten Integrale zweiter Ordnung, also *Gauss*sche hypergeometrische Reihen, mit constantem Argument werden.

Wenn man in dem Integral

$$y_{2,3} = \int_{a_2}^{a_3} (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}(u-a_3)^{b_3-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du$$

den binomischen Satz auf den letzten Factor anwendet:

$$(u-x)^{\lambda-1} = (u-a_1-[x-a_1])^{\lambda-1} =$$
$$(u-a_1)^{\lambda-1} - (\lambda-1)_1(u-a_1)^{\lambda-2}(x-a_1) + (\lambda-1)_2(u-a_1)^{\lambda-3}(x-a_1)^2 - \cdots,$$

so folgt:

$$y_{2,3} =$$
$$\int_{a_2}^{a_3} (u-a_2)^{b_2-1}(u-a_3)^{b_3-1}(u-a_1)^{b_1+\lambda-2}du\left[1-(\lambda-1)_1\frac{x-a_1}{u-a_1}+(\lambda-1)_2\frac{(x-a_1)^2}{(u-a_1)^2}+\cdots\right].$$

Man bringt das Integral auf die Grenzen 0 und 1 durch die Substitution:

$$u = (a_3-a_2)v + a_2,$$

und gelangt hierdurch, wenn man von einem constanten Factor absieht, zu dem Ausdruck:

$$y_{2,3} = \int_0^1 v^{b_2-1}(1-v)^{b_3-1}(1-qv)^{b_1+\lambda-2}\,dv$$
$$-\frac{(\lambda-1)_1}{a_2-a_1}(x-a_1)\int_0^1 v^{b_2-1}(1-v)^{b_3-1}(1-qv)^{b_1+\lambda-3}\,dv+\cdots$$
$$+(-1)^k\frac{(\lambda-1)_k}{(a_2-a_1)^k}(x-a_1)^k\int_0^1 v^{b_2-1}(1-v)^{b_3-1}(1-qv)^{b_1+\lambda-k-2}dv+\cdots,$$

in welchem durch q der Quotient $\frac{a_3-a_2}{a_1-a_2}$ bezeichnet ist. Nun ist

$$\int_0^1 v^{b_2-1}(1-v)^{b_3-1}(1-qv)^{b_1+\lambda-k-2}\,dv = \frac{\Gamma(b_2)\Gamma(b_3)}{\Gamma(b_2+b_3)}F(k+2-b_1-\lambda,\, b_2,\, b_2+b_3,\, q),$$

wo F die *Gauss*sche Reihe bedeutet. Man erhält folglich, nach Forthebung des gemeinsamen Factors von Γ-Functionen, das nachstehende partikuläre Integral für die dritte Ordnung:

$$y_{2,3} = F(2-b_1-\lambda,\ b_2,\ b_2+b_3,\ q) - \frac{(\lambda-1)_1}{a_2-a_1}(x-a_1)\,F(3-b_1-\lambda,\ b_2,\ b_2+b_3,\ q)$$
$$+\frac{(\lambda-1)_2}{(a_2-a_1)^2}(x-a_1)^2 F(4-b_1-\lambda,\ b_2,\ b_2+b_3,\ q) - \cdots$$
$$+(-1)^k\frac{(\lambda-1)_k}{(a_2-a_1)^k}(x-a_1)^k F(k+2-b_1-\lambda,\ b_2,\ b_2+b_3,\ q) + \cdots .$$

Ganz analoge Resultate ergeben sich, wenn man die Integrale $y_{\mu,\nu}$ nach fallenden Potenzen von x entwickelt.

Setzt man:

$$y = (x-a_1)^{b_1+\lambda-1}(x-a_2)^{b_2+\lambda-1}\ldots(x-a_n)^{b_n+\lambda-1}\eta,$$

so hat die Variable η bei jedem singulären Punkte a_ν ein einziges eindeutiges und $n-1$ mehrdeutige Integrale; für die zweite Ordnung haben y und η gleiche Eigenschaften. Es ist zu erwähnen, dass die gewöhnliche Form der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe mit der Gleichung für η identisch ist.

V.

Es soll zum Schluss noch die Existenz von Relationen dargethan werden, welche zwischen verschiedenen Functionen $y_{\mu,\nu}$, deren Exponenten sich um ganze Zahlen unterscheiden, statt haben. Diese Relationen enthalten je $n+1$ der Integrale $y_{\mu,\nu}$, in Bezug auf welche sie linear und homogen sind; die Coefficienten sind rationale Functionen der Argumente $x, \lambda, a_1, b_1, \ldots a_n, b_n$. Zur Herleitung dient eine Eigenschaft der Differentialgleichungen, deren Coefficienten ganze Functionen von x sind, und bei denen der Grad letzterer mit der Ordnung des betreffenden Differentialquotienten übereinstimmt.

Ist eine Differentialgleichung $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\varphi_{n+1}(x)\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + \varphi_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + \varphi_1(x)\frac{dy}{dx} + \varphi_0 y = 0$$

gegeben, wo $\varphi_m(x)$ eine ganze Function des m^{ten} Grades bezeichnet, und existirt für den singulären Punkt a_k ein eindeutiges und endliches Integral, so ist dasselbe in der Reihenentwicklung enthalten, welche sich aus der Differentialgleichung durch die Substitution:

$$y = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} c_\mu (x-a_k)^\mu$$

ergiebt. Durch Einführung der Reihe erhält man, als Bedingung, dass der

Coefficient von $(x-a_k)^\nu$ verschwinde, eine Gleichung:

$$P_{\nu+n}c_{\nu+n}+P_{\nu+n-1}c_{\nu+n-1}+\cdots+P_\nu c_\nu = 0,$$

bei der die Grössen $P_{\nu+n}, \ldots P_\nu$ linear aus den Constanten der Functionen φ_m zusammengesetzt sind. Es sind also, was charakteristisch für die betrachtete Differentialgleichung ist, je $n+1$ Coefficienten c_μ durch eine lineare, homogene Gleichung verbunden.

Betrachtet man nun Functionen $y_{\mu,\nu}$ von der $n+1^{\text{ten}}$ Ordnung, so ist deren Differentialgleichung von der hier behandelten Form. Die Coefficienten ihrer Entwicklung sind, wie im vorigen Abschnitt gezeigt wurde, Functionen $y_{\mu,\nu}$ von der n^{ten} Ordnung, deren Argumente sich aus $a_1, b_1, \ldots a_{n+1}, b_{n+1}, \lambda$ und ganzen Zahlen zusammensetzen, multiplicirt mit je einem Binomialcoefficienten.

Diese Grössen $y_{\mu,\nu}$ von der n^{ten} Ordnung werden als angrenzende Functionen bezeichnet, da ihre Argumente bis auf Exponenten, die sich um ganze Zahlen unterscheiden, identisch sind. Die soeben entwickelte Relation zwischen den Coefficienten c_μ führt also hier unmittelbar zu dem Satz: dass je $n+1$ derartige angrenzende Functionen $y_{\mu,\nu}$ der n^{ten} Ordnung durch eine lineare homogene Gleichung verbunden sind.

Die Factoren der Grössen c_μ bestehen linear aus den Constanten der Functionen φ_m. Da aber bei der hypergeometrischen Differentialgleichung diese Constanten, in Folge der Beziehungen zwischen den Wurzeln und den Coefficienten algebraischer Functionen, rational aus den Argumenten $a_1, b_1, \ldots$ zusammengesetzt sind (Gl. (2.) in II.): so folgt, dass die Coefficienten der obigen linearen und homogenen Gleichungen rationale Functionen der $2n+2$ Argumente der hypergeometrischen Function sind.

Es soll als Beispiel die schon im vorigen Abschnitt angeführte Reihenentwicklung dritter Ordnung behandelt werden, bei welcher man zu den bekannten Relationen zwischen drei angrenzenden hypergeometrischen Reihen gelangt.

Man fand als Integral der hypergeometrischen Differentialgleichung dritter Ordnung den Ausdruck:

$$\begin{aligned} y_{2,3} = {} & F(2-b_1-\lambda, b_2, b_2+b_3, q) - \frac{(\lambda-1)_1}{a_2-a_1}(x-a_1)F(3-b_1-\lambda, b_2, b_2+b_3, q) \\ & + \frac{(\lambda-1)_2}{(a_2-a_1)^2}(x-a_1)^2 F(4-b_1-\lambda, b_2, b_2+b_3, q) - \cdots \\ & + (-1)^k \frac{(\lambda-1)_k}{(a_2-a_1)^k}(x-a_1)^k F(k+2-b_1, b_2, b_2+b_3, q) + \cdots . \end{aligned}$$

Bei der Differentialgleichung dritter Ordnung bestehen lineare Beziehungen zwischen je drei aufeinanderfolgenden Coefficienten c_μ der Entwicklung:

$$y = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} c_\mu (x-a_1)_\mu,$$

und es ergiebt sich somit die Eigenschaft der *Gauss*schen Reihe, dass:

$$F(r, s, t, q),\ F(r+1, s, t, q) \text{ und } F(r+2, s, t, q)$$

durch eine lineare, homogene Gleichung mit Coefficienten, die sich rational aus r, s, t, q zusammensetzen, verbunden sind.

Berlin, im Dezember 1869.

Ueber trigonometrische Reihen.

(Von Herrn *E. Heine* in Halle a. S.)

---

§. 1. Bis in die neueste Zeit glaubte man, es sei das Integral einer convergenten Reihe, deren Glieder zwischen endlichen Integrationsgrenzen endlich bleiben, gleich der Summe aus den Integralen der einzelnen Glieder, und erst Herr *Weierstrass* hat bemerkt, der Beweis dieses Satzes erfordere, dass die Reihe in den Integrationsgrenzen nicht nur convergire, sondern dass sie auch in gleichem Grade convergire *). Hiermit ist aber der Satz:

Eine zwischen $x = -\pi$ und $x = \pi$ gegebene endliche Function $f(x)$ lässt sich höchstens auf eine Art in eine trigonometrische Reihe von der Form

$$(\alpha.) \qquad f(x) = \tfrac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \cdots$$

entwickeln

hinfällig geworden, und durch die Arbeiten von *Dirichlet*, *Lipschitz* und *Riemann* ist daher nur festgestellt, *dass* eine Function von x in einer Anzahl von Fällen sehr allgemeiner Natur sich in eine Reihe von der Form $(\alpha.)$, deren Coefficienten bekannt sind, entwickeln lasse, aber *nicht*, *auf wie viele Arten die Entwickelung geschehen könne.*

Die Bedeutung, welche der Darstellung einer Function durch eine trigonometrische Reihe bisher zukam, beruhte zum grossen Theile in der Einheit der Entwickelung, also in der Sicherheit, dieselbe Reihe zu finden, auf welchem Wege man auch die Function in die Reihe transformiren möge. Ich habe deshalb versucht, den vorstehenden Satz mit einem anderen zu vertauschen, der die Einheit der Entwickelung wiederherstellt, und für mancherlei Anwendungen, z. B. auf Probleme der Physik, ausreicht.

Eine leichte Ueberlegung (M. vgl. den Schluss des §. 2.) zeigt zwar, dass eine Reihe $(\alpha.)$, welche gleich einer *discontinuirlichen* Function ist, selbst wenn sie endlich bleibt, unmöglich in gleichem Grade convergiren kann; es ist aber noch nicht bekannt, dass, oder vielmehr ob eine Reihe, welche eine continuirliche Function darstellt, in gleichem Grade convergiren muss, was man

---

*) Im gegenw. Journal führt auch Herr *Thomé* in Berlin diesen Satz als bekannt an. M. vergl.: Ueber die Kettenbruchentwickelung der *Gauss*schen Function $F(\alpha, 1, \gamma, x)$, Bd. 66, S. 334.

wohl stillschweigend angenommen hat. Dieser Gegenstand wird auch im Folgenden nicht aufgeklärt. *Man weiss ferner bis heute* *) *noch nicht einmal mit Sicherheit, ob es überhaupt möglich ist, eine gegebene continuirliche Function durch eine in gleichem Grade convergente trigonometrische Reihe darzustellen.* Hierüber, so wie über die ähnliche Frage für den Fall noch anderer endlich bleibender Functionen, giebt der folgende Satz Aufschluss, zu dessen Beweise (M. vgl. den Anhang) man die wesentlichen Elemente in *Dirichlets* berühmter Arbeit über die *Fourier*schen Reihen in *Doves* Repertorium **) findet:

I. Satz. *Die Fouriersche Reihe für eine endliche Function* $f(x)$, *die eine endliche Anzahl Maxima und Minima besitzt,* d. h. diejenige ganz bestimmte Reihe von der Form $(\alpha.)$, in welcher

$$\pi a_m = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx, \qquad \pi b_m = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx,$$

convergirt in gleichem Grade, sobald $f(x)$ *continuirlich von* $-\pi$ *bis* π *(incl.) und* $f(\pi)=f(-\pi)$ *ist; in allen anderen Fällen ist sie nur im allgemeinen in gleichem Grade convergent.*

Der Ausdruck *„im allgemeinen“* wird hier wie im Folgenden gebraucht, wenn die Ausnahme sich auf eine *endliche Anzahl von Punkten* beziehen soll. Die Ausnahmestellen im obigen Satze sind übrigens leicht anzugeben; sie sind nämlich die Umgebungen der Unstetigkeitspunkte, — in sofern die Unstetigkeiten in diesen Punkten nicht durch Abänderung der Function in denselben fortgeschafft werden können, — und ausserdem $x=\pm\pi$, wenn nicht $f(\pi)=f(-\pi)$.

Durch diesen Satz ist der Weg angebahnt, auf welchem man von dem unbewiesenen Satze an der Spitze zu einem sicheren gelangen kann. Dies geschieht zwar sofort, wenn man den Schlussworten desselben noch die Bedingung hinzufügt, „die in gleichem Grade convergirt“; er würde aber zu eng sein, weil er seine Bedeutung schon verliert, wenn es sich nicht grade um eine continuirliche Function handelt, für die noch ausserdem $f(\pi)=f(-\pi)$, weil, wie oben bemerkt wurde, in den anderen Fällen keine einzige in gleichem Grade convergente Entwickelung existirt. Ich vertausche diesen Satz nunmehr mit dem folgenden:

---

*) Die folgenden beiden Sätze und den Inhalt des §. 6 habe ich Herrn *Thomae* mitgetheilt, der meine Untersuchungen in einem Werke, welches über die *Jacobi*schen Θ-Functionen handeln soll, und welches sich schon unter der Presse befindet, zu benutzen wünschte.

**) Bd. I, S. 152—174: Ueber die Darstellung ganz willkührlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen.

II. Satz. *Eine im allgemeinen stetige, nicht nothwendig endliche Function $f(x)$ lässt sich höchstens auf eine Art in eine trigonometrische Reihe von der Form $(\alpha.)$ entwickeln, wenn die Reihe der Bedingung unterworfen ist, im allgemeinen in gleichem Grade zu convergiren. Die Reihe stellt die Function im allgemeinen von $-\pi$ bis π dar.*

Der Schluss dieses Satzes bedarf noch einer Erläuterung: Entwickelt man eine gegebene endliche Function in eine *Fourier*sche Reihe, so muss man darauf verzichten, dass die Reihe die gegebene Function genau darstellt; an den Stellen der Discontinuität giebt sie bekanntlich einen gewissen Mittelwerth. Die nächste Frage würde nun sein, ob diejenige Function, welche *genau* gleich der *Fourier*schen Reihe ist, auch noch *genau* durch eine andere trigonometrische Reihe von der Form $(\alpha.)$ dargestellt werden kann. Durch Herrn *Cantor**) in Halle, den ich mit meinen Untersuchungen bekannt machte, wurde ich veranlasst, sie auch auf den Fall auszudehnen, dass eine Uebereinstimmung an den Unstetigkeitspunkten nicht mehr gefordert wird**). Der II. Satz giebt nun das Resultat an, wenn auf die Uebereinstimmung in diesen und noch in irgend welchen anderen Punkten in endlicher Anzahl verzichtet wird; er sagt, dass nichts desto weniger die Reihe bestimmt sei, dass sie also mit der *Fourier*schen Entwickelung, wenn dieselbe für die Function existirt, übereinstimmt.

Es ist einleuchtend, dass der II. Satz auch in folgende Gestalt gebracht werden kann, in welcher er bewiesen werden soll:

III. Satz. *Soll eine trigonometrische Reihe $(\alpha.)$ von $-\pi$ bis π im allgemeinen in gleichem Grade convergiren und im allgemeinen Null vorstellen,* wobei nicht vorausgesetzt wird, dass sie da, wo sie nicht verschwindet, einen endlichen Werth behält, *so müssen alle Coefficienten a und b verschwinden, und die Reihe stellt daher überall Null vor.*

§. 2. Dem Beweise des III. Satzes schicke ich einige *Definitionen* voraus: Eine Reihe von Gliedern

$$g_1, \quad g_2, \quad g_3, \quad \cdots \quad g_m,$$

---

*) Derselbe bemerkt, dass der Begriff der Convergenz in gleichem Grade in einer „Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen" von Herrn *Seidel*, in den Denkschriften der Münchener Akademie für 1848, auftritt.

**) Diesen Fall kann man nicht mehr als erledigt durch *Riemanns* Arbeit „Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe" §. 3, S. 15, No. 3 betrachten, für deren Mittheilung wir Herrn *Dedekind* zu Dank verpflichtet sind, da grade der Satz, auf welchem dort die Bestimmung der Coefficienten beruht, hier in Frage gestellt ist.

heisst *convergent,* wenn von einem angebbaren Werthe n an, für stets wachsende Werthe von n, die Summe

$$g_n + g_{n+1} + g_{n+2} + \cdots + g_{n+m}$$

unter jede beliebig gegebene von Null verschiedene Grösse ε herabsinkt, welchen positiven Werth man auch m geben möge.

Hängen die Glieder g von einer Veränderlichen x ab, welche alle Werthe von α bis β (incl. α, β) durchlaufen darf, so heisst die Reihe innerhalb dieser Grenzen *in gleichem Grade convergent, wenn das Criterium der Convergenz für jedes gegebene ε, während x alle Werthe durchläuft, durch dasselbe n erfüllt wird;* für n hat man erst dann einen anderen Werth zu nehmen, wenn ein anderes ε gegeben ist.

Im allgemeinen, d. h. mit Ausnahme der Umgebung gewisser Punkte, *in gleichem Grade convergent* von α bis β nenne ich eine Reihe, welche das Criterium der gleichmässigen Convergenz auf der ganzen Linie von α bis β erfüllt, nachdem man aus derselben vorher beliebig kleine Stücke ausgeschieden hat, welche die erwähnten Punkte einschliessen. Ob die Reihe in den kritischen Punkten selbst convergirt oder divergirt, ist hierbei durchaus unerheblich; es convergiren z. B. die *Fourier*schen Reihen für die endlichen Functionen mit endlichen Sprüngen auch an den Sprungstellen, und sie sind dennoch unmöglich in gleichem Grade convergent.

In der That, es sei x_0 ein solcher kritischer Punkt, so stellt in demselben die Reihe, welche im allgemeinen $f(x)$ ist, wie man weiss das arithmetische Mittel aus $f(x_0+0)$ und $f(x_0-0)$ dar; es ändert sich also, bei der geringsten Aenderung von x an der Stelle x_0 (es handelt sich hier nur um sehr kleine Werthe der Differenz $x-x_0$), die *Fourier*sche Reihe um mehr, als eine endliche Grösse d angiebt, welche kleiner als der Zahlwerth von $\frac{1}{2}(f(x_0+0)-f(x_0-0))$ ist. Setzt man nun für ε einen aliquoten Theil von d, z. B. $\varepsilon = 0{,}01\,d$, und nimmt an, dass für dieses ε ein festes n existire, so entsteht ein Widerspruch. *Einerseits* ändert sich nämlich die unendliche Reihe $g_1+g_2+\cdots$, wie oben bemerkt wurde, um mehr als d; an beiden Stellen unterscheidet sich aber, nach der Annahme, die unendliche Reihe von der Summe der ersten n Glieder höchstens um ε; folglich ändert sich diese endliche Summe, $g_1+g_2+\cdots g_n$, wie wenig man auch x ändert, wenigstens um $d-2\varepsilon$. *Andrerseits* kann man x so wenig ändern, dass jedes Glied g sich höchstens um den n^{ten} Theil von ε, also die endliche Summe $g_1+g_2+\cdots+g_n$ höchstens um ε verändert, was mit dem Resultate, dass die Aenderung wenigstens $d-2\varepsilon$ beträgt, nicht übereinstimmt.

§. 3. Es ist zunächst zu beweisen, dass eine trigonometrische Reihe, wenn sie im allgemeinen convergirt, zu denen gehört, *bei welchen die Glieder für jeden Werth von x zuletzt unendlich klein werden*, wie der Ausdruck im §. 7, S. 25 der Arbeit von *Riemann* über trigonometrische Reihen lautet. Es ist nur nöthig, dieses gesondert für eine Cosinus- und eine Sinusreihe zu zeigen; denn die Summe oder Differenz zweier im allgemeinen in gleichem Grade convergenten Reihen ist gleich einer Reihe von derselben Eigenschaft, und da x die Werthe von $-\pi$ bis π durchläuft, so sind die Reihen mit den n^{ten} Gliedern

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx, \qquad a_n \cos nx - b_n \sin nx$$

nach unserer Annahme beide im allgemeinen gleichmässig convergent.

Um nun zu zeigen, dass in der Cosinusreihe

$$\tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots$$

a_n mit wachsendem n unter jede gegebene noch so kleine Grösse ε herabsinkt, scheide man wie in §. 2 die kritischen Punkte aus. Es sei nachher pq irgend ein zusammenhängendes Stück, so dass, wenn man x nur Werthe giebt, die pq angehören, die Reihe dort in gleichem Grade convergirt, also n so gross genommen werden kann, dass für dieses und die grösseren n alle der Strecke pq angehörenden x das Glied $a_n \cos nx < \varepsilon$ machen. Ist nun n so gross, dass $\frac{\pi}{n} < pq$, so wird für wenigstens einen ganzen Werth von m sicher $x = \frac{m\pi}{n}$ in die Linie pq fallen, also $a_n \cos nx$, d. h. a_n unter ε liegen müssen.

Aehnlich verhält es sich mit der Sinusreihe; zum Beweise hat man hier $x = \frac{(2m+1)\pi}{2n}$ zu setzen.

§. 4. Nach den Bemerkungen im Eingange des §. 3 wird es genügen, den III. Satz gesondert für eine Sinusreihe und dann für eine Cosinusreihe zu erweisen.

Es sei die Sinusreihe

$$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots$$

im allgemeinen in gleichem Grade convergent und Null; x_0, x_1, x_2, ... x_τ sollen, der Grösse nach geordnet, 0, π und die positiven Abscissen der kritischen Punkte darstellen, wobei es gleichgültig ist, ob x_0 und x_τ, d. h. 0 und π, zu diesen gehören oder nicht. Kritische Punkte heissen hier diejenigen, in welchen entweder die Reihe nicht verschwindet, oder in deren Umgebung sie nicht in gleichem Grade convergirt.

Bedeutet σ irgend eine ganze Zahl von 1 bis τ, so ist es erlaubt, wenn man die Gleichung

$$\Sigma b_n \sin nx = 0$$

nach x integrirt, und die Integrationsgrenzen *zwischen* $x_{\sigma-1}$ und x_σ eingeschlossen sind, das Integral der Summe mit der Summe der Integrale zu vertauschen; man hat daher

$$\Sigma b_n \frac{\cos nx - \cos nz}{n} = 0$$

wenn z irgend eine Constante bedeutet, die, wie x, zwischen $x_{\sigma-1}$ und x_σ liegt.

Es ist nicht gestattet, die vorstehende Reihe in die Differenz zweier Theile aufzulösen, von denen der eine nur x enthält, der andere nur z, da nicht bewiesen ist, dass jeder Theil für sich convergirt. Die Reihe convergirt aber, ebenso wie die, aus welcher sie durch Integration entstand, so lange x innerhalb seiner Grenzen bleibt, in gleichem Grade. Daher kann man, bei einer zweiten Integration zwischen denselben Grenzen, die Summation auf die Integration folgen lassen. Hierdurch entsteht

$$\Sigma b_n \left(\frac{\sin nx - \sin nz}{n^2} - (x-z)\frac{\cos nz}{n} \right) = 0.$$

Die Glieder b_n nehmen mit wachsendem n zu Null ab; es sind daher die Reihen mit den n^{ten} Gliedern

$$b_n \frac{\sin nx}{n^2}, \qquad b_n \frac{\sin nz}{n^2}$$

unbedingt (absolut) convergent, und es folgt aus der vorhergehenden Gleichung, dass auch die Reihe mit dem n^{ten} Gliede $b_n \frac{\cos nz}{n}$ convergent und gleich einer Constante ist, die k oder vielmehr k_σ heisse. Setzt man

$$\Sigma b_n \frac{\sin nx}{n^2} = F(x),$$

und bedeutet auch c_σ eine Constante, so hat man daher

$$F(x) = \Sigma b_n \frac{\sin nx}{n^2} = c_\sigma + x k_\sigma, \qquad (x_{\sigma-1} < x < x_\sigma).$$

Nachdem so die Form der Function $F(x)$ gefunden worden, handelt es sich um Bestimmung der Constanten c und k, zu der wir die erforderliche Anzahl von Gleichungen erhalten, wenn wir von zwei verschiedenen Gesichtspunkten ausgehen.

a) Erstens sieht man ein, dass die vorstehende Gleichung, da $F(x)$ eine absolut convergente Reihe und die rechte Seite eine lineare Function

von x ist, noch für die Grenzen $x = x_{\sigma-1}$ und $x = x_\sigma$ selbst gilt. Man erhält daher an sämmtlichen $\tau+1$ Punkten $x_0, x_1, \ldots x_\tau$ für $F(x)$ Doppelgleichungen, nämlich $\tau-1$ von der Form

$$F(x_\sigma) = c_\sigma + x_\sigma k_\sigma = c_{\sigma+1} + x_\sigma k_{\sigma+1} \qquad (0 < \sigma < \tau)$$

und für $x = 0$ und $x_\tau = \pi$

$$F(x_0) = 0 = c_1,$$
$$F(x_\tau) = 0 = c_\tau + \pi . k_\tau .$$

b) Zweitens kann man sich des Satzes bedienen, den *Riemann* in der oben erwähnten Arbeit *) aufstellt und streng beweist, nach welchem

$$\frac{F(x+\alpha) + F(x-\alpha) - 2F(x)}{\alpha}$$

stets mit α unendlich klein wird. Setzt man hier x_σ für x, so liegt $x+\alpha$, bei positiv genommenem α, zwischen x_σ und $x_{\sigma+1}$, dagegen $x-\alpha$ zwischen $x_{\sigma-1}$ und x_σ. Man hat daher

$$F(x_\sigma+\alpha) = c_{\sigma+1} + (x_\sigma+\alpha) k_{\sigma+1},$$
$$F(x_\sigma-\alpha) = c_\sigma + (x_\sigma-\alpha) k_\sigma,$$
$$2F(x_\sigma) = (c_\sigma + x_\sigma k_\sigma) + (c_{\sigma+1} + x_\sigma k_{\sigma+1}),$$

und nach Substitution dieser Werthe durch *Riemanns* Satz

$$k_\sigma = k_{\sigma+1}.$$

Da nunmehr gefunden ist, dass alle k gleich sind, so folgt aus (a.), dass alle c gleich, also gleich $c_1 = 0$ werden. Hieraus ergiebt sich, indem $c_\tau + \pi k_\tau = 0$, dass $k_\tau = 0$; also sind alle k gleich Null, ebenso wie alle c. Es verschwindet daher die absolut convergente Reihe

$$F(x) = \Sigma b_n \frac{\sin nx}{n^2}$$

für alle x von 0 bis π, so dass alle b verschwinden, und somit der Theil des III. Satzes, welcher sich auf die Sinusreihe bezieht, erwiesen ist.

§. 5. Der III. Satz soll nun für eine Cosinusreihe

$$\tfrac{1}{2} a_0 + \Sigma a_n \cos nx \qquad (n > 0)$$

bewiesen werden, wobei die Buchstaben z, σ, τ, c, k eine ähnliche Bedeutung für die Cosinusreihe haben wie im vorigen Paragraphen für die Sinusreihe. Man setze ferner

$$F(x) = \Sigma a_n \frac{\cos nx}{n^2}, \qquad (n > 0).$$

---

*) §. 8, S. 29, Lehrsatz 2.

Eine zweimalige Integration verschafft, wenn x und z zwischen $x_{\sigma-1}$ und x_σ liegen, die Gleichung

$$\tfrac{1}{4}a_0(x-z)^2-\Sigma a_n\left(\frac{\cos nx-\cos nz}{n^2}+\frac{x-z}{n}\sin nz\right)=0,$$

also

$$F(x)=c_\sigma+xk_\sigma+\tfrac{1}{4}a_0x^2, \qquad (x_{\sigma-1}<x<x_\sigma).$$

Diese Gleichung muss noch an den Grenzen $x_{\sigma-1}$ und x_σ gelten, so dass man wiederum ein System Gleichungen erhält

$$c_\sigma+x_\sigma k_\sigma+\tfrac{1}{4}a_0x_\sigma^2=c_{\sigma+1}+x_\sigma k_{\sigma+1}+\tfrac{1}{4}a_0x_\sigma^2$$

oder, nach Fortlassung des gleichen Gliedes, wie im §. 4 unter (*a*.)

$$c_\sigma+x_\sigma k_\sigma=c_{\sigma+1}+x_\sigma k_{\sigma+1}, \qquad (0<\sigma<\tau).$$

Wie §. 4 unter (*b*.) ergiebt sich

$$k_1=k_2=\cdots=k_\tau$$

und hieraus

$$c_1=c_2=\cdots=c_\tau,$$

also von $x=0$ bis $x=\pi$

$$F(x)=c+kx+\tfrac{1}{4}a_0x^2,$$

wo c und k dieselben Constanten im ganzen Intervalle bezeichnen. Um diese zu bestimmen, bemerke man, dass die Reihe für $F(x)$ absolut convergirt, dass also die Gleichung besteht:

$$\frac{a_n}{n^2}=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{n^2\pi}\left(\frac{\pi}{2}a_0\cos n\pi-2k\sin^2\frac{n\pi}{2}\right).$$

Setzt man den gefundenen Werth von a_n in die gegebene Cosinusreihe ein, so übersieht man sofort, dass sie nicht convergirt, während sie doch im allgemeinen die Summe Null haben soll, wenn nicht a_0 und k, folglich alle a verschwinden, wodurch der Beweis des III. Satzes gegeben ist.

§. 6. Einige Punkte im Beweise des *Dirichlet*schen Prinzipes sind noch nicht mit jener äussersten Strenge begründet, welche für einen so bedeutenden Satz wünschenswerth wäre. Bekanntlich haben die Herren *Kronecker* und *Weierstrass* schon vor längerer Zeit ihre Bedenken über die Annahme geäussert, dass ein Minimum existiren müsse, so wie auch über die Anwendung der Variationsrechnung. Auch ich habe bereits vor mehreren Jahren darauf aufmerksam gemacht, es sei eine Voraussetzung nicht unzweifelhaft, die nämlich, dass eine Function vom Rande in's Innere immer continuirlich fortgesetzt werden könne, während noch ihre ersten Differentialquotienten nach den rechtwinkligen

Coordinaten continuirlich bleiben sollen. In den verflossenen Jahren hat man versucht, den Beweis mit Hülfe der trigonometrischen Reihen zu führen, was hier zur Sprache kommen muss, weil sich aus demselben ergeben würde, dass jede continuirliche einwerthige Function $f(x)$, für welche $f(\pi)=f(-\pi)$ ist, nur auf *eine* Art in eine trigonometrische Reihe von der Form $(\alpha.)$ entwickelbar sei, ohne dass die im allgemeinen gleichmässige Convergenz zur Bedingung der Entwickelung gemacht wird. Ich erwähne deshalb, dass jener Beweismethode eine unbewiesene Voraussetzung zu Grunde liegt, über welche ich noch Einiges hinzufügen will, da hier ein sehr wesentlicher Umstand bei der Betrachtung von Functionen mehrerer Veränderlichen zur Sprache kommt. Es sei $(\alpha.)$ irgend eine Entwickelung von $f(x)$ in eine trigonometrische Reihe, so betrachtet man nämlich gewöhnlich den Ausdruck

$$(\beta.) \qquad \tfrac{1}{2}a_0+r(a_1\cos x+b_1\sin x)+r^2(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\cdots$$

als eine Function von r und x, die für alle Werthe von x und von $r=0$ bis $r=1$ (incl.) continuirlich ist. Nachdem *Dirichlet* *) den von *Abel* in seiner Arbeit über die binomische Reihe aufgestellten Satz **) genau bewiesen hat, wonach die Grenze einer als Potenzreihe gegebenen Function

$$c_0+c_1r+c_2r^2+\cdots \qquad (r<1)$$

für $r=1$, gleich $c_0+c_1+c_2+\cdots$ wird, wenn die letztere Reihe convergirt, so ist allerdings klar, dass die Function $(\beta.)$ bei festgehaltenem r sich mit x, bei festgehaltenem x sich mit r bis $r=1$ (incl.) continuirlich ändert. Es scheint aber noch nicht bemerkt zu sein, dass diese Eigenschaften, *diese Continuität in jedem einzelnen Punkte nach zwei Richtungen hin*, nicht diejenige Continuität ist, welche man voraussetzen muss, wenn man auf die Function analoge Schlüsse anwenden will, wie diejenigen, welche für die continuirlichen Functionen mit einer Veränderlichen gestattet sind, und die man *gleichmässige Continuität* nennen kann, weil sie sich gleichmässig über alle Punkte und alle Richtungen erstreckt. *Eine Function zweier Veränderlichen x, y heisse gleichmässig continuirlich in einem Gebiete, wenn für jede beliebig kleine gegebene Grösse ε Grössen h_1 und k_1, von denen keine Null ist, existiren, so dass die Differenz $f(x+h, y+k)-f(x, y)$ kleiner als ε bleibt, so lange h und k resp. h_1 und k_1 nicht überschreiten, und zwar muss dieses bei gegebenem ε und festgehaltenen h_1 und k_1 für alle Punkte (x, y) und $(x+h, y+k)$ stattfinden, die dem Gebiete, seine Begrenzung eingeschlossen, angehören.*

---

*) *Liouville,* Journal de Mathématiques, II Série, T. VII, p. 253—255.
**) Bd. I, No. II, Lehrsatz IV, S. 314 u. 315 dieses Journals.

Anhang.

§. 7. Der Beweis des I. Satzes soll hier nachgetragen werden, und zwar in genauem Anschlusse an den vorerwähnten Aufsatz von *Dirichlet,* auf den sich auch die folgenden Citate beziehen. Die im I. Satze erwähnte Function $f(x)$ denke man sich befreit von den durch Abänderung ihres Werthes in einzelnen Punkten hebbaren Unstetigkeiten, was gestattet ist, weil die Entwickelung von $f(x)$ in eine *Fourier*sche Reihe mit der übereinstimmt, welche dieselbe Function, befreit von jenen Unstetigkeiten geben würde. Es sei ferner g eine positive Zahl, so gross, dass $g+f(x)$ positiv bleibt, n eine positive ganze Zahl und $2n+1=k$ gesetzt.

Die Punkte der Abscissenaxe, welche nun noch zu Unstetigkeitsstellen gehören, scheide man wie im §. 2 aus, indem man diese Punkte mit beliebig kleinen Stücken umgiebt, die man sich im Folgenden ausgeschlossen denkt, wenn man auch *den Buchstaben* x (aber nicht andere Buchstaben) die Werthe von $-\pi$ bis π durchlaufen lässt, so dass also $f(x)$ einwerthig ist, und $f(x+0)$ mit $f(x-0)$ übereinstimmt. *Die umgebenden Stücke darf man im Laufe des Beweises nicht mehr verkleinern.* Die Punkte $\pm\pi$ werden den Unstetigkeitsstellen gleich geachtet, wenn nicht $f(\pi)$ mit $f(-\pi)$ übereinstimmt. Da die Summe der *Fourier*schen Reihe in jedem Punkte x der Abcissenaxe von $-\pi$ bis π genau $f(x)$ ist, so lässt sich der noch zu beweisende Theil des I. Satzes so fassen: Es kann die Zahl n so gross genommen werden, dass die Summe der ersten n Glieder der Reihe weniger $f(x)$ kleiner ist als eine beliebig kleine gegebene Grösse ε, *und zwar findet dies in gleichem Grade, d. h. für die* x *von* $-\pi$ *bis* π *durch dasselbe* n *statt.* Für noch grössere Werthe von n darf ferner jene Differenz nicht wieder ε übersteigen.

Zum Beweise hat man zu untersuchen, auf welche Art sich

$$S=\int_0^h \varphi(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta, \qquad \left(0<h\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

mit wachsendem n seinem Grenzwerthe $\frac{\pi}{2}\varphi(0)$ nähert; es sei im Voraus bemerkt, dass hier $\varphi(\beta)$ *entweder* $f(x\pm 2\beta)$ vorstellen soll *oder* irgend eine Function, welche auf der ersten Strecke, d. h. von $\beta=0$ an, eine Strecke constant ist und überall unter g bleibt. Im ersten Falle wird

$$\varphi(\beta)-\varphi(0)=f(x\pm 2\beta)-f(x);$$

nun ist eine Function von einer Veränderlichen x, die nur eine endliche An-

zahl Maxima und Minima besitzt, wenn sie auf einer Strecke von $x=a$ bis $x=b$ stetig bleibt, auf dieser Strecke sicher in gleichem Grade stetig, d. h. für jedes beliebig gegebene ε giebt es eine so kleine Grösse h, dass sämmtliche Ordinaten, die zu den Abscissen von x bis $x+h$ gehören, sich von einander um weniger als ε unterscheiden, und zwar für alle x von a bis b bei festgehaltenem ε und h. Es wird also (wegen der Stetigkeit von $f(x)$ für jede Abscisse x), für ein festgehaltenes ε und ein dazu gehöriges festes β, die Ungleichheit $\varphi(\beta)-\varphi(0)<\varepsilon$ für alle Functionen φ, die in diesem ersten Falle in Betracht kommen, bestehen und auch noch bestehen, wenn β verkleinert wird. Im zweiten Falle ist $\varphi(\beta)-\varphi(0)$ für ein hinreichend kleines β sogar genau gleich Null.

§. 8. *Dirichlet* behandelt (S. 164) zuerst den Fall, dass $\varphi(\beta)$ von $\beta=0$ bis $\beta=h$ stetig ist, nie zunimmt und nie negativ wird. Er zeigt, dass dann der Werth von S zwischen den Grenzen (*Dirichlet* S. 166)

$$\frac{\pi}{2}\varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right)-\varrho_{2m+1}\varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right),$$

$$\frac{\pi}{2}\varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right)+\varrho_{2m+1}\varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right)+\varrho_1\left(\varphi(0)-\varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right)\right)$$

liegt, wo m irgend eine positive ganze Zahl vorstellt, die so beschaffen ist, dass $(2m+1)\pi$ unter hk liegt, wo ferner

$$\varrho_1<\frac{\pi}{2}+\frac{2}{k\sin\frac{\pi}{k}},$$

$$\frac{2}{k}\frac{1}{\sin\frac{(2m+1)\pi}{k}}<\varrho_{2m+1}<\frac{2}{k}\frac{1}{\sin\frac{2m\pi}{k}}.$$

Man nehme m etwa von der Grösse $\sqrt{n}$, setze z. B. für m die nächste auf $\sqrt{n}$ folgende ganze Zahl; dann ist für hinreichend grosse Werthe von n, wenn man Grössen von der Ordnung $n^{-\frac{3}{2}}$, die hier völlig bedeutungslos sind, der Kürze halber fortlässt,

$$\varrho_1<\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi},\qquad \varrho_{2m+1}=\frac{1}{\pi\sqrt{n}}.$$

Es unterscheidet sich also, wenn man wiederum das Glied höherer Ordnung vernachlässigt, S von $\frac{\pi}{2}\varphi(0)$ um weniger als

$$(\gamma.)\qquad \frac{2}{\pi}\left(\varphi(0)-\varphi\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\right)+\frac{g}{\pi\sqrt{n}},$$

daher, gleichmässig für alle unsere Functionen φ, um beliebig wenig, oder die Differenz $S-\frac{\pi}{2}\varphi(0)$ nähert sich für alle φ in gleichem Grade der Null.

Indem man (*Dirichlet*, S. 167 u. 168) diesen Satz auf den Fall anwendet, dass φ in den Integrationsgrenzen constant bleibt, wo $S-\frac{\pi}{2}\varphi(0)$ wie $\frac{g}{\pi\sqrt{n}}$ zu Null convergirt, ferner auf die Function $\varphi(\beta)+g$, wenn $\varphi(\beta)$ auch negative Werthe annimmt, endlich auf $-\varphi(\beta)$, wenn φ nie abnimmt, findet man das Resultat, dass $S-\frac{\pi}{2}\varphi(0)$ gleichmässig für alle x zu Null convergirt, wenn die im §. 7 definirte Function $\varphi(\beta)$ im Intervalle von $\beta=0$ bis $\beta=h$ nicht vom Wachsen in's Abnehmen übergeht oder umgekehrt, und stetig bleibt.

Um die Function φ auch noch von dieser Bedingung zu befreien, betrachte man

$$\sigma=\int_c^h \varphi(\beta)\frac{\sin(k\beta)}{\sin\beta}\,d\beta, \qquad \left(0<c<h\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

wenn $\varphi(\beta)$ noch derselben Bedingung in den Integrationsgrenzen g und h unterworfen ist. War $\varphi(\beta)=f(x+2\beta)$, so bleibt diese Function für $\beta=0$ eindeutig, weil sie sich in $f(x)$ verwandelt und x nur solche Werthe ertheilt wurden, die nicht in kritische Stellen fallen. Die untere Grenze c ist also schon in dieser Beziehung von der früheren 0 zu unterscheiden, dass ihr zwei Ordinaten angehören können. Man weiss, wie *Dirichlet* S. 169 die Grenze von σ aus der von S durch Zerlegung des Integrales von c bis h in zwei findet, in eines von 0 bis h und eines von 0 bis c; er setzt dazu die Function φ von c bis 0 so fort, dass sie dort constant gleich $\varphi(c+0)$ bleibt. Man hat also den Satz über das Integral S zweimal hintereinander anzuwenden, beide Male auf eine Function $\psi(\beta)$, die so beschaffen ist, wie in S die Function $\varphi(\beta)$, und zwar wie dort im zweiten Falle am Schlusse unseres §. 7; d. h. die Function ist für kleine Werthe von β constant, und der Unterschied eines jeden S von $\frac{\pi}{2}\psi(0)$ oder $\frac{\pi}{2}\varphi(c+0)$ ist daher (Formel γ.) $<\frac{g}{\pi\sqrt{n}}$, folglich $\sigma<\frac{2g}{\pi\sqrt{n}}$ also gleichmässig beliebig klein.

Hieraus folgt, dass $S-\frac{\pi}{2}\varphi(0)$ auch dann noch gleichmässig beliebig klein für wachsende n wird, wenn φ von allen Bedingungen dieses Paragraphen befreit ist und nur denen des §. 7 unterworfen bleibt.

§. 9. Nach Angabe des §. 7 hat man zu untersuchen, *wie* die Summe der ersten n Glieder der Reihe (α.) sich $f(x)$ nähert. Diese Summe lässt

sich (*Dirichlet*, S. 170) durch den Ausdruck

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi+x}{2}} f(x-2\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta$$

darstellen. Die Untersuchung desselben für irgend einen einzelnen bestimmten Werth von x, hat für uns keine Bedeutung, da man aus *Dirichlets* Arbeit den Grenzwerth der Integrale sogar in dem Falle kennt, wo x einen der Werthe vorstellen würde, die wir ausgeschlossen haben; dass für jeden einzelnen Punkt die Reihe convergirt, weiss man, und wie schnell sie in diesem convergirt, kann zwar an und für sich von Interesse sein, aber nicht bei der Frage, ob die Reihe in gleichem Grade convergirt. Deshalb hat man nicht nöthig, hier die Fälle $x=\pm\pi$ zu betrachten, wenn auch die betreffende Abscisse nicht von selbst schon ausgeschlossen sein sollte.

Es sei nun $x<\pi$ und positiv, ein negatives x würde nicht eine wesentlich verschiedene Behandlung erfordern. Alsdann bleibt $\frac{\pi-x}{2}$ unter $\frac{\pi}{2}$ und das erstere Integral, welches von der Form S ist, nähert sich, für alle x gleichmässig, dem Werthe $\frac{1}{2}f(x)$.

Das zweite Integral lässt sich in eines von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ zerlegen, welches sich in gleicher Weise $\frac{1}{2}f(x)$ nähert, und in eines von $\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi+x}{2}$, welches, wenn man $\pi-\beta$ für β als Veränderliche einführt, in

$$(2.)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi-x}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(2\beta+x-2\pi)\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta$$

übergeht. Man behandelt dies in ähnlicher Art, wie σ im §. 8, zerfällt es also in die Differenz zweier Integrale, die 0 zur unteren Grenze haben, indem man die Function f von $\beta=\frac{\pi-x}{2}$ bis $\beta=0$ so fortsetzt, dass sie dort constant $f(-\pi+0)$ bleibt, und erkennt dann sofort, dass der Werth von (2.) mit wachsendem n sich für alle x in gleichem Grade der Null nähert, wodurch der Satz bewiesen ist.

Halle, im Februar 1870.

Zur Theorie der Charakteristiken.

(Von Herrn *Schubert*.)

§. 1. Der Inbegriff aller der Flächen n^{ter} Ordnung, welche gleichzeitig $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}-2$ von einander unabhängigen Bedingungen genügen, heisst ein *System* von Flächen n^{ter} Ordnung. Ein solches bietet eine einfach unendliche Mannichfaltigkeit dar, weil eine Fläche n^{ter} Ordnung durch $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}-1$ Bedingungen endlichdeutig bestimmt ist. In einem Flächensysteme muss es daher immer eine bestimmte endliche Anzahl von Flächen geben, welche gleichzeitig einer neuen, d. h. nicht schon zu den Bedingungen des Systems gehörenden oder von ihnen abhängigen, Bedingung Genüge leisten. Giebt es nun in einem System μ Flächen, welche einen gegebenen Punkt enthalten, ν, welche eine gegebene Gerade berühren, und ϱ, welche eine gegebene Ebene berühren, so heissen μ, ν, ϱ die drei *Charakteristiken des Systems* (μ, ν, ϱ). Durch *jeden* Punkt des Raumes gehen also μ, *jede* Gerade des Raumes berühren ν, und *jede* Ebene des Raumes ϱ Flächen eines Systems (μ, ν, ϱ). Es ist nun bisher immer *beobachtet* worden, dass die Anzahl der Flächen eines Systems (μ, ν, ϱ), welche einer beliebigen neuen Bedingung Z genügen sollen, sich in der Form $\alpha\mu+\beta\nu+\gamma\varrho$ ausdrückt, wo α, β, γ ganze Zahlen sind, und, als Grössen, die von Z allein abhängig sind, *Parameter* dieser Bedingung heissen. In den *Comptes rendus* sind von den Herren *Chasles* und *de Jonquières* die Parameter vieler Bedingungen, jedoch ohne Beweis, angegeben. Ehe wir zu weiteren Betrachtungen über Flächensysteme übergehen, sei es mir daher erlaubt, die Parameter einer sehr häufig vorkommenden Bedingung, nämlich der Berührung einer Fläche m^{ter} Ordnung, in aller Strenge herzuleiten.

§. 2. Zu dem Ende haben wir zuerst das Analogon für die Ebene zu untersuchen. Die Gesammtheit aller in einer Ebene liegenden Curven n^{ter} Ordnung, welche $\frac{n(n+3)}{2}-1$ Bedingungen unterworfen sind, heisst ein System von Curven n^{ter} Ordnung, und wird mit (μ, ν) bezeichnet, wenn μ Curven des Systems durch irgend einen Punkt der Ebene gehen, und ν irgend eine Gerade

berühren. Wir nehmen nun in der Ebene des Systems noch eine Curve m^{ter} Ordnung f an, und bestimmen zuvörderst die Ordnung des Ortes eines Punktes p von der Beschaffenheit, dass die Gerade, welche in ihm eine Curve des Systems berührt, sich mit der geraden Polare von p in Bezug auf f in einer festen Geraden e schneide. Diese Ordnungszahl ist die Anzahl der auf irgend einer Geraden liegenden, der eben ausgesprochenen Forderung genügenden Punkte. Wir haben also nur zu zählen, wieviel derartige Punkte auf der festen Geraden e selbst liegen, vorausgesetzt, dass wir etwa vorkommende p-fache Punkte auch p-fach rechnen. Zuerst giebt es ν Punkte q auf e, in welchen Curven des Systems (μ, ν) berühren. Diese Punkte erfüllen jene verlangte Bedingung, weil sie die Gerade e selbst zur Tangente haben. Ausserdem muss es aber auch jeder Punkt r auf e thun, der auf seiner eigenen geraden Polare in Bezug auf f liegt. Dies sind also die m Punkte, welche gleichzeitig auf e und auf der Curve m^{ter} Ordnung f liegen. Jeder dieser Punkte leistet das Verlangte offenbar μ mal, weil durch ihn μ Curven des Systems (μ, ν), also auch μ Tangenten hindurchgehen. Ausser diesen ν Punkten q und diesen m μ-fachen Punkten r können auf e keine Punkte von der geforderten Art liegen. Denn, wenn keine der beiden in Rede stehenden Geraden, deren Schnittpunkt auf e liegen soll, mit e zusammenfällt, so ist eben dieser Punkt, in welchem sich die Tangente und die Polare schneiden, ein Punkt p, der auf seiner eigenen Polare liegt. Derartige Punkte waren aber nur die Punkte r. Fällt nun die *Tangente* mit e zusammen, so erhalten wir die Punkte q als dem gesuchten Orte angehörig. Endlich kann die *Polare* nicht mit e identisch werden, während ihr Pol auf e liegen soll, weil dann die feste Gerade die feste Curve f berühren müsste, welchen Fall wir ausschliessen. Weil also der gesuchte Ort mit einer Geraden nicht mehr und nicht weniger als $\nu+m\mu$ Punkte gemein hat, so ist er von der Ordnung $\nu+m\mu$, schneidet also die Curve m^{ter} Ordnung f in $m(\nu+m\mu)$ Punkten. Jeder dieser Punkte von f muss die Eigenschaft haben, dass seine gerade Polare in Bezug auf f, das heisst hier die Gerade, welche f in ihm berührt, sich mit der Geraden, welche in ihm eine Curve des Systems berührt, auf e schneide. Solch ein Punkt, als Berührungspunkt sowohl einer Tangente an f, als auch einer Tangente an eine Curve des Systems, muss also, in jedem Falle, wo beide Tangenten nicht zusammenfallen, ihr Schnittpunkt sein und auf e liegen. Gleichzeitig lagen aber auf f und auf e nur die m μ-fachen Punkte ν. Es bleiben also

$$m(\nu+m\mu)-m\mu = m[(m-1)\mu+\nu]$$

Punkte als Berührungspunkte zusammenfallender Tangenten übrig; woraus sich ergiebt, dass $m[(m-1)\mu+\nu]$ Punkte auf f liegen, in welchen Curven des Systems (μ, ν) berühren, oder, mit anderen Worten, dass die Parameter der Berührung einer ebenen Curve m^{ter} Ordnung $\alpha = m(m-1)$, $\beta = m$ sind, ein Resultat, welches wir jetzt bei der Bestimmung der Berührungsparameter für Flächen benutzen werden.

§. 3. Wir denken uns ein System (μ, ν, ϱ) von Flächen beliebiger Ordnung, und ausserdem eine Fläche m^{ter} Ordnung F, und suchen nun die Ordnung des Ortes eines Punktes P von der Beschaffenheit zu bestimmen, dass die Ebene, welche in ihm eine Fläche des Systems berührt, sich mit der Polarebene von P in Bezug auf F in einer Geraden schneide, die auf einer festen Ebene E liege. Zu dem Zwecke zählen wir die auf E liegenden, dieser Forderung Genüge leistenden Punkte. Zuerst sind dies die ϱ Punkte Q, in welchen E von ϱ Flächen des Systems (μ, ν, ϱ) berührt wird, weil die Ebene, welche in einem solchen Punkte eine durch ihn gehende Fläche berührt, die feste Ebene selbst ist. Ausserdem genügt der vorliegenden Bedingung auch jeder Punkt R auf E, der auf seiner eigenen Polarebene in Bezug auf F liegt, wenn die Gerade, in welcher diese Ebene E schneidet, auch Schnittgerade der Ebene ist, welche in R eine Fläche des Systems berührt. Ein solcher Punkt muss also auf der ebenen Curve m^{ter} Ordnung f liegen, welche E aus F ausschneidet, und die Tangente, welche f in ihm berührt, muss ferner in ihm auch eine der Curven berühren, welche E aus dem Flächensysteme (μ, ν, ϱ) ausschneidet. Diese Curven bilden aber ein System (μ, ν), in welchem es also nach §. 2 $m[(m-1)\mu+\nu]$ Curven giebt, die f berühren. Demnach erhalten wir ebensoviel Punkte R. Ausser den Punkten Q und R kann es auf E keine Punkte geben, welche die in Rede stehende Bedingung erfüllen. Denn ein Punkt, welcher dies thut, muss entweder auf seiner eigenen Polarebene liegen, und dieses leisten die Punkte R, oder, wenn das nicht der Fall ist, so muss eine der beiden Ebenen, die Tangentialebene oder die Polarebene, mit E zusammenfallen; dieses kann nur die erstere sein, und so haben wir die Punkte Q erhalten. Der Ort, dessen Ordnungszahl wir suchten, hat also mit einer Ebene nicht mehr und nicht weniger, als $m[(m-1)\mu+\nu]+\varrho$ Punkte gemein, ist deshalb eine Raumcurve, deren Ordnung diese Zahl angiebt. Diese Curve schneidet die Fläche m^{ter} Ordnung F in $m[m(m-1)\mu+m\nu+\varrho]$ Punkten; und jeder dieser Schnittpunkte muss Berührungspunkt sowohl einer Tangentialebene an F, wie auch an eine Fläche des Systems sein, also, wenn beide Ebenen

nicht zusammenfallen, auf ihrer Schnittgeraden, d. h. auf E liegen. Da nun $m[(m-1)\mu+\nu]$ Punkte F und E gemeinsam angehören, so bleiben

$$m[m(m-1)\mu+m\nu+\varrho]-m[(m-1)\mu+\nu] = m[(m-1)^2\mu+(m-1)\nu+\varrho]$$

Punkte übrig, für welche die beiden Ebenen zusammenfallen, und welche also gleichzeitig die Berührungspunkte einer Tangentialebene an F wie auch an eine Fläche des Systems sein müssen, also die Punkte sind, in welchen F von Flächen des Systems (μ, ν, ϱ) berührt wird. Somit haben sich als Parameter der Bedingung, eine Fläche m^{ter} Ordnung zu berühren, ergeben: $\alpha=m(m-1)^2$, $\beta=m(m-1)$, $\gamma=m$. Ist $m=2$, so folgt $\alpha=\beta=\gamma=2$. Da es in einem Flächenbüschel n^{ter} Ordnung *eine* Fläche giebt, welche durch einen gegebenen Punkt geht, $2(n-1)$, welche eine gegebene Gerade berühren, und $3(n-1)^2$, welche eine gegebene Ebene berühren, so erhalten wir, indem wir in der oben gefundenen Formel $\mu=1$, $\nu=2(n-1)$, $\varrho=3(n-1)^2$ setzen, $m(m-1)^2+2m(m-1)(n-1)+3m(n-1)^2$ als den Ausdruck für die Anzahl der Flächen eines Flächenbüschels, welche eine gegebene Fläche m^{ter} Ordnung berühren*). In ähnlicher Art, wie die Berührungsparameter eben bewiesen sind, lassen sich viele der in den *Comptes rendus* angegebenen Parameter von Bedingungen erhärten.

§. 4. Kennt man die Parameter aller gegebenen Bedingungen, so lässt sich die Bestimmung der Anzahl der diesen Bedingungen genügenden Flächen dadurch, dass man jene Parameter nach einander in die Formel $\alpha\mu+\beta\nu+\gamma\varrho$ einführt, auf gewisse Fundamentalaufgaben zurückführen, deren vollständige Lösung für Flächen zweiter Ordnung zu dieser Arbeit Veranlassung gegeben hat. Sie bestehen in der Bestimmung der Anzahl der Flächen s^{ter} Ordnung, welche durch m Punkte gehen, n Gerade und r Ebenen berühren, wo $m+n+r$ natürlich gleich $\frac{(s+1)(s+2)(s+3)}{1.2.3}-1$ ist. Die Flächen zweiter Ordnung werden ein Beispiel abgeben, wie die eben erwähnte Zurückführung geschieht.

Die 9 Bedingungen, welche zur endlichdeutigen Bestimmung einer Fläche zweiter Ordnung gegeben sein müssen, mögen Z_1, Z_2, ... Z_9, ihre Parameter entsprechend α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; ... α_9, β_9, γ_9 sein. Ferner möge künftig immer eine Klammer, welche 9 Bedingungen einschliesst, die Anzahl der ihnen genügenden Flächen zweiter Ordnung bedeuten, eine Klammer

*) Analytisch aufgefasst, ist diese von Herrn *Salmon* zuerst angegebene Zahl der Grad der Bedingungsgleichung, dass eine Fläche n^{ter} Ordnung eine Fläche m^{ter} Ordnung berühre, — in den Coefficienten der Gleichung der erstern.

aber, welche 8 Bedingungen einschliesst, das System der Flächen darstellen, welche diesen Genüge leisten. Endlich bezeichnen wir die Bedingung, m gegebene Punkte zu enthalten, durch $\mathfrak{p}^m$, n Gerade zu berühren, durch $\mathfrak{g}^n$, und r Ebenen zu berühren, durch $\mathfrak{e}^r$. Dann ist zuerst:

$$(Z_1, Z_2, \ldots Z_9) = \alpha_1(\mathfrak{p}^1, Z_2, \ldots Z_9) + \beta_1(\mathfrak{g}^1, Z_2, \ldots Z_9) + \gamma_1(\mathfrak{e}^1, Z_2, \ldots Z_9).$$

So haben wir für Z_1 die Parameter α_1, β_1, γ_1 von Z_1 eingeführt. In jedem der drei Glieder verfahren wir nun ebenso mit Z_2, und erhalten:

$$\begin{aligned}
&(Z_1, Z_2, \ldots Z_9)\\
&= \alpha_1[\alpha_2(\mathfrak{p}^2, Z_3 \ldots Z_9) + \beta_2(\mathfrak{p}^1, \mathfrak{g}^1, Z_3 \ldots Z_9) + \gamma_2(\mathfrak{p}^1, \mathfrak{e}^1, Z_3 \ldots Z_9)]\\
&+ \beta_1[\alpha_2(\mathfrak{p}^1, \mathfrak{g}^1, Z_3 \ldots Z_9) + \beta_2(\mathfrak{g}^2, Z_3 \ldots Z_9) + \gamma_2(\mathfrak{g}^1, \mathfrak{e}^1, Z_3 \ldots Z_9)]\\
&+ \gamma_1[\alpha_2(\mathfrak{p}^1, \mathfrak{e}^1, Z_3 \ldots Z_9) + \beta_2(\mathfrak{g}^1, \mathfrak{e}^1, Z_3 \ldots Z_9) + \gamma_2(\mathfrak{e}^2, Z_3 \ldots Z_9)],
\end{aligned}$$

oder, wenn wir zusammenfassen,

$$\begin{aligned}
&= \alpha_1\alpha_2(\mathfrak{p}^2, Z_3 \ldots Z_9) + \beta_1\beta_2(\mathfrak{g}^2, Z_3 \ldots Z_9) + \gamma_1\gamma_2(\mathfrak{e}^2, Z_3 \ldots Z_9)\\
&+ (\beta_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_2)(\mathfrak{g}^1, \mathfrak{e}^1, Z_3 \ldots Z_9) + (\gamma_1\alpha_2 + \alpha_1\gamma_2)(\mathfrak{e}^1, \mathfrak{p}^1, Z_3 \ldots Z_9) + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)(\mathfrak{p}^1, \mathfrak{g}^1, Z_3 \ldots Z_9)\\
&= \alpha_1\alpha_2\alpha_3(\mathfrak{p}^3, Z_4 \ldots Z_9) + \cdots.
\end{aligned}$$

Das Bildungsgesetz der so nacheinander zu gewinnenden Ausdrücke ist bald zu durchschauen. Wir erhalten nach der neunten und letzten Substitution einen Ausdruck, aus welchem die 9 Zeichen $Z_1, \ldots Z_9$ entfernt sind, und in welchen dafür die 9.3 Parameter, sowie die $\frac{10.11}{1.2} = 55$ Grössen $(\mathfrak{p}^m, \mathfrak{g}^n, \mathfrak{e}^r)$ eingetreten sind. Dieser Ausdruck ist mit $\Sigma[(\mathfrak{p}^m, \mathfrak{g}^n, \mathfrak{e}^r)\Sigma(\alpha^{(m)}, \beta^{(n)}, \gamma^{(r)})]$ zu bezeichnen, wenn man das erste Summenzeichen auf alle möglichen verschiedenen Tripel der Grössen m, n, r bezieht, dabei aber immer die Bedingung festhält, das jedes der m, n, r nur Null oder eine positive ganze Zahl sein kann, und $m+n+r$ immer gleich 9 sein muss; und wenn man ferner unter $\Sigma(\alpha^{(m)}, \beta^{(n)}, \gamma^{(r)})$ die Summe aller möglichen verschiedenen Producte von m der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_9$, n der Grössen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_9$, und r der Grössen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_9$ versteht, jedoch so, dass jedes Product jeden der 9 Indices $1, 2, \ldots 9$ einmal und *nur* einmal enthält. Demgemäss enthält ein Glied $(\mathfrak{p}^m, \mathfrak{g}^n, \mathfrak{e}^r)\Sigma(\alpha^{(m)}, \beta^{(n)}, \gamma^{(r)})$ immer $\frac{9!}{m!n!r!}$ derartige Producte in sich. Ein Coefficient $(\mathfrak{p}^m, \mathfrak{g}^n, \mathfrak{e}^r)$, für den wir von jetzt an kürzer (m, n, r) sagen wollen, drückt dabei immer die Anzahl der Flächen aus, welche m Punkte enthalten, n Geraden und r Ebenen berühren, d. h. nur *elementaren Bedingungen* genügen, wenn wir nämlich unter einer elementaren Bedingung mit Herrn *Chasles* eine solche verstehen, welche nur verlangt, dass ein Punkt auf der Fläche liegen, dass eine Gerade, oder dass

eine Ebene sie berühren solle. Die Gesammtheit aller denselben 8 elementaren Bedingungen genügenden Flächen, wollen wir entsprechend *Elementarsystem* nennen. Dann sind die Charakteristiken der $\frac{9.10}{1.2}=45$ Elementarsysteme nichts Anderes, als die 55 (m, n, r), die deshalb Elementarcharakteristiken heissen sollen. Die Kenntniss derselben kann uns, wie oben gezeigt ist, die Frage beantworten, wieviel Flächen zweiter Ordnung irgend welchen 9 einfachen *) Bedingungen $Z_1, Z_2, \ldots Z_9$ genügen. Jene Zahlen (m, n, r) hat Herr *Chasles* in einer seiner letzten in das Gebiet der Charakteristikentheorie gehörenden Abhandlungen ohne irgend welchen Nachweis angegeben. Da, soviel mir bekannt, nie eine Begründung dieser Zahlen publicirt ist, so soll es jetzt hier meine Aufgabe sein, die Elementarsysteme einer eingehenderen Untersuchung zu unterwerfen, um dadurch die Zahlen von Herrn *Chasles* zu beweisen.

§. 5. Dazu sind einige fundamentale Betrachtungen aus der Geometrie der Lage unumgänglich nothwendig. Wie die Punkte und die Geraden, welche in einer Ebene liegen, Elemente der Ebene, und reciprok die Ebenen und die Geraden, welche durch einen Punkt gehen, Elemente des Punktes heissen, so sollen auch die Geraden, welche eine Gerade schneiden, — *Punktgeraden* —, sowie die Geraden, welche mit ihr in einer Ebene liegen, — *Ebenengeraden* —, *Elemente dieser Geraden* genannt werden. Obwohl zwar diese beiden Begriffe, Punktgeraden und Ebenengeraden, sich decken. so wird die Unterscheidung sich dennoch als zweckmässig erweisen. Wie nun als Gebilde zweiter Ordnung der Kegelschnitt der Geometrie der Ebene, der Kegel der Geometrie des Punktes angehört, so gehört der Geometrie der Geraden ein Gebilde an, welches entweder als Schnitt zweier Ebenen aufgefasst werden kann, auf dem zwei ausgezeichnete Punkte liegen, oder als Verbindungsgerade zweier Punkte, durch welche Gerade zwei ausgezeichnete Ebenen gehen, was reciprok und gleichbedeutend ist. Dieses Gebilde wollen wir *begrenzten Ebenenschnitt*, die beiden ausgezeichneten Punkte *Hauptpunkte*, die beiden ausgezeichneten Ebenen *Hauptebenen*, und die Gerade, welche als Verbindung der Hauptpunkte oder als Schnitt der Hauptebenen erscheint, *Hauptgerade* nennen. Dass der begrenzte Ebenenschnitt als das der Geometrie der Geraden angehörige Gebilde zweiter Ordnung dem Kegelschnitt und dem Kegel an die

*) Es darf nicht unerwähnt bleiben, dass diese ganze Entwicklung die gegebenen Bedingungen als *einfache* voraussetzt, d. h. analytisch ausgedrückt, als solche, welche nur *eine* Bedingungsgleichung liefern, wonach also z. B. Bedingungen, wie eine Gerade zu enthalten, doppelt oder dreipunktig zu berühren, ausgeschlossen sind.

Seite gestellt werden muss, geht aus der in §. 6, §. 7 und §. 8 gemachten Zusammenstellung der charakteristischen Eigenschaften dieser drei Gebilde hervor.

§. 6. Es sind nämlich die Elemente:

a) des Kegelschnitts seine Punkte und seine Tangenten,

b) des Kegels seine Ebenen und seine Tangenten, d. h. die ihn erzeugenden Geraden,

c) des begrenzten Ebenenschnitts die durch seine beiden Hauptpunkte gehenden Punktgeraden, und die auf seinen beiden Hauptebenen liegenden Ebenengeraden.

Ausser diesen Elementen ziehen wir noch in den Kreis unserer Betrachtung:

a) beim Kegelschnitt seine Tangentialebenen, d. h. die durch seine Tangenten gehenden Ebenen, und seine *Treffgeraden,* d. h. die durch seine Punkte gehenden Geraden;

b) beim Kegel seine Punkte, d. h. die auf seinen Tangenten liegenden Punkte, und seine *Treffgeraden*, d. h. die auf seinen Ebenen gelegenen Geraden;

c) beim begrenzten Ebenenschnitt seine Punkte, d. h. die auf seinen Ebenengeraden, also auf seinen Hauptebenen liegenden Punkte, und seine Tangentialebenen, d. h. die durch seine Punktgeraden, also durch seine Hauptpunkte gehenden Ebenen.

§. 7. Die Analogien treten am deutlichsten hervor, wenn wir diese drei Gebilde zweiter Ordnung mit den Grundgebilden erster Stufe, d. h. mit denen, welche eine einfach unendliche Mannichfaltigkeit ihrer Elemente darbieten, also mit der geraden Punktreihe, dem Ebenenbüschel und dem Strahlbüschel in Beziehung setzen, was durch die folgende Zusammenstellung verdeutlicht wird:

a) Der *Kegelschnitt* hat mit jeder *geraden Punktreihe,* deren Träger in seiner Ebene liegt, und mit jedem *Strahlbüschel,* dessen *Ebene* seine Ebene ist, *zwei Elemente gemein;*

b) der *Kegel* hat mit jedem *Ebenenbüschel,* dessen Träger durch seinen Mittelpunkt geht, und mit jedem *Strahlbüschel,* dessen *Mittelpunkt* sein Mittelpunkt ist, *zwei Elemente gemein;*

c) der *begrenzte Ebenenschnitt* hat mit jedem *Strahlbüschel,* dessen *Mittelpunkt* auf seiner Hauptgeraden liegt, und mit jedem *Strahlbüschel,* dessen *Ebene* durch seine Hauptgerade geht, *zwei Elemente gemein.*

§. 8. Setzen wir die drei Grundgebilde erster Stufe zu den drei Gebilden zweiter Ordnung in eine solche Beziehung, dass jedesmal die Lage des einen von der Lage des andern ganz unabhängig ist, so erhalten wir Folgendes:

a) Jeder *Ebenenbüschel* und jeder *Strahlbüschel* enthält zwei Elemente, welche zwei Tangentialebenen resp. zwei Treffgeraden eines beliebigen Kegelschnitts sind;

b) jede *gerade Punktreihe* und jeder *Strahlbüschel* enthält zwei Elemente, welche zwei Punkte resp. zwei Treffgeraden eines beliebigen Kegels sind;

c) jede *gerade Punktreihe* und jeder *Ebenenbüschel* enthält zwei Elemente, welche zwei Punkte resp. zwei Tangentialebenen eines beliebigen begrenzten Ebenenschnitts sind.

§. 9. Da ferner

a) eine Ebene durch 3, ein Kegelschnitt aber durch 5 Bedingungen bestimmt ist, wenn seine Ebene bekannt ist;

b) ein Punkt durch 3, ein Kegel aber durch 5 Bedingungen bestimmt ist, wenn sein Mittelpunkt bekannt ist;

c) eine Gerade durch 4, ein begrenzter Ebenenschnitt aber auch durch 4 Bedingungen bestimmt ist, wenn seine Hauptgerade bekannt ist;

so gehören zur vollständigen Bestimmung

a) eines Kegelschnitts $3+5=8$ Bedingungen,

b) eines Kegels $3+5=8$ Bedingungen,

c) eines begrenzten Ebenenschnitts $4+4=8$ Bedingungen.

§. 10. Wenn wir nun die Forderung stellen, dass die beiden Elemente zusammenfallen, welche nach §. 7:

a) ein Kegelschnitt α) mit jeder geraden Punktreihe gemein hat, deren Träger in seiner Ebene liegt, so erhalten wir einen Kegelschnitt, dessen Punkte eine gerade Punktreihe g bilden, und dessen Tangenten zwei Strahlbüschel bilden, deren Mittelpunkte auf g liegen, ein Gebilde, das mit „$\mathfrak{P}$“ bezeichnet werden soll; β) mit jedem Strahlbüschel gemein hat, dessen Ebene seine Ebene ist, so erhalten wir einen Kegelschnitt, dessen Tangenten einen Strahlbüschel p bilden, und dessen Punkte zwei gerade Punktreihen bilden, deren Träger durch p gehen, ein Gebilde, das mit „$\mathfrak{G}$“ bezeichnet werden soll;

b) ein Kegel α) mit jedem Ebenenbüschel gemein hat, dessen Träger durch seinen Mittelpunkt geht, so erhalten wir einen Kegel, dessen Ebenen ein

Ebenenbüschel g' bilden, und dessen Tangenten zwei Strahlbüschel bilden, deren Ebenen durch g' gehen, ein Gebilde, das mit „$\mathfrak{P}'$“ bezeichnet werden soll; β) mit einem Strahlbüschel gemein hat, dessen Mittelpunkt sein Mittelpunkt ist, so erhalten wir einen Kegel, dessen Tangenten einen Strahlbüschel p' bilden, und dessen Ebenen zwei Ebenenbüschel bilden, deren Träger Strahlen von p' sind, ein Gebilde, das mit „$\mathfrak{G}'$“ bezeichnet werden soll;

c) ein begrenzter Ebenenschnitt α) mit jedem Strahlbüschel gemein hat, dessen Mittelpunkt auf seiner Hauptgeraden liegt, so erhalten wir einen begrenzten Ebenenschnitt, dessen Ebenengeraden *ein* ebenes Geradensystem *) e bilden, d. h. dessen Hauptebenen zusammengefallen sind, und dessen Punktgeraden nach wie vor zwei Strahlbündel bilden, deren Mittelpunkte auf e liegen, ein Gebilde, das mit „$\mathfrak{B}$“ bezeichnet werden soll; β) mit jedem Strahlbüschel gemein hat, dessen Ebene durch seine Hauptgerade geht, so erhalten wir einen begrenzten Ebenenschnitt, dessen Punktgeraden ein Strahlbündel e' bilden, d. h. dessen Hauptpunkte zusammengefallen sind, und dessen Ebenengeraden nach wie vor zwei ebene Geradensysteme bilden, deren Ebenen durch e' gehen, ein Gebilde, das mit „$\mathfrak{B}'$“ bezeichnet werden soll.

$\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{B}$ haben also das Aussehen von Punktenpaaren, $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ von Geradenpaaren, $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{B}'$ von Ebenenpaaren, konnten jedoch deshalb nicht so genannt werden, weil z. B. Punkte des Kegelschnitts $\mathfrak{P}$ nicht bloss die zwei Punkte sind, welche das Paar bilden, sondern vielmehr sämmtliche Punkte ihrer Verbindungsgeraden. Ferner wäre hier noch zu erwähnen, dass Kegelschnitte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{G}$, Kegel $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{G}'$, sowie begrenzte Ebenenschnitte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ je durch eine Bedingung weniger bestimmt sind, als die allgemeinen Gebilde zweiter Ordnung.

§. 11. Ein Kegelschnitt $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{G}$ ist also z. B. durch 4 Bedingungen bestimmt, wenn seine Ebene gegeben ist. 4 Bedingungen genügen aber auch alle Kegelschnitte eines ebenen Kegelschnittsystems (μ, ν). Folglich müssen

---

*) Wir fassen die Ebene sowohl als den Träger aller in ihr liegenden Punkte auf, — ebenes Punktsystem —, wie auch als den Träger aller in ihr liegenden Geraden — ebenes Geradensystem —, und reciprok den Punkt als den Träger aller durch ihn gehenden Ebenen — Ebenenbündel —, wie auch als den Träger aller durch ihn gehenden Geraden — Strahlbündel —, und erhalten so *vier* Grundgebilde zweiter Stufe.

in einem solchen Systeme eine gewisse endliche Anzahl von Kegelschnitten $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{G}$ vorkommen, da ja diese durch die 4 Bedingungen des Systems endlichdeutig bestimmt sind. Irgend eine in der Ebene dieses Systems liegende Gerade g schneidet nun jeden Kegelschnitt in zwei Punkten, welche in zwei Fällen zusammenfallen können, erstens, wenn g den Kegelschnitt berührt, und zweitens, wenn dieser ein Gebilde $\mathfrak{P}$ ist, was aus §. 10, *a*) folgt. Jedem Punkte P auf g entsprechen aber μ Punkte Q als zweite Schnittpunkte mit den μ durch P gehenden Kegelschnitten, und umgekehrt entsprechen auch jedem Q μ Punkte P. Es giebt auf g folglich 2μ Stellen, wo zwei so zugeordnete Punkte P und Q zusammenfallen. ν dieser Stellen sind Berührungspunkte der Geraden mit Kegelschnitten des Systems (μ, ν). Demnach bleiben $2\mu-\nu$ Stellen übrig, wo Gebilde $\mathfrak{P}$ schneiden, und da jedes Gebilde $\mathfrak{P}$, das in dem Systeme vorkommt, g in zwei zusammenfallenden Punkten schneidet, so folgt der Satz:

a) In einem ebenen Kegelschnittsystem (μ, ν) giebt es $2\mu-\nu$ Kegelschnitte $\mathfrak{P}$*). Dem reciprok findet man, wenn man statt der Geraden g einen Strahlbüschel, statt der Kegelschnittpunkte Kegelschnitttangenten betrachtet:

b) In einem ebenen Kegelschnittsystem (μ, ν) giebt es $2\nu-\mu$ Kegelschnitte $\mathfrak{G}$*). Analog dazu kommen in einem Systeme (ν, ϱ) von Kegeln mit gemeinsamem Mittelpunkte $2\varrho-\nu$ Gebilde $\mathfrak{P}'$ und $2\nu-\varrho$ Gebilde $\mathfrak{G}'$ vor.

§. 12. Eine Fläche zweiter Ordnung hat drei Arten von Elementen, nämlich Punkte, die auf ihr liegen, Geraden, die sie berühren, und Ebenen, die sie berühren. Zwei Punkte hat sie mit einer geraden Punktreihe, zwei Gerade mit einem Strahlbüschel, und zwei Ebenen mit einem Ebenenbüschel gemein. Analog §. 10 betrachten wir nun die drei besonderen Arten von Flächen, für welche diese gemeinsamen Elemente zusammenfallen, und zwar:

a) Flächen „$\mathfrak{S}$“, welche mit jeder *geraden Punktreihe,*

b) Flächen „$\mathfrak{R}$“, welche mit jedem *Ebenenbüschel,*

c) Flächen „$\mathfrak{E}$“, welche mit jedem *Strahlbüschel*

zwei zusammenfallende Elemente gemein haben. Was nun die Lage der Elemente jeder dieser drei ausgearteten Flächen angeht, so folgern wir:

a) Eine *Fläche* $\mathfrak{S}$ hat zu ihren Punkten die Punkte eines ebenen Punktsystems, zu ihren Tangenten die Treffgeraden, und zu ihren Tangential-

*) Cf. den anders geführten Beweis von Herrn *Chasles* in den *Comptes rendus,* Bd. 58, S. 1173.

ebenen die Tangentialebenen eines in der Ebene dieses Punktsystems liegenden *Kegelschnitts.*

b) Eine *Fläche* $\mathfrak{K}$ hat zu ihren Tangentialebenen die Ebenen eines Ebenenbündels, zu ihren Tangenten die Treffgeraden, und zu ihren Punkten, die Punkte eines in diesem Ebenenbündel liegenden *Kegels.*

c) Eine *Fläche* $\mathfrak{E}$ hat zu ihren Tangenten die Elemente einer Geraden (§. 5), zu ihren Punkten die Punkte und zu ihren Tangentialebenen die Tangentialebenen eines *begrenzten Ebenenschnitts,* welcher diese Gerade zu seiner Hauptgeraden hat.

§. 13. Daraus geht hervor mit Rücksicht auf §. 10:

a) Der Kegelschnitt, welchen ein beliebiges ebenes Punkt- oder Geradensystem mit einer Fläche zweiter Ordnung gemein hat:

α) wird zu einem $\mathfrak{P}$, wenn die Fläche zu einem $\mathfrak{S}$ wird,

β) bleibt ein allgemeiner Kegelschnitt, wenn die Fläche zu einem $\mathfrak{K}$ wird,

γ) wird zu einem $\mathfrak{G}$, wenn die Fläche zu einem $\mathfrak{E}$ wird.

b) Der Kegel, welchen ein beliebiges Ebenen- oder Strahlbündel mit einer Fläche zweiter Ordnung gemein hat:

α) bleibt ein allgemeiner Kegel, wenn die Fläche zu einem $\mathfrak{S}$ wird,

β) wird zu einem $\mathfrak{P}'$, wenn die Fläche zu einem $\mathfrak{K}$ wird,

γ) wird zu einem $\mathfrak{G}'$, wenn die Fläche zu einem $\mathfrak{E}$ wird.

§. 14. Dass jede der drei Flächen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{E}$ durch eine Bedingung weniger, als eine allgemeine Fläche zweiter Ordnung, also durch 8 Bedingungen bestimmt ist, geht zuerst daraus hervor, dass die Bedingung, welcher die Punkte von $\mathfrak{S}$, die Ebenen von $\mathfrak{K}$ oder die Tangenten von $\mathfrak{E}$ in ihrer Lage genügen müssen, *einer gegebenen* Bedingung äquivalent ist. Dann wird es auch durch folgende Ueberlegung deutlich:

a) die Ebene, auf welcher die Punkte eines $\mathfrak{S}$ liegen sollen, ist durch 3, der auf dieser Ebene liegende zu $\mathfrak{S}$ gehörige Kegelschnitt noch durch 5 Bedingungen bestimmt;

b) der Punkt, durch welchen die Ebenen eines $\mathfrak{K}$ gehen sollen, ist durch 3, der Kegel, der diesen Punkt zum Mittelpunkt hat, und zu $\mathfrak{K}$ gehört, noch durch 5 Bedingungen bestimmt;

c) die Gerade, welche die Geraden eines $\mathfrak{E}$ schneiden sollen, ist durch 4, der begrenzte Ebenenschnitt, der diese Gerade zu seiner Hauptgeraden hat, auch durch 4 Bedingungen bestimmt.

§. 15. Die 8 Bedingungen, welche zu einem System (μ, ν, ϱ) von Flächen zweiter Ordnung gehören, bestimmen also auch Flächen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{E}$ endlichdeutig, d. h. unter den zu einem Systeme gehörenden Flächen zweiter Ordnung kommen eine gewisse Anzahl σ von Gebilden $\mathfrak{S}$, $\varkappa$ von Gebilden $\mathfrak{K}$, ε von Gebilden $\mathfrak{E}$ vor. Um diese Zahlen σ, $\varkappa$, ε als abhängig von den drei Charakteristiken μ, ν, ϱ darzustellen, denken wir uns das Flächensystem (μ, ν, ϱ) von einer Ebene geschnitten. Dann wird auf dieser durch jede Fläche ein Kegelschnitt, durch das ganze System ein ebenes Kegelschnittsystem (μ, ν) bestimmt. Dieses enthält nach §. 11, *a*) $2\mu-\nu$ Gebilde $\mathfrak{P}$, welche nach §. 13, *a*) die Schnitte der Ebene mit denjenigen Flächen des Systems sind, die in Flächen $\mathfrak{S}$ ausgeartet sind. Daher gilt der Satz:

a) Die Anzahl der Flächen $\mathfrak{S}$ in einem Systeme (μ, ν, ϱ) von Flächen zweiter Ordnung beträgt $\sigma = 2\mu - \nu$.

Aus den ε Gebilden $\mathfrak{E}$ schneidet die durch das System gelegte Ebene nach §. 13, *a*) Kegelschnitte aus, die zu Gebilden $\mathfrak{G}$ geworden sind. Ausserdem hat die Ebene aber auch mit jeder der sie berührenden ϱ Flächen ein Gebilde $\mathfrak{G}$ gemein. Folglich muss das ausgeschnittene Kegelschnittsystem (μ, ν) $\varepsilon+\varrho$ Kegelschnitte $\mathfrak{G}$ enthalten. Die Anzahl dieser Gebilde ist aber nach §. 11, *b*) auch $2\nu-\mu$. Daher der Satz:

b) Die Anzahl der Gebilde $\mathfrak{E}$ in einem Systeme (μ, ν, ϱ) von Flächen zweiter Ordnung beträgt $\varepsilon = 2\nu - \mu - \varrho$.

Sind ferner von einem Punkte aus an alle Flächen des Systems (μ, ν, ϱ) die Tangentialkegel gelegt, so wird dadurch ein System (ν, ϱ) von Kegeln mit gemeinsamem Mittelpunkte bestimmt, und die reciproken Betrachtungen ergeben dann erstens den Satz *b*) noch einmal, und zweitens:

c) Die Anzahl der Gebilde $\mathfrak{K}$ in einem Systeme (μ, ν, ϱ) von Flächen zweiter Ordnung beträgt $\varkappa = 2\varrho - \nu$.

Diese 3 Formeln für σ, ε, $\varkappa$, gestatten uns, umgekehrt μ, ν, ϱ durch σ, ε, $\varkappa$ auszudrücken, nämlich:

d) $\mu = \dfrac{3\sigma + 2\varepsilon + \varkappa}{4}$,

e) $\nu = \dfrac{\sigma + 2\varepsilon + \varkappa}{2}$,

f) $\varrho = \dfrac{\sigma + 2\varepsilon + 3\varkappa}{4}$.

§. 16. Für jedes der 45 Elementarsysteme haben wir also drei solche Gleichungen, aber auch drei Unbekannte σ, ε, $\varkappa$. Da nun, wie schon in §. 4

erwähnt, die Charakteristiken sämmtlicher Elementarsysteme im ganzen nur 55 Elementarcharakteristiken sind, weil das μ eines Systems zugleich das ν oder ϱ eines anderen sein kann, so fehlt uns also nichts weiter, als die Kenntniss von 55 der 3.45 Zahlen σ, ε, $\varkappa$, um alle übrigen σ, ε, $\varkappa$ zu finden, und die 55 Elementarcharakteristiken zu bestimmen; vorausgesetzt allerdings, dass unter den bekannten 55 σ, ε, $\varkappa$ nicht solche sind, die wegen der Formeln des §. 15 von einander abhängen. Sämmtliche 45 Zahlen ε aber, sowie 21 Zahlen σ und 21 Zahlen $\varkappa$ ergeben sich durch kurze und übersichtliche geometrische Betrachtungen, bei denen wir der Kürze wegen ein System von Flächen mit den elementaren Bedingungen, m Punkte zu enthalten, n Geraden und r Ebenen zu berühren, wo $m+n+r=8$ ist, mit (m, n, r) bezeichnen.

§. 17. Da sämmtliche Punkte einer Fläche $\mathfrak{S}$ in einer Ebene liegen müssen, durch mehr als 3 Punkte sich aber im allgemeinen keine Ebene legen lässt, so ist $\sigma=0$ in jedem Systeme (m, n, r), wo $m>3$; und reciprok, da sämmtliche Ebenen einer Fläche $\mathfrak{R}$ durch einen Punkt gehen müssen, mehr als 3 Ebenen sich aber im allgemeinen nicht in *einem* Punkte schneiden, so ist $\varkappa=0$ in jedem Systeme (m, n, r), wo $r>3$ ist. Damit sind schon 30 Bestimmungen gemacht, weil nach dieser Bemerkung in 15 Elementarsystemen $\sigma=0$ und in 15 anderen $\varkappa=0$ ist.

§. 18. Was die Bestimmung einer Fläche $\mathfrak{E}$ durch 8 elementare Bedingungen angeht, so wissen wir, dass alle gegebenen Geraden die Hauptgerade schneiden, alle gegebenen Punkte auf den Hauptebenen liegen, und alle gegebenen Ebenen durch die Hauptpunkte gehen müssen. Sind nun drei Punkte gegeben, so liegen diese entweder alle drei auf einer Hauptebene, bestimmen dieselbe also, oder es liegt einer von ihnen auf der einen Hauptebene, und die beiden andern auf der andern; dann bestimmen diese eine Verbindungsgerade, welche als Ebenengerade die Hauptgerade schneiden muss. Sind vier Punkte gegeben, so können entweder drei auf einer Hauptebene liegen, die also dadurch festgelegt ist, oder die vier Punkte bestimmen auf jeder Hauptebene eine Verbindungsgerade zweier, in welchem Falle die so erhaltenen beiden Geraden die Hauptgerade schneiden müssen. Sind fünf Punkte gegeben, so bestimmen drei die eine Hauptebene, die beiden andern Punkte aber auf der andern Hauptebene eine Verbindungsgerade, welche die Hauptgerade schneiden muss. Sechs gegebene Punkte endlich legen die beiden Hauptebenen, also auch die Hauptgerade fest. Beachten wir nun noch, dass das Reciproke für drei, vier, fünf oder sechs gegebene Ebenen gilt, welche nur statt der

Hauptebenen die Hauptpunkte und statt der Verbindungsgeraden Schnittgeraden bestimmen, welche auch die Hauptgerade schneiden müssen, erinnern wir uns ferner, dass es im allgemeinen keine Gerade giebt, die mehr als vier Geraden schneidet, oder die in einer bestimmten Ebene liegt, und mehr als zwei Geraden schneidet, so schliessen wir mit Rücksicht auf die obigen Bemerkungen, dass im Systeme (m, n, r) jedesmal $\varepsilon = 0$ ist, wenn *a*) $n > 4$, *b*) $n > 3$ und m oder $r > 2$, *c*) $n > 2$ und m oder $r > 3$, *d*) $n > 1$ und m oder $r > 4$, *e*) $n > 0$ und m oder $r > 5$, *f*) m oder $r > 6$. Demgemäss ist in 30 Elementarsystemen $\varepsilon = 0$. Die nunmehr erlangte Kenntniss von 60 jener $3 \cdot 45$ Zahlen σ, ε, $\varkappa$ reicht aber zur Auffindung der 55 Elementarcharakteristiken deshalb noch nicht aus, weil gewisse dieser Zahlen aus den anderen durch die Formeln des §. 15 abgeleitet werden können. Wir kommen nun zur Bestimmung von Zahlen σ, ε, $\varkappa$, die von Null verschieden sind, wozu wir einige Bemerkungen vorausschicken müssen.

§. 19. Ein Gebilde $\mathfrak{S}$ war als eine Fläche zweiter Ordnung definirt, welche von jeder geraden Punktreihe in zwei *zusammenfallenden* Punkten geschnitten wird. An jeder Stelle A der Ebene eines $\mathfrak{S}$ hat man sich also *zwei* Punkte A_1 und A_2 zu denken. Daher zählt ein Gebilde $\mathfrak{S}$, welches der Bedingung unterworfen ist, Punkt A zu enthalten, als Fläche eines Systems doppelt, nämlich als eine A_1 und als eine A_2 enthaltende Fläche. Sind zwei Punkte A und B gegeben, so ist ein durch A und B gehendes $\mathfrak{S}$ als Fläche eines Systems vierfach zu zählen, weil man sich vorstellen muss, dass in A zwei Punkte A_1 und A_2, in B eben so B_1 und B_2 vereinigt sind, und dass es eine A_1 und B_1, eine A_1 und B_2, eine A_2 und B_1, und endlich eine A_2 und B_2 enthaltende Fläche, also im ganzen vier zusammenfallende $\mathfrak{S}$ giebt. Ebenso zeigt sich, dass ein drei Punkte enthaltendes $\mathfrak{S}$ im Systeme achtfach zu zählen ist. Durch die analogen Deductionen erhärtet man, dass ein $\mathfrak{K}$ zweifach, vierfach, achtfach zu zählen ist, je nachdem es eine, zwei oder drei Ebenen enthalten soll, und dass ein $\mathfrak{E}$ zweifach, vierfach, achtfach, sechszehnfach zu zählen ist, je nachdem zu seiner Bestimmung eine, zwei, drei oder vier Geraden gegeben sind.

§. 20. Durch drei gegebene Punkte ist die Ebene eines $\mathfrak{S}$ gerade bestimmt. Diese Ebene schneidet die ausserdem gegebenen Geraden und Ebenen in Punkten resp. Geraden, welche Punkte resp. Tangenten des zu $\mathfrak{S}$ gehörenden Kegelschnitts sind (§. 12, *a*)). Beachten wir nun §. 19 und ferner, dass 1 Kegelschnitt bestimmt ist durch 5 Punkte oder 5 Tangenten, 2 durch

4 Punkte und 1 Tangente oder 1 Punkt und 4 Tangenten, und endlich 4 Kegelschnitte durch 3 Punkte und 2 Tangenten oder 2 Punkte und 3 Tangenten, so ergiebt sich:

a) in $(3, 5, 0)$ und $(3, 0, 5)$ ist $\sigma = 1.8$;
b) in $(3, 4, 1)$ und $(3, 1, 4)$ ist $\sigma = 2.8$;
c) in $(3, 3, 2)$ und $(3, 2, 3)$ ist $\sigma = 4.8$.

Reciprok dazu:

a) in $(0, 5, 3)$ und $(5, 0, 3)$ ist $\varkappa = 1.8$;
b) in $(1, 4, 3)$ und $(4, 1, 3)$ ist $\varkappa = 2.8$;
c) in $(2, 3, 3)$ und $(3, 2, 3)$ ist $\varkappa = 4.8$.

§. 21. Was die Flächen $\mathfrak{E}$ anbetrifft, so haben wir schon gefunden, dass in 30 Elementarsystemen ihre Anzahl gleich Null ist. Die übrigen 15 Systeme sind $(2, 4, 2)$, $(3, 3, 2)$ und $(2, 3, 3)$, $(4, 2, 2)$ und $(2, 2, 4)$, $(3, 2, 3)$, $(5, 1, 2)$ und $(2, 1, 5)$, $(4, 1, 3)$ und $(3, 1, 4)$, $(6, 0, 2)$ und $(2, 0, 6)$, $(5, 0, 3)$ und $(3, 0, 5)$, endlich $(4, 0, 4)$. Wir kommen nun dazu, das ε jedes dieser Systeme mit Beachtung der Bemerkungen des §. 18 zu bestimmen; wobei wir nach Festlegung der Hauptgeraden einer Fläche $\mathfrak{E}$ der Kürze wegen die sich dann von selbst ergebende Bestimmung der Hauptebenen und Hauptpunkte ausser Acht lassen werden, und wobei, wie wir im Voraus erwähnen, mit den ausserhalb der eckigen Klammern stehenden Zahlen wegen §. 19 multiplicirt ist.

a) In $(2, 4, 2)$ ist $\varepsilon = [2].16$, weil die gegebenen vier Geraden von *zwei* Geraden gleichzeitig geschnitten werden können, welche Hauptgeraden von Gebilden $\mathfrak{E}$ werden.

b) In $(3, 3, 2)$ ist $\varepsilon = [3.2].8$, weil die drei gegebenen Punkte *dreimal* die Verbindungsgerade zweier liefern, welche mit den drei gegebenen Geraden vier Geraden ausmachen, deren *zwei* gemeinsame Schnittgeraden Hauptgeraden von Flächen $\mathfrak{E}$ werden. Reciprok ist in $(2, 3, 3)$ auch $\varepsilon = [3.2].8$.

c) In $(4, 2, 2)$ ist $\varepsilon = [3.2+4].4$. Die vier gegebenen Punkte lassen sich nämlich zuerst *dreimal* in zwei Paare zerlegen, so dass dann die Verbindungsgeraden je zweier zu einem Paare gehöriger Punkte mit den beiden gegebenen Geraden vier Geraden ausmachen, welche *zwei* Hauptgeraden bestimmen. Ausserdem aber kann man auch von den vier gegebenen Punkten *viermal* drei abtrennen, auf deren Ebene die Schnittpunkte der beiden gegebenen Geraden *eine* Hauptgerade fest legen. Reciprok dazu ist in $(2, 2, 4)$ auch $\varepsilon = [3.2+4].4$.

d) In $(3, 2, 3)$ ist $\varepsilon = [3.3.2].4$. Von den drei gegebenen Punkten lassen sich nämlich auf *dreifache* Weise zwei Punkte absondern, von den drei gegebenen Ebenen auf *dreifache* Weise zwei Ebenen. Dann machen die Verbindungsgeraden zweier so abgesonderter Punkte, die Schnittgeraden zweier so abgesonderter Ebenen und die beiden gegebenen Geraden vier Geraden aus, welche *zwei* Hauptgeraden bestimmen.

e) In $(5, 1, 2)$ ist $\varepsilon = [10].2$, weil sich von den fünf gegebenen Punkten auf *zehnfache* Weise drei absondern lassen, auf deren Ebene die Verbindungsgerade der beiden andern Punkte und die gegebene Gerade zwei Schnittpunkte bestimmen, deren Verbindung *eine* Hauptgerade wird. Reciprok dazu ist in $(2, 1, 5)$ auch $\varepsilon = [10].2$.

f) In $(4, 1, 3)$ ist $\varepsilon = [3.3.2+4.3].2$. Von den drei gegebenen Ebenen können wir nämlich auf *dreifache* Weise zwei absondern; die vier gegebenen Punkte aber liefern zuerst *drei* Paare von Verbindungsgeraden je zweier. Dann machen ein solches Paar, die Schnittgerade zweier ausgesonderter Ebenen, und die gegebene Gerade vier Geraden aus, welche *zwei* Hauptgerade bestimmen. Von den vier gegebenen Punkten können wir aber auch auf *vier* verschiedene Arten drei absondern, auf deren Ebene die Schnittgerade zweier ausgesonderter Ebenen und die gegebene Gerade zwei Schnittpunkte bestimmen, deren Verbindung *eine* Hauptgerade wird. Reciprok dazu ist in $(3, 1, 4)$ auch $\varepsilon = [3.3.2+4.3].2$.

g) In $(6, 0, 2)$ ist $\varepsilon = 10$, weil sich die sechs gegebenen Punkte in *zehnfacher* Weise in zwei Punkttripel zerlegen lassen, welche zwei Ebenen liefern, deren Schnittgerade *eine* Hauptgerade wird. Reciprok dazu ist in $(2, 0, 6)$ auch $\varepsilon = 10$.

h) In $(5, 0, 3)$ ist $\varepsilon = 10.3$. Die fünf gegebenen Punkte bestimmen nämlich *zehn* Tripel von Punkten, und die drei gegebenen Ebenen *drei* Paare von Ebenen. Dann wird die Ebene jedes Punkttripels von der Verbindungsgeraden der beiden nicht dazu gehörigen Punkte und von der Schnittgeraden jedes Ebenenpaares in zwei Punkten geschnitten, durch deren Verbindung wir *eine* Hauptgerade erhalten. Reciprok dazu ist in $(3, 0, 5)$ auch $\varepsilon = 10.3$.

i) Endlich ist ε in $(4, 0, 4)$ gleich $3.3.2+4.3+4.3$. Die vier gegebenen Punkte liefern nämlich zuerst *drei* Paare von Verbindungsgeraden zweier Punkte, die vier gegebenen Ebenen *drei* Paare von Schnittgeraden zweier Ebenen. Jedes Paar von Verbindungsgeraden giebt dann mit jedem Paare von

Schnittgeraden *zwei* Hauptgeraden als diejenigen Geraden, welche alle vier Geraden schneiden. Ferner wird die Ebene jedes der *vier* Punkttripel, welche durch die vier gegebenen Punkte bestimmt werden, von einem jeden jener *drei* eben erwähnten Schnittgeradenpaare in zwei Punkten geschnitten, deren Verbindung *eine* Hauptgerade festlegt. Wenn wir reciprok von den vier gegebenen Ebenen *viermal* je drei zusammenfassen, so bestimmt der gemeinsame Schnittpunkt solcher drei Ebenen mit jedem der oben erwähnten *drei* Paare von Verbindungsgeraden zwei Ebenen, deren Schnitt *eine* Hauptgerade wird.

§. 22. So hat uns denn, um die bisher gewonnenen Resultate zusammenzufassen, §. 17 15 der Zahlen σ und 15 der Zahlen $\varkappa$, §. 20 noch 6 der σ und 6 der $\varkappa$, und endlich §. 18 und §. 21 sämmtliche 45 Zahlen ε bestimmt. Diese 87 Bestimmungen vereint mit den Formeln des §. 15 setzen uns in den Stand, sowohl die noch restirenden 24 Zahlen σ und 24 Zahlen $\varkappa$, als auch sämmtliche Elementarcharakteristiken zu finden, wobei wir noch eine Reihe von Bestätigungen erhalten müssen, da die Zahl der Gleichungen die Zahl der Unbekannten um 32 übersteigt. Die Bestimmung der 55 Elementarcharakteristiken war aber die Beantwortung der Frage, wie viel Flächen zweiter Ordnung durch m Punkte gehen, n Geraden und r Ebenen berühren, wo $m+n+r=9$ ist; eine Frage, auf welche wir in §. 4 die Bestimmung der Anzahl der Flächen zurückgeführt haben, welche irgend welchen 9 Bedingungen genügen, deren Parameter bekannt sind.

Die unten folgende Tabelle, welche die Bestimmung der Elementarcharakteristiken zeigen soll, enthält von den Zahlen zweier reciproker Systeme immer nur die zu dem einen gehörigen, weil in zwei reciproken Systemen, d. h. solchen, wo m und r vertauscht sind, auch μ sich mit ϱ, und σ sich mit $\varkappa$ vertauscht, während ν und ε denselben Werth behalten. Von den funfzehn Columnen der unten folgenden Tabelle enthält die zweite 25 Elementarsysteme; in den folgenden vier Columnen sind die von vorhergehenden Systemen her bekannten Elementarcharakteristiken aufgeführt, wobei ein rechts daneben stehender Buchstabe anzeigt, dass sich die davor stehende Zahl μ oder ϱ aus dem diesem Buchstaben angehörigen vorangehenden Systeme ergiebt. Die dann folgenden drei Columnen für σ, ε, $\varkappa$ enthalten die sich aus §. 17, §. 18, §. 20 und §. 21 ergebenden, also schon bekannten Zahlen σ, ε, $\varkappa$, die nächsten fünf Columnen die dann mit Anwendung der Formeln des §. 15 resultirenden Werthe für μ, ν, ϱ, σ, $\varkappa$. Endlich sind in der letzten

Columne die 20 Elementarsysteme aufgeführt, welche den 25 der zweiten Columne reciprok und ungleich sind.

§. 23. Tabelle der Elementarsysteme (cf. §. 22).

	System	Bekannt							Gefunden (nach §. 15)					Reciprokes System
		μ	Wegen	ϱ	Wegen	σ	ε	$\varkappa$	μ	ν	ϱ	σ	$\varkappa$	
a)	(4, 0, 4)					0	42	0	21	42	21			
b)	(5, 0, 3)			21	*a)*	0	30	8	17	34				(3, 0, 5)
c)	(6, 0, 2)			17	*b)*	0	10		9	18			16	(2, 0, 6)
d)	(7, 0, 1)			9	*c)*	0	0		3	6			12	(1, 0, 7)
e)	(8, 0, 0)			3	*d)*	0	0		1	2			4	(0, 0, 8)
f)	(4, 1, 3)	34	*b)*	42	*a)*	0	60	16		68				(3, 1, 4)
g)	(5, 1, 2)	18	*c)*	34	*b)*	0	20			36			32	(2, 1, 5)
h)	(6, 1, 1)	6	*d)*	18	*g)*	0	0			12			24	(1, 1, 6)
i)	(7, 1, 0)	2	*e)*	6	*d)*	0	0			4			8	(0, 1, 7)
k)	(3, 2, 3)	68	*f)*	68	*f)*	32	72	32		104				
l)	(4, 2, 2)	36	*g)*	68	*f)*	0	40			72			64	(2, 2, 4)
m)	(5, 2, 1)	12	*h)*	36	*g)*	0	0			24			48	(1, 2, 5)
n)	(6, 2, 0)	4	*i)*	12	*h)*	0	0			8			16	(0, 2, 6)
o)	(3, 3, 2)	72	*l)*	104	*k)*	32	48			112			96	(2, 3, 3)
p)	(4, 3, 1)	24	*m)*	72	*l)*	0	0			48			96	(1, 3, 4)
q)	(5, 3, 0)	8	*n)*	24	*m)*	0	0			16			32	(0, 3, 5)
r)	(2, 4, 2)	112	*o)*	112	*o)*		32			128	96	96		
s)	(3, 4, 1)	48	*p)*	112	*o)*	16	0			80		144		(1, 4, 3)
t)	(4, 4, 0)	16	*q)*	48	*p)*	0	0			32		64		(0, 4, 4)
u)	(2, 5, 1)	80	*s)*	128	*r)*		0			104	56	152		(1, 5, 2)
v)	(3, 5, 0)	32	*t)*	80	*s)*	8	0			56		104		(0, 5, 3)
w)	(1, 6, 1)	104	*u)*	104	*u)*		0			104	104	104		
x)	(2, 6, 0)	56	*v)*	104	*u)*		0			80	32	128		(0, 6, 2)
y)	(1, 7, 0)	80	*x)*	104	*w)*		0			92	68	116		(0, 7, 1)
z)	(0, 8, 0)	92	*y)*	92	*y)*		0			92	92	92		

Hiernach haben sich die von Herrn *Chasles* angegebenen Zahlen, welche die Anzahl der neun elementaren Bedingungen unterworfenen Flächen zweiter Ordnung ausdrücken sollen, als richtig erwiesen.

§. 24. Unsere Methode, diese Zahlen zu bestimmen, hat uns gleichzeitig die Zahlen geliefert, welche angeben, wieviel Gebilde $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{K}$ acht elementaren Bedingungen genügen. Davon waren die 45 der ε, sowie 21 der σ und 21 der $\varkappa$ schon früher gefunden. Die Beziehung, welche eine Fläche $\mathfrak{S}$ zu einem

Kegelschnitt, und eine Fläche $\mathfrak{K}$ zu einem Kegel hat (§. 12), zeigt uns, dass aus den durch die obige Tabelle neu erhaltenen 24 Zahlen σ und 24 Zahlen $\varkappa$ sofort 2.24 Angaben über Kegelschnitte und Kegel folgen, von denen ich nur einige beispielsweise anführen möchte. Aus *a*) $\sigma = 4.4$ *) in $(2, 0, 6)$, *b*) $\sigma = 4.8$ in $(2, 1, 5)$, *c*) $\sigma = 4.16$ in $(2, 2, 4)$, *d*) $\sigma = 4.24$ in $(2, 3, 3)$, *e*) $\sigma = 4.24$ in $(2, 4, 2)$, *f*) $\sigma = 4.14$ in $(2, 5, 1)$, *g*) $\sigma = 4.8$ in $(2, 6, 0)$ folgen sieben Angaben, von denen z. B. die aus *d*) resultirende heisst:

Jedes Ebenenbüschel enthält 24 Ebenen, von denen jede 3 beliebig gegebene Geraden und 3 beliebig gegebene Ebenen in 3 Punkten und 3 Geraden schneidet, welche Elemente eines und desselben Kegelschnitts sind.

Daraus würden weiter Sätze folgen, wie z. B., wenn wir die aus *a*) und *g*) folgenden Angaben nehmen:

Alle die Ebenen, welche sechs beliebige Ebenen in einem Brianchonschen Sechsseit schneiden, umhüllen eine Fläche von der vierten Klasse und:

Alle die Ebenen, welche sechs beliebige Geraden in einem Pascalschen Sechseck schneiden, umhüllen eine Fläche von der achten Klasse.

Ferner folgen aus *a*) $\sigma = 2.6$ in $(1, 0, 7)$, *b*) $\sigma = 2.12$ in $(1, 1, 6)$, *c*) $\sigma = 2.24$ in $(1, 2, 5)$, *d*) $\sigma = 2.48$ in $(1, 3, 4)$, *e*) $\sigma = 2.72$ in $(1, 4, 3)$, *f*) $\sigma = 2.76$ in $(1, 5, 2)$, *g*) $\sigma = 2.52$ in $(1, 6, 1)$, *h*) $\sigma = 2.34$ in $(1, 7, 0)$, acht Angaben, von denen z. B. die sich aus *f*) ergebende lautet:

Ein Ebenenbündel enthält 76 Ebenen, von denen jede 5 gegebene Geraden und 2 gegebene Ebenen in 5 Punkten und 2 Geraden so schneidet, dass der durch die fünf Punkte bestimmte Kegelschnitt von diesen beiden Geraden berührt wird.

Endlich folgen aus $\sigma = 4$ in $(0, 0, 8)$, $\sigma = 8$ in $(0, 1, 7)$, $\sigma = 16$ in $(0, 2, 6)$, $\sigma = 32$ in $(0, 3, 5)$, $\sigma = 64$ in $(0, 4, 4)$, $\sigma = 104$ in $(0, 5, 3)$, $\sigma = 128$ in $(0, 6, 2)$, $\sigma = 116$ in $(0, 7, 1)$ und $\sigma = 92$ in $(0, 8, 0)$ die neun Angaben über die Anzahl der Kegelschnitte, welche n gegebene Geraden schneiden und r gegebene Ebenen berühren, wo $n + r = 8$ ist. Die letzte dieser Angaben sagt aus:

Es giebt 92 Kegelschnitte, welche 8 gegebene Geraden schneiden **).

---

*) Die Factoren 4, und nachher 2 sind wegen §. 19 abgesondert, wo gezeigt ist, dass bei zwei gegebenen Punkten jedes $\mathfrak{S}$ vierfach, und bei einem gegebenen Punkte zweifach zu zählen ist.

**) Dies ist schon von Herrn *Lüroth* in einer Bd. 68 dieses Journals enthaltenen Abhandlung bewiesen.

Von den reciproken Sätzen über Kegel will ich nur beispielsweise anführen:

Der Ort der Mittelpunkte aller durch 7 Punkte gehenden Kegelflächen ist eine Raumcurve von der sechsten Ordnung, weil $z = 2.6$ *in* $(7, 0, 1)$. Ferner:

Der Ort der Mittelpunkte aller durch 6 Punkte gehenden Kegelflächen ist eine Fläche vierter Ordnung, weil $z = 4.4$ *in* $(6, 0, 2)$.

Wenn wir gegebene Geraden berücksichtigen, so kommt unter anderem:

Der Ort der Mittelpunkte aller Kegelflächen, welche von 7 gegebenen Geraden berührt werden, ist eine Raumcurve von der 34ten *Ordnung, weil* $z = 2.34$ *in* $(0, 7, 1)$. Ferner:

Der Ort der Mittelpunkte aller Kegelflächen, welche von 6 gegebenen Geraden berührt werden, ist eine Fläche von der achten Ordnung, weil $z = 4.8$ *in* $(0, 6, 2)$. Schliesslich:

Es giebt 128 Kegelflächen, welche durch 2 gegebene Punkte gehen, und 6 gegebene Geraden berühren.

§. 25. Die eben gefundenen Angaben über Kegelschnitte und Kegel bilden die Grundlage zu einer Entwickelung der Theorie der Charakteristiken für beliebig im Raume gelegene Kegelschnitte und Kegel. Zu erwähnen wäre dabei, dass die Bedingung, einen Punkt zu enthalten, für einen Kegelschnitt *Doppelbedingung* ist, und ebenso für einen Kegel die Bedingung, dass eine gegebene Ebene eine seiner umhüllenden Ebenen sein soll. Das Schneiden einer Curve aber ist z. B. eine *einfache* Bedingung für einen im Raume beliebig liegend gedachten Kegelschnitt. Beispielsweise wollen wir uns die Aufgabe stellen, die Anzahl der Kegelschnitte zu bestimmen, welche 8 gegebene Raumcurven C^{n_1}, C^{n_2}, C^{n_3} ... C^{n_8} von den Ordnungen n_1, n_2 ... n_8 schneiden. Zu dem Ende denken wir uns die Gesammtheit der Kegelschnitte, welche 7 einfachen Bedingungen genügen, und nennen dieselbe ein System (ν, ϱ), wenn ν jener Kegelschnitte irgend eine Gerade schneiden und ϱ irgend eine Ebene berühren. Da also von den zweifach unendlich vielen Punkten aller Kegelschnitte eines Systems (ν, ϱ) auf jeder Geraden ν liegen, so ist ihr Ort eine Fläche ν^{ter} Ordnung. Diese schneidet daher eine gegebene Raumcurve C^n von der Ordnung n in $n.\nu$ Punkten. Durch diese gehen also $n.\nu$ Kegelschnitte, welche die einzigen sind, die C^n schneiden können. Verfahren wir nun ähnlich, wie bei der Herleitung des Ausdruckes $(Z_1, Z_2 \ldots Z_9)$ in §. 4, so erhalten wir zuerst, dass die Anzahl der Kegelschnitte, welche

C^{n_1}, C^{n_2}, C^{n_3} ... C^{n_8} schneiden, n_1 mal so gross ist, als die Anzahl der Kegelschnitte, welche eine gegebene Gerade und C^{n_2}, C^{n_3} ... C^{n_8} schneiden, und schliesslich, dass sie $n_1 . n_2 . n_3 \ldots n_8$ mal so gross ist, als die Anzahl der Kegelschnitte, welche 8 gegebene Geraden schneiden, d. h. wegen $\sigma = 92$ in $(0, 8, 0)$, gleich $92 . n_1 . n_2 \ldots n_8$ ist. Demnach ist die Anzahl der Kegelschnitte, welche 8 Kegelschnitte schneiden, $92 . 2^8$.

§. 26. Die durch die Tabelle des §. 23 erlangte Kenntniss der Elementarcharakteristiken setzt uns jetzt in den Stand, die in §. 4 entwickelte Formel

$$(Z_1, Z_2, Z_3 \ldots Z_9) = \Sigma[(m, n, r)\,\Sigma(\alpha^{(m)}\beta^{(n)}\gamma^{(r)})]$$

anzuwenden. Wir wissen z. B. aus §. 3, dass die Bedingung, eine Fläche zweiter Ordnung zu berühren, die Parameter $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$ hat. Um also daraus die Anzahl der Flächen zweiter Ordnung zu berechnen, welche 9 gegebene berühren, setzen wir für jede der 27 Grössen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots \alpha_9, \beta_9, \gamma_9$ den Werth 2 ein, sowie für die 55 Grössen (m, n, r) die aus der Tabelle resultirenden Zahlen, und erhalten $2^9 . \Sigma\left[(m, n, r) . \frac{9!}{m!n!r!}\right]$

$$= 2^9 . 9!\left[\frac{2.1+92}{0!0!9!} + \frac{2(2+3+92)}{0!1!8!} + \frac{2(4+9+80)}{0!2!7!}\right.$$
$$+ \frac{2(8+17+56)}{0!3!6!} + \frac{2(16+21+32)}{0!4!5!} + \frac{2.6+104}{1!1!7!}$$
$$+ \frac{2(12+18+104)}{1!2!6!} + \frac{2(24+34+80)}{1!3!5!} + \frac{2.48+42}{1!4!4!}$$
$$\left. + \frac{2.36+128}{2!2!5!} + \frac{2(72+68+112)}{2!3!4!} + \frac{104}{3!3!3!}\right]$$

$= 666841088$ *als die Anzahl der Flächen zweiter Ordnung, welche neun gegebene berühren.*

Berlin, den 18. März 1870.

Ueber den *Feuerbach*schen Satz für das ebene Dreieck.

(Von Herrn *J. Lappe* in Neu-Dietendorf bei Gotha.)

Im 68sten Bande dieses Journals p. 208 erwähnt Herr *Schröter* in dem Vorworte zu seiner Abhandlung „Erweiterung einiger bekannten Eigenschaften des ebenen Dreiecks“ den von *Feuerbach* gefundenen Satz, dass der durch die Mitten der Seiten eines Dreiecks gehende Kreis die vier dem Dreiecke einbeschriebenen Kreise gleichzeitig berührt, mit dem Bemerken, dass er häufiger angeführt als bewiesen worden sei.

Ich erlaube mir im Folgenden eine möglichst natürliche Entwickelung dieses Satzes zu geben, mit Hülfe der allgemeinen Gesetze der Kreisberührung, als deren specieller Fall er sich im Wesentlichen erweisen wird, indem ich das zum Beweise nöthige Material kurz vorausschicke.

I. Sind M_1, M_2, M_3 und M_4 die Mittelpunkte der drei äusseren und des inneren Berührungskreises *) eines Dreiecks $J_1J_2J_3$, so bildet die Ecke J_1 gleichzeitig den inneren Aehnlichkeitspunkt der beiden äusseren Berührungskreise M_2, M_3 und den äusseren Aehnlichkeitspunkt des dritten äusseren und des inneren Berührungskreises, d. h. der Kreise M_1, M_4; Aehnliches gilt für die Ecken J_2 und J_3.

Da die Centrale M_1M_4 den Winkel $J_2J_1J_3$ und die Centrale M_2M_3 dessen Nebenwinkel halbirt, so steht M_1M_4 senkrecht auf M_2M_3 und aus gleichem Grunde M_2M_4 auf M_1M_3, M_3M_4 auf M_1M_2, so dass M_1M_4, M_2M_4, M_3M_4 die Höhen des Mittelpunktdreiecks $M_1M_2M_3$ bilden und M_4 den Höhendurchschnittspunkt desselben.

Bezeichnet man mit π_i den Potenzpunkt derjenigen drei Kreise, welche nach Ausschluss des Kreises M_i von den vier Kreisen M_1, M_2, M_3, M_4 übrig bleiben, so ist $\pi_1\pi_2$, Verbindungslinie von π_1 und π_2, die Potenzlinie der Kreise M_3, M_4, sie steht demnach senkrecht auf der Centrale M_3M_4 derselben

*) Der Kürze wegen werde ich im Folgenden die Kreise durch ihre Mittelpunkte bezeichnen.

und ist, nach dem Vorhergehenden, parallel der Centrale M_1M_2, ebenso ist allgemein $\pi_i\pi_k$ parallel M_iM_k; zwischen den 6 Geraden $\pi_i\pi_k$ finden daher dieselben Beziehungen statt, die wir oben zwischen den M_iM_k gefunden haben, es steht nämlich $\pi_3\pi_4$ senkrecht auf $\pi_1\pi_2$, $\pi_2\pi_4$ senkrecht auf $\pi_1\pi_3$, und $\pi_1\pi_4$ senkrecht auf $\pi_2\pi_3$. Die Potenzlinien der drei äusseren Berührungskreise sind also die Lothe des durch die drei übrigen Potenzlinien gebildeten Dreiecks.

Mit p_1, p_2, p_3 bezeichne ich die Mitten der drei Seiten J_2J_3, J_3J_1, J_1J_2. Dies vorausgesetzt betrachte ich die Seite J_1J_2, welche eine der beiden gemeinschaftlichen äusseren Tangenten der Kreise M_1, M_2 bildet und von diesen Kreisen in den Punkten a_3, b_3 berührt werden möge, sodass a_3b_3 diejenige Strecke ist, die man als die Länge der äusseren gemeinschaftlichen Tangente der Kreise M_1, M_2 bezeichnen kann. Die Kreise M_1, M_2 besitzen ausser ihrem Paar äusserer gemeinschaftlichen Tangenten noch ein Paar innerer gemeinschaftlichen Tangenten, deren Länge $a^{(3)}b^{(3)}$, zwischen den Berührungspunkten gemessen, sich in doppelter Weise durch die Doppelgleichung

$$a^{(3)}b^{(3)} = J_1a_3 - J_1b_3 = J_2b_3 - J_2a_3$$

ausdrücken lässt. Da nun ferner

$$a_3b_3 = J_1a_3 + J_1b_3 = J_2b_3 + J_2a_3,$$

so ergiebt sich

$$J_1a_3 = J_2b_3, \qquad J_1b_3 = J_2a_3,$$

d. h. der Halbirungspunkt p_3 von J_1J_2 ist zugleich Halbirungspunkt von a_3b_3 oder, was dasselbe ist, p_3 liegt auf der Potenzlinie der Kreise M_1, M_2, also auf der Geraden $\pi_3\pi_4$. Mit derselben Leichtigkeit beweist man, dass p_3 auf $\pi_1\pi_2$ liegt, dass also p_3 den Durchschnitt von $\pi_3\pi_4$ und $\pi_1\pi_2$ bildet. Aehnliches gilt von p_1 und p_2. Daher kann man das gewonnene Resultat in folgendem Lehrsatz zusammenfassen:

Aus einem gegebenen Dreieck leite man mit Hülfe seiner vier Berührungskreise ein neues Dreieck dergestalt ab, dass der aus je zwei äusseren und dem inneren Berührungskreise gebildete Potenzpunkt je eine Ecke des neuen Dreiecks ist, dann fallen die Höhenfusspunkte des neuen Dreiecks mit den Mitten der Seiten des gegebenen Dreiecks zusammen.

II. Durch q_3, den Fusspunkt des von J_3 auf J_1J_2 gefällten Lothes, lege ich einen Kreis α, welcher die Kreise M_1, M_2 von aussen berührt, und durch p_3, die Mitte der Seite J_1J_2, einen Kreis α_1, welcher die Kreise M_1, M_2 ebenfalls von aussen berührt, dann werde ich in Folgendem zeigen, dass die beiden Kreise α und α_1 zusammenfallen.

Man kann q_3 als einen zu einem Punkte reducirten Kreis, die äussere Tangente $J_1 J_2$ der beiden Kreise M_1, M_2 als einen Kreis von unendlichem Radius auffassen, dann wird der innere Aehnlichkeitspunkt r_3 der Kreise α und $J_1 J_2$ auf dem Kreise α liegen und der Potenzpunkt der drei Kreise M_1, M_2, q_3 sein, ebenso wird auch der Potenzpunkt ϱ_3 der drei Kreise M_1, M_2, p_3 auf dem Kreise α_1 liegen; r_3 und ϱ_3 liegen selbstverständlich auf der Potenzlinie $\pi_3 \pi_4$ der beiden Kreise M_1 und M_2.

Denkt man sich den durch J_3, q_3 und den äusseren Aehnlichkeitspunkt A_3 der beiden Kreise M_1, M_2 gelegten Kreis, so liegt dessen Mittelpunkt n in der Centrale $M_1 M_2$ und halbirt die Strecke $J_3 A_3$.

Nach einem bekannten Satze ist die Potenzlinie der Kreise M_1, M_2 auch die der Kreise n und M_1, und n und M_2. Zieht man daher die den Kreis n in q_3 berührende Tangente, welche die Potenzlinie $\pi_3 \pi_4$ in r_3 treffen möge, so ist $(r_3 q_3)^2$, die Potenz des Punktes r_3 in Bezug auf Kreis n, oder auch auf den zu einem Punkte reducirten Kreis q_3, gleich der Potenz des Punktes r_3 in Bezug auf die Kreise M_1, M_2; r_3 ist also Potenzpunkt von M_1, M_2, q_3.

Die Potenzlinie $\pi_3 \pi_4$ von M_1 und M_2 trifft, wie oben gezeigt wurde, die $J_1 J_2$ in dem Halbirungspunkte p_3 der Strecke $J_1 J_2$, das Dreieck $p_3 r_3 q_3$ ist gleichschenklig, denn

$$\angle r_3 p_3 q_3 = 90^0 - \angle J_3 A_3 q_3,$$
$$\angle r_3 q_3 p_3 = 90^0 - \angle n q_3 A_3 = 90^0 - J_3 A_3 q_3 = \angle r_3 p_3 q_3,$$

in Folge dessen ist r_3 auch Potenzpunkt von M_1, M_2, p_3 und fällt demnach mit ϱ zusammen. Daher geht die Potenzlinie P_3 der beiden Punkte p_3 und q_3, d. h. die in der Mitte der Strecke $p_3 q_3$ errichtete Normale, auch durch r_3, welcher Punkt sich demnach am kürzesten als Durchschnitt der Linien P_3 und $\pi_3 \pi_4$ definiren lässt.

Da nun der Kreis α durch r_3 geht und die Kreise M_1, M_2 von aussen berührt, und da der Kreis α, ebenfalls durch r_3 (identisch mit ϱ_3) geht und die Kreise M_1, M_2 von aussen berührt, da ferner die beiden Kreise α und α_1 nach Voraussetzung dieselbe äussere Tangente $J_1 J_2$ der Kreise M_1, M_2 in den Punkten q_3 resp. p_3 schneiden, so fallen sie zusammen in einen Kreis α, welcher durch die Punkte p_3, q_3, r_3 geht und die Kreise M_1, M_2 von aussen berührt.

Der Kreis α ist durch die drei Punkte p_3, q_3, r_3 vollständig bestimmt, ein durch diese Punkte gehender Kreis berührt also die Kreise M_1 und M_2 von aussen, oder mit anderen Worten:

Zwei äussere Berührungskreise eines Dreiecks, zu welchen die eine Seite äussere und die beiden anderen innere Tangenten sind, werden von dem Kreise gleichartig von aussen berührt, welcher durch die Mitte der die äussere Tangente bildenden Seite, durch den auf derselben liegenden Höhenfusspunkt und durch den Durchschnittspunkt der Potenzlinien dieser beiden Punkte und der beiden Berührungskreise des Dreiecks geht.

Es lässt sich nun auf dieselbe Weise, wie eben geschehen ist, nachweisen und bedarf keiner ausführlicheren Ableitung, dass auch jedesmal ein äusserer und der innere Berührungskreis eines Dreiecks, zu welchen die eine Seite als innere Tangente und die beiden übrigen als äussere Tangenten gehören, von dem Kreise ungleichartig berührt werden, welcher durch die Mitte der die innere Tangente bildenden Seite, durch den auf derselben liegenden Höhenfusspunkt und durch den Durchschnittspunkt der Potenzlinien dieser beiden Punkte und der beiden Berührungskreise des Dreiecks geht.

Danach wird ein Kreis β, welcher die Punkte p_3, q_3 und den Punkt s_3 enthält, in dem sich die Potenzlinie P_3 der Punkte p_3, q_3 mit der Potenzlinie $\pi_1\pi_2$ der Kreise M_3, M_4 schneidet, die Kreise M_3, M_4 ungleichartig berühren.

Da die Punkte r_3, p_3 auf $\pi_3\pi_4$ und die Punkte s_3, p_3 auf $\pi_1\pi_2$ liegen, und da $\pi_1\pi_2$ normal auf $\pi_3\pi_4$ steht, wie in I. nachgewiesen wurde, so ist $\angle r_3 p_3 s_3$ ein rechter, und es ist leicht einzusehen, dass $\angle r_3 q_3 s_3$ ihm gleich ist, so dass sich durch die vier Punkte r_3, q_3, s_3, p_3 ein Kreis k_3 legen lässt.

Nun geht aber der Kreis α durch die drei Punkte p_3, q_3, r_3 des Kreises k_3, und der Kreis β durch die drei Punkte p_3, q_3, s_3 des Kreises k_3, so dass die Kreise α und β mit dem Kreis k_3 zusammenfallen, welcher letztere daher die Eigenschaften der beiden Kreise α und β in sich vereinigt. Es wird daher der durch die vier Punkte p_3, q_3, r_3, s_3 gelegte Kreis k_3 die vier Kreise M_1, M_2, M_3, M_4 berühren und zwar M_1, M_2 gleichartig von aussen, M_3, M_4 ungleichartig, indem, wie die Anschauung lehrt, k_3 den inneren Berührungskreis M_4 stets von innen berühren wird.

Da sich durch die Mitte p_3 der Seite J_1J_2 und durch den auf derselben liegenden Höhenfusspunkt q_3 ein Kreis k_3 legen lässt, welcher die drei äusseren Berührungskreise M_1, M_2, M_3 von aussen und den inneren Berührungskreis M_4 von innen berührt, wird man durch die Mitte p_2 der Seite J_1J_3 und den auf derselben liegenden Höhenfusspunkt q_2 einen Kreis k_2 legen können, welcher M_1, M_2, M_3 von aussen, M_4 von innen berührt, und ebenso durch die Mitte p_1 der Seite J_1J_3 und durch den auf derselben liegenden Höhenfusspunkt q_1

einen Kreis k_1, welcher gleichfalls die drei äusseren Berührungskreise M_1, M_2, M_3 von aussen und den inneren Berührungskreis M_4 von innen berührt.

Da es aber nur einen Kreis giebt, welcher drei gegebene andere Kreise von aussen berührt, so fallen die Kreise k_1, k_2, k_3, von denen jeder die drei äusseren Berührungskreise des Dreiecks $J_1J_2J_3$ von aussen berührt, in einen Kreis k zusammen, welcher die Eigenschaften von k_1, k_2 und k_3 in sich vereinigt; der Kreis k geht also durch die Mitten p_1, p_2, p_3 der Seiten des Dreiecks $J_1J_2J_3$ und durch die auf denselben liegenden Höhenfusspunkte q_1, q_2, q_3 und berührt die vier Berührungskreise M_1, M_2, M_3, M_4 des Dreiecks $J_1J_2J_3$.

Der Kreis k ist durch die drei auf seinem Umfang liegenden Punkte p_1, p_2, p_3 vollständig bestimmt, man kann daher das gewonnene Resultat auch so aussprechen, dass ein durch die Mitten der Seiten eines Dreiecks gehender Kreis die auf denselben liegenden Höhenfusspunkte enthält und die vier Berührungskreise des Dreiecks berührt, q. e. d.

III. Es lässt sich aus dem Vorhergehenden eine Folgerung ziehen, welche als eine Erweiterung des eben bewiesenen Satzes anzusehen ist.

Wie in I. gezeigt wurde, sind die Mitten p_1, p_2, p_3 der Seiten des Dreiecks $J_1J_2J_3$ die Höhenfusspunkte des Dreiecks $\pi_1\pi_2\pi_3$, dessen Seiten und Normalen die sechs zu den vier Berührungskreisen M_1, M_2, M_3, M_4 des Dreiecks $J_1J_2J_3$ gehörigen Potenzlinien sind. Indem also der Kreis k durch die Höhenfusspunkte p_1, p_2, p_3 des Dreiecks $\pi_1\pi_2\pi_3$ geht, werden die Punkte s_1, s_2, s_3, in denen er die Seiten dieses Dreiecks zum zweiten Male schneidet, die Mitten der Seiten desselben sein, der Kreis k wird demnach auch die vier Berührungskreise des Dreiecks $\pi_1\pi_2\pi_3$ berühren. Die sechs Potenzlinien, welche zu diesen vier Berührungskreisen gehören, bilden nun wieder die Seiten und Normalen eines Dreiecks $\pi_1^2\pi_2^2\pi_3^2$, dessen Höhenfusspunkte die Mitten s_1, s_2, s_3 des Dreiecks $\pi_1\pi_2\pi_3$ sind, und da der Kreis k durch die Höhenfusspunkte s_1, s_2, s_3 des Dreiecks $\pi_1^2\pi_2^2\pi_3^2$ geht, so wird er auch durch die Mitten der Seiten desselben gehen und die vier Berührungskreise desselben berühren. Die sechs Potenzlinien, welche zu diesen vier Berührungskreisen gehören, werden nun wieder die Seiten und Normalen eines Dreiecks $\pi_1^3\pi_2^3\pi_3^3$ bilden und man sieht, wie auf diese Weise eine unendliche Reihe von Dreiecken $\pi_1\pi_2\pi_3$, $\pi_1^2\pi_1^2\pi_3^2$, $\pi_1^3\pi_2^3\pi_3^3$, ... $\pi_1^{m-1}\pi_2^{m-1}\pi_3^{m-1}$, $\pi_1^m\pi_2^m\pi_3^m$ entsteht, deren Höhenfusspunkte und Seitenmitten auf *einem* Kreise liegen, welcher auch die Berührungskreise der Dreiecke berührt.

Es lassen sich nun die Beziehungen, welche zwischen den Winkeln zweier Dreiecke dieser Reihe stattfinden, leicht ermitteln. Sind nämlich π_1^m, π_2^m, π_3^m die Winkel des Dreiecks $\pi_1^m \pi_2^m \pi_3^m$, und π_1^{m-1}, π_2^{m-1}, π_3^{m-1} die Winkel des Dreiecks $\pi_1^{m-1} \pi_2^{m-1} \pi_3^{m-1}$, so ist

$$(1.) \qquad \pi_1^m = \frac{180^0 - \pi_1^{m-1}}{2}, \qquad \pi_2^m = \frac{180^0 - \pi_2^{m-1}}{2}, \qquad \pi_3^m = \frac{180^0 - \pi_3^{m-1}}{2},$$

und bezeichnet man die Winkel des Dreiecks $J_1 J_2 J_3$ mit J_1, J_2, J_3, so ist

$$(2.) \qquad \begin{cases} \pi_1^m = 60^0 + (-\frac{1}{2})^m . (J_1 - 60^0) \\ \pi_2^m = 60^0 + (-\frac{1}{2})^m . (J_2 - 60^0) \\ \pi_3^m = 60^0 + (-\frac{1}{2})^m . (J_3 - 60^0). \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass jeder Winkel eines Dreiecks dieser Reihe näher an 60^0 ist, als der entsprechende Winkel des ihm in der Reihe vorhergehenden Dreiecks, und dass sich diese Dreiecke dem gleichseitigen immer mehr nähern; auch würde sich leicht zeigen lassen, dass der Inhalt derselben stetig zunimmt, bis er sein Maximum im gleichseitigen Dreieck erreicht.

Neu-Dietendorf bei Gotha, 1869.